الرياضيات البحتة

الجزء الخاص
بالشرح و التمارين

امتحانات الكترونية
باستخدام تقنية QR

GPS



2025
المعاصر

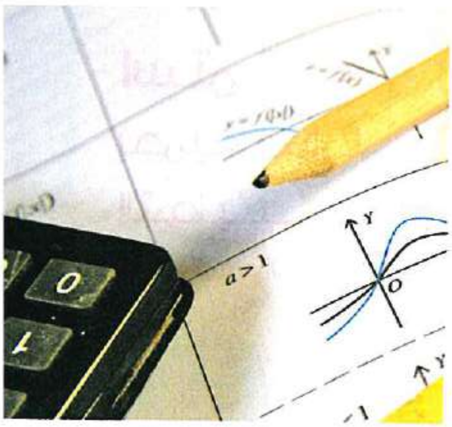
إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الأول

محتويات الكتاب

أولًا : الجبـــر

الوحدة 1 الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات



الوحدة 2 الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها



ثانيًا : التفاضل وحساب المثلثات

الوحدة 3 النهايات والاتصال



الوحدة 4 حساب المثلثات





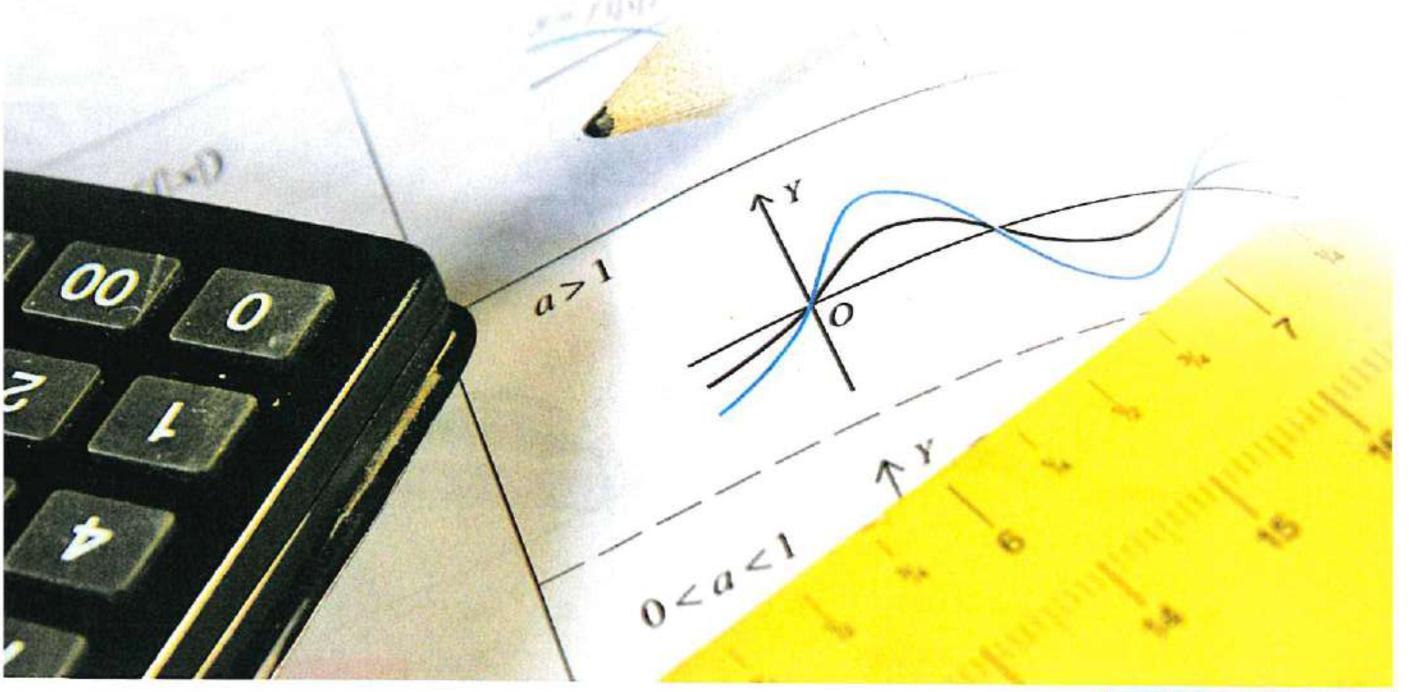
أولًا الجبــــر

الوحدة 1 الدوال الحقيقيـة ورســم المنحنيات

الوحدة 2 الأسس واللوغـاريتمـات وتطبيقـات عليهـا

الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات



متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

الدرس 1 الدوال الحقيقية (تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد).

الدرس 2 العمليات على الدوال - تركيب دالتين.

الدرس 3 بعض خواص الدوال (الدوال الزوجية والفردية - الدوال الأحادية).

الدرس 4 التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال.

الدرس 5 التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية.

الدرس 6 حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

فى نهاية الوحـــدة : تطبيقات حياتيـة على الوحدة الأولى.

متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

* **إذا كانت س ، ص مجموعتين غير خاليتين فإن :**

الدالة من المجموعة س إلى المجموعة ص هى علاقة تربط كل عنصر من عناصر س بعنصر واحد فقط من عناصر ص وتسمى س بمجال الدالة ، ص بالمجال المقابل.

، مجموعة صور عناصر مجموعة المجال س بـ «مدى الدالة» وهى مجموعة جزئية من المجال المقابل ص

* الدالة د تكتب رياضيًا د : س ⟵ ص ، قاعدة الدالة تكتب ص = د (س)

* بيان الدالة = {(س ، ص) ، س ∈ س ، ص ∈ ص ، ص = د (س)}

* يمكن تمثيل الدالة بالمخطط السهمى أو البيانى (الديكارتى)

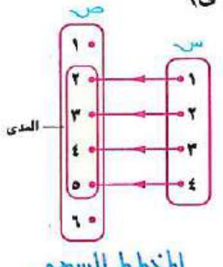
فمثلًا : إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

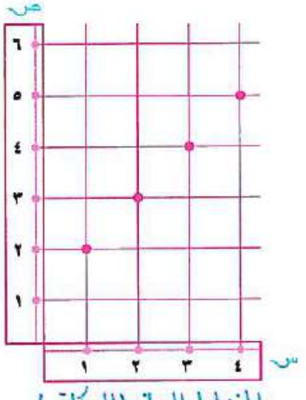
وكانت الدالة د : س ⟵ ص

حيث د (س) = س + ١

فإن بيان الدالة = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٥)}



المخطط السهمى



المخطط البيانى (الديكارتى)

• **لاحظ أن :**

ليس كل علاقة من س إلى ص دالة ولكن كل الدوال من س إلى ص هى علاقات تحقق أن :

– كل عنصر من س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى الأزواج المرتبة فى بيان العلاقة.

– كل عنصر من س يخرج منه سهم واحد وواحد فقط إلى أحد عناصر ص فى المخطط السهمى.

– كل خط رأسى يمر بنقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة فى المخطط البيانى.

* الدالة د : د (س) = $أ_{٠} + أ_{١}\,س + أ_{٢}\,س^{٢} + أ_{٣}\,س^{٣} + \dots + أ_{ن}\,س^{ن}$

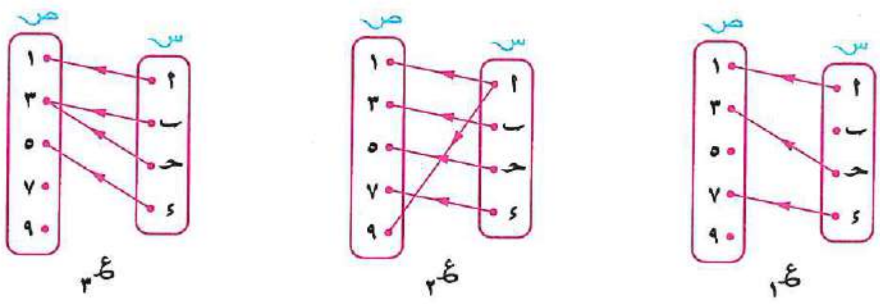
حيث $أ_{٠}$ ، $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $أ_{٣}$ ، ... ، $أ_{ن}$ ثوابت ، $أ_{ن}$ ∈ ح − {٠} ، ن ∈ ط تسمى كثيرة حدود من الدرجة ن وكل من مجالها والمجال المقابل هو ح ما لم يذكر خلاف ذلك.

* الدالة د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ $س^{ن}$ حيث أ ∈ ح* ، ن ∈ $ص_{+}$ تسمى دالة قوى لذلك عند جمع أو طرح دوال قوى مع ثوابت نحصل على دالة كثيرة حدود.

* مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود د هى مجموعة قيم س التى تجعل د (س) = صفر وهى تساوى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع الشكل البيانى للدالة مع محور السينات.

مثال ①

بين مع ذكر السبب أى العلاقات المبينة بالمخططات السهمية الآتية يمثل دالة وأيها لا يمثل دالة وإذا كانت دالة اذكر المجال والمدى :



ع١ ، ع٢ ، ع٣

الحـــل

- ع١ لا تمثل دالة لأن العنصر ب ∈ س لم يخرج منه أى سهم
- ع٢ لا تمثل دالة لأن العنصر أ ∈ س خرج منه سهمان
- ع٣ تمثل دالة لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر ص

، مجال الدالة = {أ ، ب ، حـ ، ء} ، مدى الدالة = {١ ، ٣ ، ٥}

مثال ②

حدد قيم أ ، ب ، حـ التى تجعل د (س) = ر (س) حيث :

د (س) = (أ + ب) س٢ – ٣ س – ٤ ، ر (س) = س٢ + (أ + حـ) س + ب

الحـــل

∵ د (س) = ر (س) عندما تتساوى معاملات قوى س المتناظرة

∴ أ + ب = ١ (١) ، (أ + حـ) = –٣ (٢) ، ب = –٤

، بالتعويض عن قيمة ب فى (١) ∴ أ – ٤ = ١ ∴ أ = ٥

وبالتعويض عن قيمة أ فى (٢) ∴ ٥ + حـ = –٣ ∴ حـ = –٨

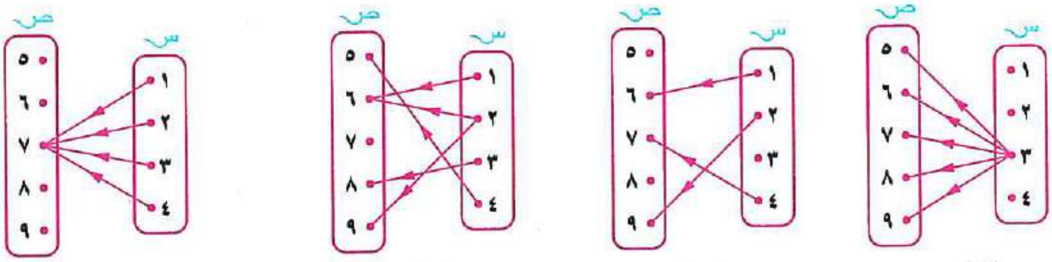
تمـارين على المتطلبات القبلية

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① 📖 أى المخططات السهمية الآتية يمثل دالة من س إلى ص ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

② 📖 العلاقة المبينة بمجموعة الأزواج المرتبة والتى لا تمثل دالة هى ....

(أ) {(١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧) ، (٧ ، ٩)}

(ب) {(٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٥)}

(جـ) {(٠ ، ٣) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣)}

(د) {(−٣ ، ٥) ، (−١ ، ٥) ، (٠ ، ٥) ، (٢ ، ٥)}

③ إذا كانت د : ح ⟵ ح وكانت د تربط العدد بنصف مربعه مضافًا إليه ٣

فإن : د (٢) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٥

④ إذا كانت ط هى مجموعة الأعداد الطبيعية أى مما يأتى يمثل دالة من ط ⟵ ط ؟

(أ) د (س) = $\frac{٢ س}{٣}$ (ب) ر (س) = ١ − س

(جـ) هـ (س) = ٢ س + ٣ (د) ن (س) = $\frac{١}{س − ٢}$

⑤ إذا كانت د : {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ⟵ ح حيث د (س + ٢) = ٣ س + ١

فإن : د (٣) = ...

(أ) ١٠ (ب) ٩ (جـ) ٤ (د) ١

(٦) مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{\text{س}^{٣} - ٨}{٤}$ هو ....

(أ) ح　　(ب) ح − {٨}　　(جـ) ح − {٢}　　(د) ح − {٤}

(٧) إذا كانت د : ح^{+} ⟵ ح ، د (س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س}}$ فإن مجال الدالة هو ....

(أ) ح　　(ب) ح − {٠}　　(جـ) ح^{+}　　(د) ح − {−١}

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت د ، ر كثيرتى حدود حيث د (س) = $(\text{أ س} + ٥)^{٢}$ ،

ر (س) = ٩ $\text{س}^{٢}$ + ٣٠ س + جـ − ٤ وكانت د (س) = ر (س)

أوجد قيمتى : أ ، جـ　　«٣ ، ٢٩»

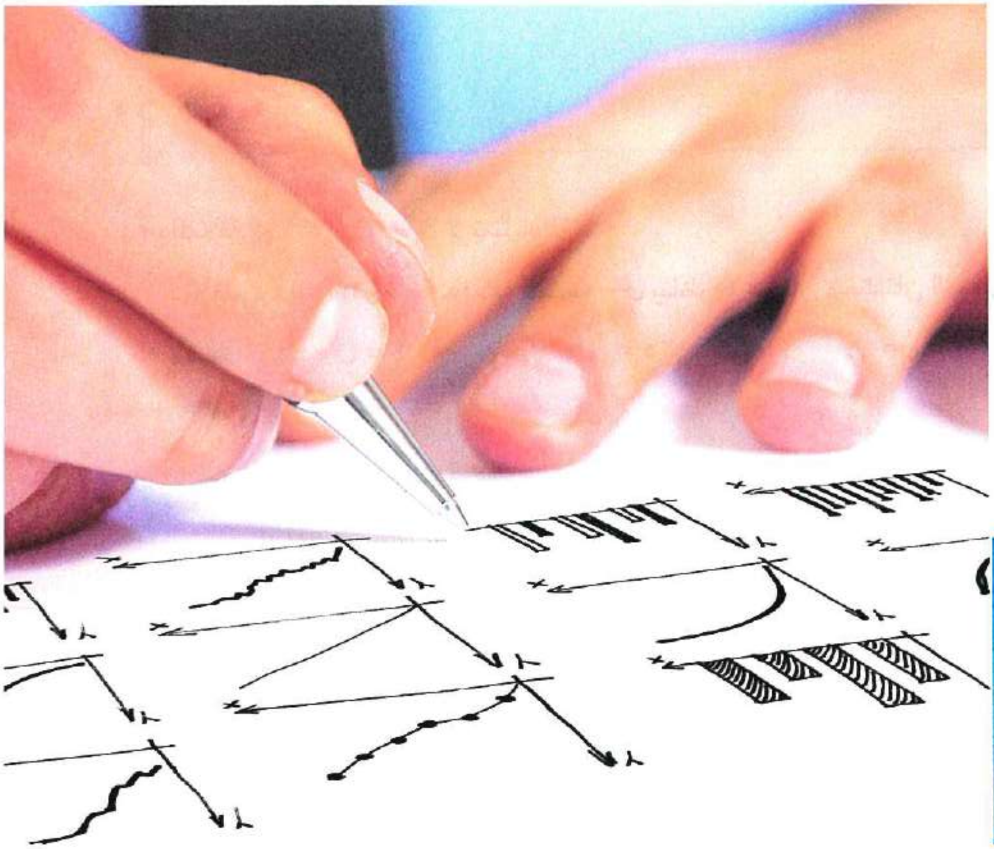
---

٢ حدد قيم أ ، ب ، جـ التى تجعل د (س) = ر (س) حيث :

(١) د (س) = (أ + ب) $\text{س}^{٣}$ + ٣ س − ٢ ، ر (س) = ٥ $\text{س}^{٣}$ + (أ + جـ) س + ب

(٢) د (س) = (أ + ب) $\text{س}^{٣}$ − ٢ ، ر (س) = $\text{س}^{٣}$ + (أ + جـ) س + ب

(٣) د (س) = (أ + ٢ ب) $\text{س}^{٣}$ − جـ س + ٤ ، ر (س) = ٧ $\text{س}^{٣}$ + ٥ س + (أ − ب)



الدرس

1

الـدوال الحقيقيــة
(تحديد المجال والمدى
- بحث الاطراد)

الدالة الحقيقية

الدالة د : س ← ص تسمى دالة حقيقية إذا كان كل من المجال (س) والمجال المقابل (ص) هو مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية فعلية منها.

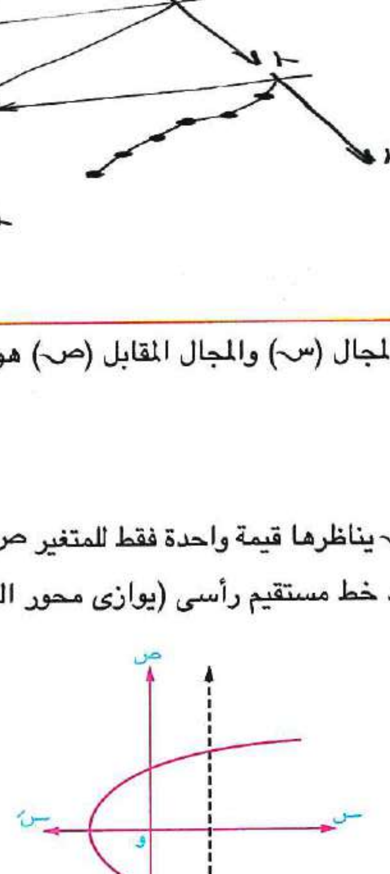
• تحديد كون العلاقة من س ← ص دالة أم لا :

1 **جبريًا** : العلاقة تكون دالة إذا كان كل قيمة للمتغير س ∈ س يناظرها قيمة واحدة فقط للمتغير ص ∈ ص

2 **بيانيًا (اختبار الخط الرأسى)** : العلاقة لا تمثل دالة إذا وجد خط مستقيم رأسى (يوازى محور الصادات) يقطع الشكل البيانى فى أكثر من نقطة :



التمثيل البيانى للعلاقة يمثل دالة من س ← ص



التمثيل البيانى للعلاقة لا يمثل دالة من س ← ص

مثال 1

بين أيًا من العلاقتين الآتيتين تمثل دالة وأيهما لا تمثل دالة على ح مع ذكر السبب :

1 $ص = س^٢ + ٣$ 2 $ص^٢ = س^٢ + ٩$

الحــل

1 العلاقة $ص = س^٢ + ٣$ تمثل دالة لأن كل قيمة حقيقية للمتغير س يناظرها قيمة وحيدة فقط للمتغير ص

فمثلًا : عند س = ٣ ∴ ص = ١٢ ، وعند س = −٢ ∴ ص = ٧ ، .... وهكذا

[٢] العلاقة $ص^{٢} = س^{٢} + ٩$ لا تمثل دالة

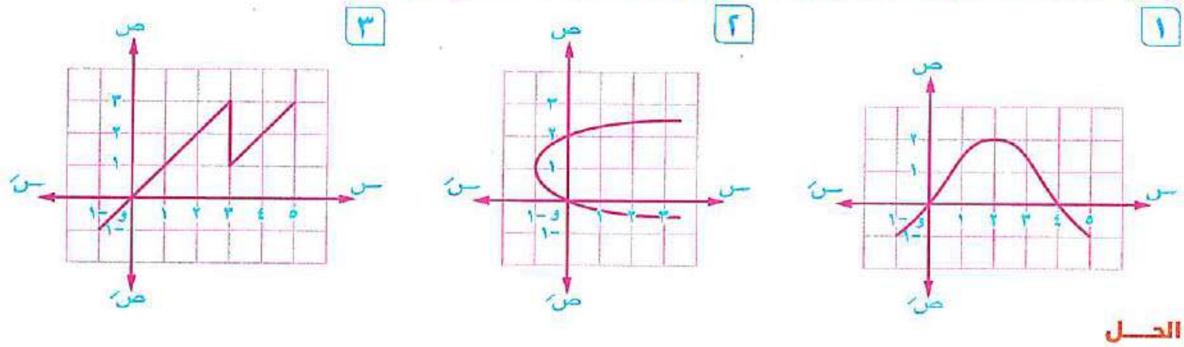
لأنه توجد على الأقل قيمة حقيقية للمتغير س يناظرها قيمتان مختلفتان للمتغير ص

فمثلًا : عند س = ٤ ∴ $ص^{٢} = ٢٥$ ∴ ص = ± ٥

مثال ٢

بين أيًا من الأشكال البيانية الآتية يمثل دالة على ح وأيها لا يمثل دالة مع ذكر السبب :

[١] [٢] [٣]



الحـــل

[١] يمثل دالة لأن كل خط رأسى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة على الأكثر.

[٢] لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسى يقطع المنحنى فى أكثر من نقطة واحدة.

[٣] لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسى يمر بالنقطة (٣ ، ٠) ويقطع المنحنى فى أكثر من نقطة واحدة.

ملاحظتان

[١] العلاقة ص = ٤ (تمثل بخط مستقيم أفقى يوازى محور السينات) تعبر عن دالة من س إلى ص لأن كل عنصر من س يرتبط بعنصر واحد فقط من ص

[٢] العلاقة س = ٤ (تمثل بخط مستقيم رأسى يوازى محور الصادات) لا تعبر عن دالة من س إلى ص لأن العنصر س = ٤ ارتبط بعدد لانهائى من عناصر ص

تحديد مجال الدوال الحقيقية

يتعين مجال الدالة من قاعدتها أو من الشكل البيانى لها.

أولًا تعيين مجال الدالة إذا عُلمت قاعدتها

١ الدالة كثيرة الحدود

د : د (س) = $أ_{٠} + أ_{١} س + أ_{٢} س^{٢} + ... + أ_{ن} س^{ن}$ حيث : $أ_{٠}$ ، $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، .... ، $أ_{ن}$ ثوابت حقيقية

، $أ_{ن} \in ح - \{٠\}$ كثيرة حدود من الدرجة ن

فإن مجال الدالة كثيرة الحدود يساوى ح ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.

فمثلًا : د : د (س) = ٣ كثيرة حدود ثابتة مجالها = ح

، د : د (س) = ٢ س + ١ ، س ≥ ١

كثيرة حدود من الدرجة الأولى مجالها =]− ∞ ، ١]

، د : د (س) = $س^{٢}$ − ٤ س + ٣ كثيرة حدود من الدرجة الثانية مجالها = ح

٢ الدالة الكسرية

إذا كانت د دالة كسرية حيث د (س) = $\frac{هـ (س)}{ن (س)}$ ، هـ ، ن كثيرتى حدود

فإن : مجال الدالة د هو ح − مجموعة أصفار المقام.

مثال ٣

عين مجال كل من الدوال الكسرية المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = $\frac{١}{س}$

٢ د (س) = $\frac{٣}{س − ٢}$

٣ د (س) = $\frac{س − ١}{٢ س^{٢} + ٥ س}$

٤ د (س) = $\frac{س − ٣}{س^{٢} − ٥ س + ٦}$

٥ د (س) = $\frac{س + ١}{س^{٢} − ٤ س + ٤}$

٦ د (س) = $\frac{س}{س^{٢} + ٢٥}$

الحـــل

١ المجال = ح − {٠}

٢ المجال = ح − {٢}

٣ بوضع ٢ $س^{٢}$ + ٥ س = ٠

∴ س (٢ س + ٥) = ٠

∴ س = ٠ ، أ، س = $\frac{-٥}{٢}$

∴ المجال = ح − {٠ ، $\frac{-٥}{٢}$}

٤ بوضع $س^{٢}$ − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣

∴ المجال = ح − {٢ ، ٣}

٥ بوضع $س^{٢}$ − ٤ س + ٤ = ٠

∴ $(س − ٢)^{٢}$ = ٠

∴ س = ٢

∴ المجال = ح − {٢}

٦ بوضع $س^{٢}$ + ٢٥ = ٠ وهذه المعادلة ليس لها حل فى ح أى لا يوجد أصفار حقيقية للمقام

∴ المجال = ح

٣ دالة الجذر النونى

إذا كانت د (س) = $\sqrt[ن]{هـ (س)}$ حيث ن ∈ $ص^{+}$ ، ن > ١ ، هـ (س) كثيرة حدود

أولاً : عندما ن عدد فردى فإن مجال الدالة د هو ح

ثانيًا : عندما ن عدد زوجى فإن مجال الدالة د هو مجموعة قيم س التى تحقق هـ (س) ≥ ٠

حيث ن تسمى دليل الجذر.

مثال ٤

عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = $\sqrt{س + ٢}$

٢ د (س) = $\sqrt{س^٢ + ٥}$

٣ د (س) = $\sqrt{-٢ س + ٣}$

٤ د (س) = $\sqrt[٣]{٩ - س^٢}$

٥ د (س) = $\sqrt{٤ س^٢ - ١٢ س + ٩}$

٦ د (س) = $\sqrt{س^٢ - ٤}$

٧ د (س) = $\frac{١}{\sqrt{٤ + ٣ س - س^٢}}$

الحل

١ ∵ دليل الجذر عدد زوجى.
∴ الدالة معرفة بشرط س + ٢ ≥ ٠
∴ س ≥ -٢
∴ المجال = [-٢ ، ∞[

٢ ∵ دليل الجذر عدد زوجى.
∴ الدالة معرفة بشرط $س^٢$ + ٥ ≥ ٠ وهو متحقق لكل قيم س الحقيقية ∴ المجال = ح

٣ ∵ دليل الجذر عدد زوجى.
∴ -٢ س + ٣ ≥ ٠
∴ س ≤ $\frac{٣}{٢}$
∴ المجال =]-∞ ، $\frac{٣}{٢}$]

٤ ∵ دليل الجذر عدد فردى.
∴ المجال = ح

٥ ∵ دليل الجذر عدد زوجى.
∴ الدالة معرفة بشرط أن : ٤ $س^٢$ - ١٢ س + ٩ ≥ ٠
∴ $(٢ س - ٣)^٢$ ≥ ٠
، ∵ مجموعة حل المتباينة = ح
∴ مجال الدالة د = ح

٦ ∵ دليل الجذر عدد زوجى.
∴ الدالة معرفة بشرط أن : $س^٢$ - ٤ ≥ ٠
∴ (س - ٢) (س + ٢) ≥ ٠
، ∵ مجموعة حل المتباينة = ح -]-٢ ، ٢[
∴ مجال الدالة د = ح -]-٢ ، ٢[

٧ ∵ الدالة تكون معرفة بشرط أن :
٤ + ٣ س - $س^٢$ > ٠
∴ $س^٢$ - ٣ س - ٤ < ٠
∴ (س - ٤) (س + ١) < ٠
، ∵ مجموعة حل المتباينة =]-١ ، ٤[
∴ مجال الدالة د =]-١ ، ٤[

! تذكر أن

(حل متباينات الدرجة الثانية فى متغير واحد)

إذا كان : ل ، م حيث ل < م هما جذران حقيقيان للمعادلة :
أ $س^٢$ + ب س + حـ = ٠ ، أ > ٠
فإن مجموعة الحل فى ح للمتباينة :

١ أ $س^٢$ + ب س + حـ ≥ ٠
هى ح -]ل ، م[

٢ أ $س^٢$ + ب س + حـ > ٠
هى ح - [ل ، م]

٣ أ $س^٢$ + ب س + حـ ≤ ٠
هى [ل ، م]

٤ أ $س^٢$ + ب س + حـ < ٠
هى]ل ، م[

٤ الدالة مجزأة المجال «ذات المقاطع»

هى دالة معرفة بقواعد مختلفة فى فترات مختلفة من مجالها ومجال هذه الدالة يساوى اتحاد الفترات المعرفة فيها قواعدها.

مثال ٥

عين مجال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين :

[١] $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 2 - \text{س} & ، \text{س} < 0 \\ \text{س} - 2 & ، \text{س} > 0 \end{cases}$

[٢] $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 & ، -2 \le \text{س} < 0 \\ \text{س} & ، 0 \le \text{س} \le 1 \\ \frac{1}{\text{س}} & ، \text{س} > 1 \end{cases}$

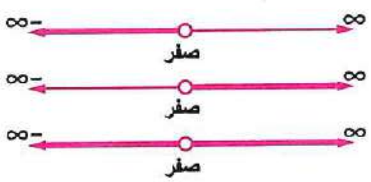
الحل

[١] الدالة د معرفة على فترتين كما يلى :

معرفة عندما $\text{س} \in]-\infty ، 0[$

، معرفة عندما $\text{س} \in]0 ، \infty[$

$\therefore$ مجال د $=]-\infty ، 0[\cup]0 ، \infty[= \text{ح} - \{0\}$



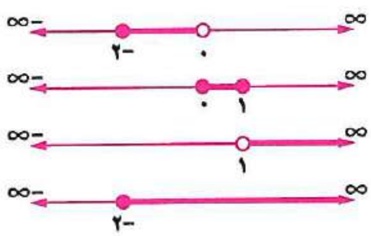
[٢] الدالة د معرفة على ثلاث فترات كما يلى :

معرفة عندما $\text{س} \in [-2 ، 0[$

، معرفة عندما $\text{س} \in [0 ، 1]$

، معرفة عندما $\text{س} \in]1 ، \infty[$

$\therefore$ مجال د $= [-2 ، 0[\cup [0 ، 1] \cup]1 ، \infty[= [-2 ، \infty[$

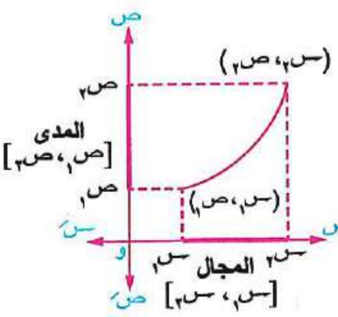


ثانيًا تعيين مجال ومدى الدالة من الشكل البيانى لها

من الشكل البيانى للدالة يمكن استنتاج مجال ومدى الدالة فيكون :

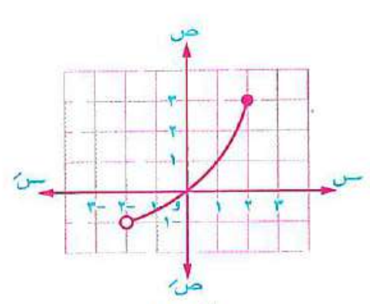
[١] مجال الدالة هو مجموعة الإحداثيات السينية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.

[٢] مدى الدالة هو مجموعة الإحداثيات الصادية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.

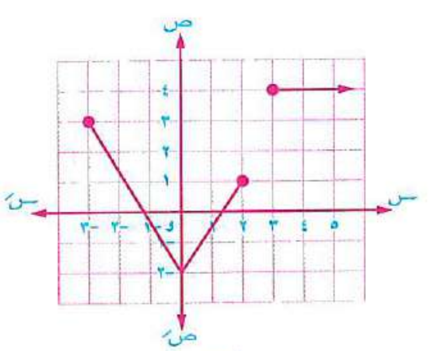


مثال ٦

عين مجال ومدى كل من الدالتين الممثلتين بالشكلين الآتيين :



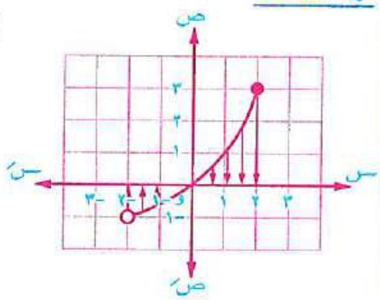
شكل (١)



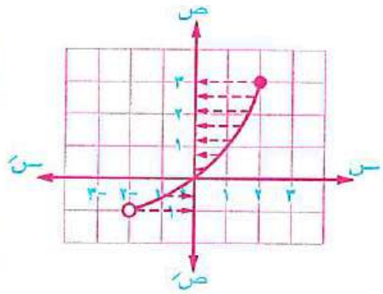
شكل (٢)

الحل

في شكل (١) :



* الإحداثيات السينية لجميع نقط منحنى الدالة
هى الفترة]−٢ ، ٢]
∴ المجال =]−٢ ، ٢]

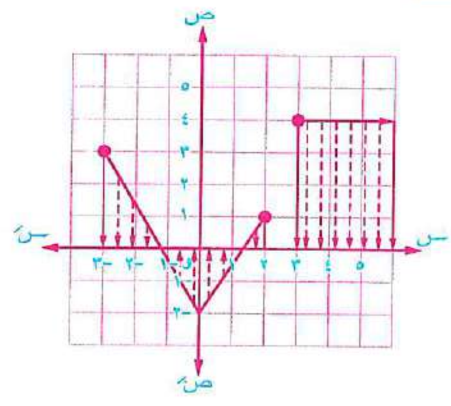


* الإحداثيات الصادية لجميع نقط منحنى الدالة
هى الفترة]−١ ، ٣]
∴ المدى =]−١ ، ٣]

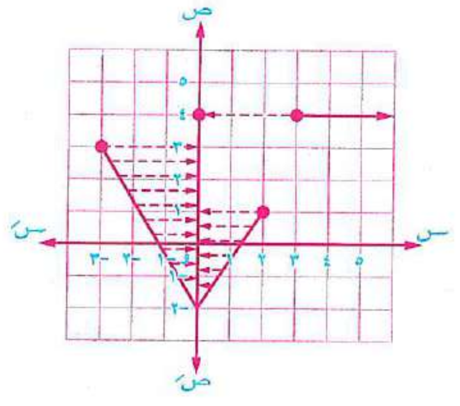
لاحظ أن

* الدائرة المفرغة عند النقطة (−٢ ، −١) توضح أن النقطة ∌ بيان الدالة وبالتالى −٢ ∌ مجال الدالة ، −١ ∌ مدى الدالة
* الدائرة المغلقة عند النقطة (٢ ، ٣) توضح أن النقطة ∋ بيان الدالة وبالتالى ٢ ∋ مجال الدالة ، ٣ ∋ مدى الدالة

في شكل (٢) :



* الإحداثيات السينية لجميع نقط منحنى الدالة هى الفترتين [−٣ ، ٢] ، [٣ ، ∞[
∴ المجال = [−٣ ، ٢] ∪ [٣ ، ∞[



* ∵ الإحداثيات الصادية لجميع نقط الشعاع الأفقى هى ص = ٤ ، الإحداثيات الصادية لجزء المنحنى الآخر هى الفترة [−٢ ، ٣]
∴ المدى = [−٢ ، ٣] ∪ {٤}

تعيين اطراد الدالة من الشكل البيانى لها

* يقصد ببحث اطراد دالة ما تحديد الفترات التى تكون فيها الدالة تزايدية والفترات التى تكون فيها الدالة تناقصية والفترات التى تكون فيها الدالة ثابتة.

تعريف

إذا كانت الدالة د معرفة فى الفترة]أ ، ب[وكانت $س_1$ ، $س_2$ ∈]أ ، ب[

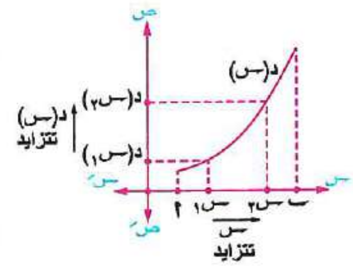
فيقال للدالة د إنها

① تزايدية فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

$س_2 > س_1$ ⇐

د ($س_2$) > د ($س_1$)

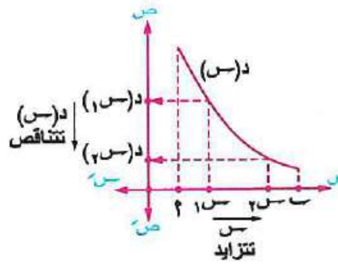


② تناقصية فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

$س_2 > س_1$ ⇐

د ($س_2$) < د ($س_1$)

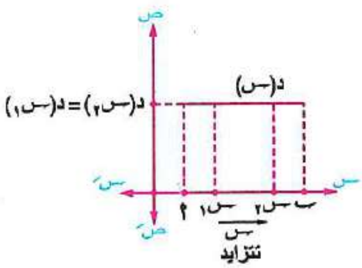


③ ثابتة فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

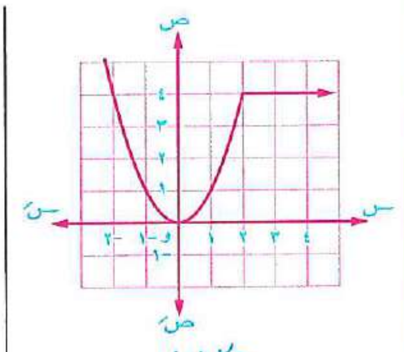
$س_2 > س_1$ ⇐

د ($س_2$) = د ($س_1$)

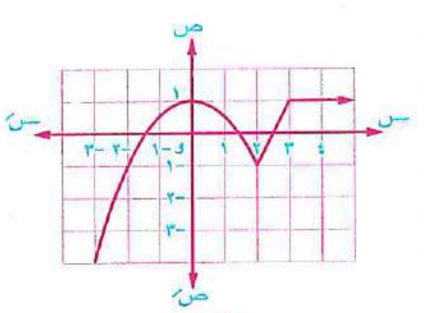


مثال ٧

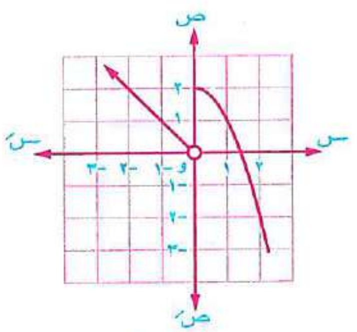
ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحل

شكل (١) : الدالة تناقصية فى الفترة]− ∞ ، ٠[، تزايدية فى الفترة]٠ ، ٢[، ثابتة فى الفترة]٢ ، ∞[

شكل (٢) : الدالة تزايدية فى الفترة]− ∞ ، ٠[، تناقصية فى الفترة]٠ ، ٢[

، تزايدية فى الفترة]٢ ، ٣[، ثابتة فى الفترة]٣ ، ∞[

شكل (٣) : الدالة تناقصية فى كل من الفترتين]− ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

تمـارين 1

على الدوال الحقيقية
(تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد)

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى | • فهـم | • تطبيق | مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة ....

(أ) ص = ٣ س + ١ (ب) ص = س^{٢} − ٤ (جـ) س = ص^{٢} − ٢ (د) ص = جا س

(٢) فى جميع العلاقات التالية تكون ص دالة فى س ماعدا العلاقة ....

(أ) ص = جتا س (ب) ص = ٢ (جـ) ص = س^{٢} − ١ (د) ص^{٢} = س^{٢} + ١

(٣) إذا كانت : د ($\sqrt{\text{س}}$) = س^{٢} فإن : د (٢) = ...

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ١٦

(٤) إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س) = (أ + ١) س + ب − ٢ وكانت :
د (س) تربط كل عدد حقيقى بنفسه فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (١ ، ٣) (ب) (٠ ، ٣) (جـ) (٠ ، ٢) (د) (٠ ، ٠)

(٥) الدالة د : د (س) = ٥ مجالها هو ....

(أ) ح (ب) ح$^{+}$ (جـ) {٥} (د) {٠ ، ٥}

(٦) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\text{٢ س + ١}}{\text{س − ٢}}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {−$\frac{١}{٢}$} (جـ) ح − {−$\frac{١}{٢}$ ، ٢} (د) ح − {٢}

(٧) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\text{س}^{٢}\text{ + ١}}{\text{س}^{٢}\text{ + ٤ س}}$ هو ....

(أ) ح − {١ ، −١} (ب) ح − {٠ ، −٤} (جـ) ح (د) ح − {٠ ، ٤}

(٨) مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{\text{٥ + ٢ س}}{\text{س}^{٢}\text{ + س + ١}}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٥} (جـ) ح − {٢} (د) ح − {−٢ ، −٥}

(٩) مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{٧}{\text{س}^{٣}\text{ − س}}$ هو ....

(أ) ح − {٣} (ب) ح − {٧} (جـ) ح − {٠ ، ١} (د) ح − {٠ ، ١ ، −١}

(١٠) مجال الدالة د حيث د : ح⁺ ⟵ ح ، د (س) = (س − ١) / (٤ س) هو ....

(أ) ح   (ب) ح − {٠}   (جـ) ح⁺   (د) ح − {١}

(١١) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = ٢ / (س² − ٦ س + ك) هو ح − {٣} فإن : ك = ...

(أ) ٣   (ب) ٩   (جـ) ± ٩   (د) ١٨

(١٢) مجال الدالة د : د (س) = √(س − ٣) هو ....

(أ) ح   (ب) ح − {٣}   (جـ) [٣ ، ∞[(د)]−∞ ، ٣[

(١٣) مجال الدالة د حيث د (س) = √(٤ − س) هو ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٤[(جـ)]٤ ، ∞[(د)]−∞ ، ٤]

(١٤) مجال الدالة د : د (س) = ∛(س − ٥) هو ....

(أ) [٥ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٥[(جـ) ح   (د) ح⁺

(١٥) مجال الدالة د : د (س) = ∛(٩ − س²) هو ....

(أ)]−٣ ، ٣[(ب) ح   (جـ) ح −]−٣ ، ٣[(د) [−٣ ، ٣]

(١٦) مجال الدالة د : د (س) = ٥ / √(س − ٤) هو ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]٤ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٤]   (د)]−∞ ، ٤[

(١٧) مجال الدالة د : د (س) = ١ / √(٩ − س²) هو ....

(أ) ح   (ب) ح − [−٣ ، ٣]   (جـ) ح − {−٣ ، ٣}   (د)]−٣ ، ٣[

(١٨) مجال الدالة د حيث د (س) = ∜(س² + ٤) هو ....

(أ) ح   (ب) ح − {٤}   (جـ) ح − {٠}   (د) ح − {−٢ ، ٢}

(١٩) مجال الدالة د حيث د (س) = ١ / ∛(س² − ٥ س − ٦) هو ....

(أ) ح − {٥}   (ب) ح − {٦}   (جـ) ح − {١ ، −٦}   (د) ح − {−١ ، ٦}

(٢٠) إذا كانت م مساحة سطح دائرة وكان س طول نصف قطر الدائرة وكان م = π س²

أى أن المساحة دالة فى س ، فإن مجالها = ...

(أ) ح   (ب) ح − {٠}   (جـ) ص⁺   (د) ح⁺

(٢١) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = ١ / √(س − أ) هو]−٣ ، ∞[فإن : أ = ...

(أ) ٣   (ب) −٣   (جـ) ± ٣   (د) √٣

(٢٢) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{\sqrt{س^{٢} + أ}}$ هو ح − [−٥ ، ٥] فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) −٢٥ (جـ) −٥ (د) ٢٥

(٢٣) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{\sqrt{س^{٢} + أ}}$ هو ح فإن : أ لايمكن أن تساوى ....

(أ) ٥ (ب) $\sqrt{٤}$ (جـ) صفر (د) ٩

(٢٤) إذا كانت : د (س) = { −٤ س + ٣ ، س < ٣ ؛ −س٣ ، ٣ ≤ س ≤ ٨ ؛ ٣ س٢ + ١ ، س > ٨ فإن : د (١٠) = ...

(أ) −٣٧ (ب) −١٠٠٠ (جـ) ٣٠١ (د) ٤٣

(٢٥) مجال الدالة د حيث د (س) = { −٢ ، س < ٢ ؛ ٣ ، س > ٢ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٣} (جـ) ح − {−٢} (د) ح − {٢}

(٢٦) مجال الدالة د حيث د (س) = { س ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ ٢ − س ، ١ < س ≤ ٢ هو ....

(أ) ح − {١} (ب) [٠ ، ٢] (جـ) ح − {٠ ، ٢} (د)]٠ ، ٢[

(٢٧) مجال الدالة د : د (س) = { س٣ + ٢ ، −٢ ≤ س < ٠ ؛ س − ١ ، س > ٠ هو ....

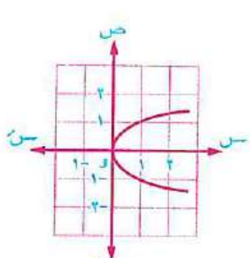
(أ) ح (ب) [−٢ ، ٠]

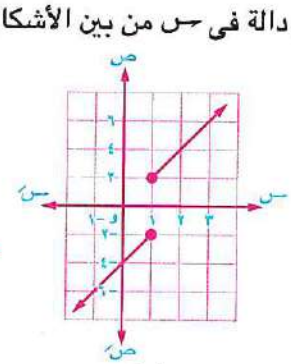
(جـ) [−٢ ، ∞[− {٠} (د) [−٢ ، ∞[

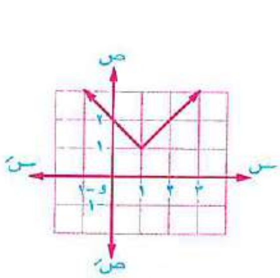
(٢٨) مجال الدالة د : د (س) = { ٠ ، س ≤ ٠ ؛ ١ ، س > ٣ هو ....

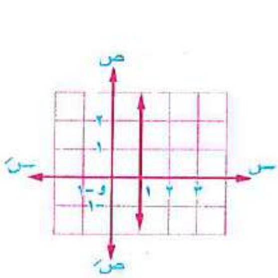
(أ) {٠ ، ١} (ب) [٠ ، ٣] (جـ) ح (د) ح −]٠ ، ٣]

(٢٩) الشكل الذى يمثل دالة فى س من بين الأشكال الآتية هو ....

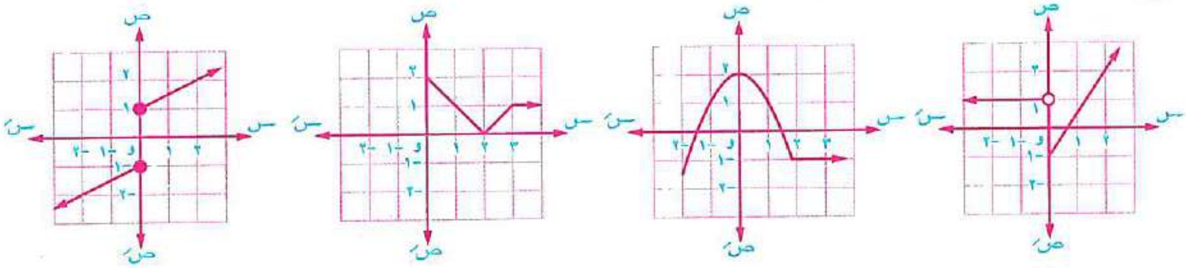

(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

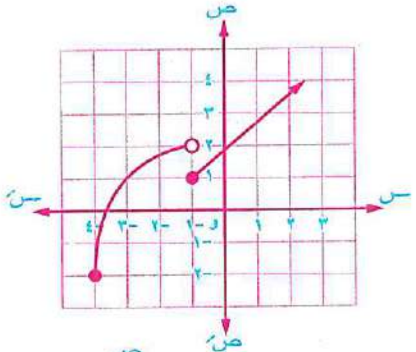
(٣٠) أى الأشكال البيانية الآتية لا يمثل دالة فى س ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٣١) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن مجالها هو ....



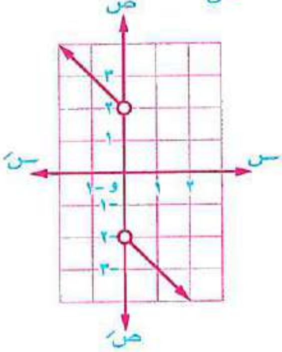
(أ) ح - {-٤ ، -١}

(ب)]-٤ ، -١[

(جـ) [-٤ ، ∞[

(د) [-٤ ، ∞[- {-١}

(٣٢) الشكل المقابل يمثل دالة فى س مجالها ....



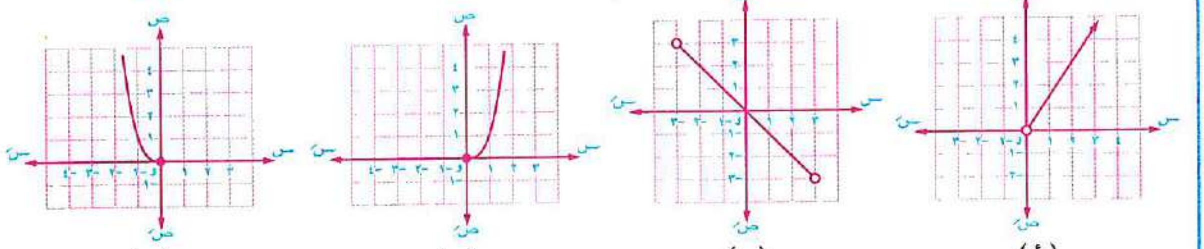
(أ) ح

(ب) ح -]-٢ ، ٢[

(جـ) ح - [-٢ ، ٢]

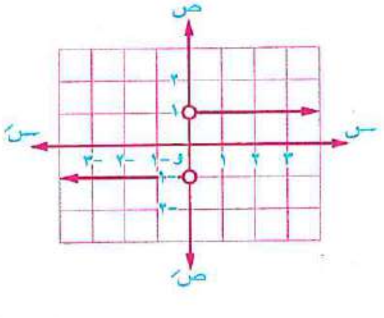
(د) ح - {٠}

(٣٣) أى من الأشكال الآتية تمثل منحنى دالة يكون فيه المدى ≠ المجال ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٣٤) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



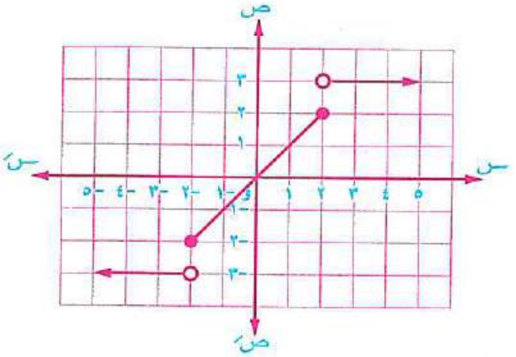
(أ) {١}

(ب) {١ ، -١}

(جـ) {-١}

(د) ح - {٠}

(٣٥) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن مداها هو ....

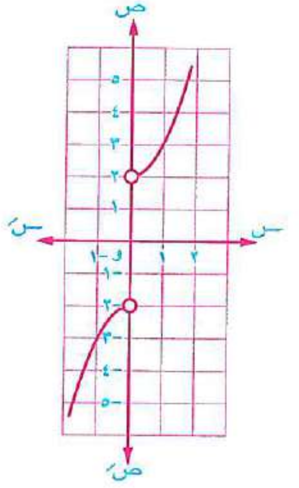
(أ) ح

(ب) [-٢ ، ٢]

(جـ) [-٢ ، ٢] ∪ {-٣ ، ٣}

(د)]-٣ ، ٣[

(٣٦) فى الشكل المقابل :



أولاً : مدى الدالة هو ....

(أ) ح - {٠} (ب) ح - [-٢ ، ٢]

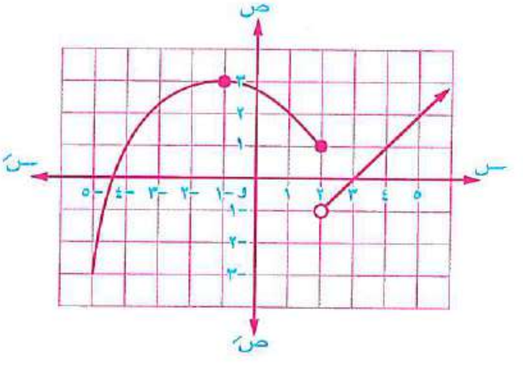
(جـ) ح (د) [-٢ ، ٢]

ثانيًا : الدالة تكون متزايدة فى ....

(أ)]-∞ ، ٠[فقط. (ب)]٠ ، ∞[فقط.

(جـ)]-∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[(د) ح - [-٢ ، ٢]

(٣٧) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن الدالة تكون تزايدية فى ....

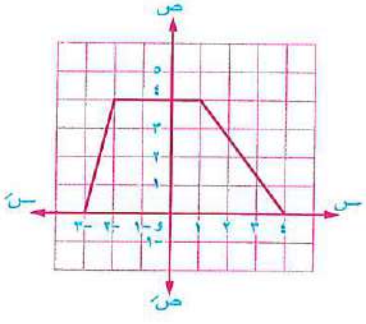
(أ)]-∞ ، -١[

(ب)]-∞ ، -١[،]٢ ، ∞[

(جـ)]٢ ، ∞[

(د)]-١ ، ٢[

(٣٨) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



أى العبارات الآتية خطأ ؟

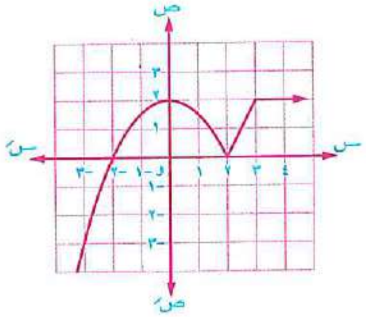
(أ) د ثابتة فى]-٢ ، ١[

(ب) د تناقصية فى]١ ، ٤[

(جـ) د تزايدية فى]-٣ ، -٢[

(د) د ثابتة فى]-٣ ، ٤[

(٣٩) في الشكل المقابل :



إذا كانت الدالة متناقصة في]٠ ، أ[وثابتة في]ب ، ∞[

فإن : أ − ب = ...

(أ) ٥ (ب) ١

(جـ) −١ (د) ٣

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كان س ، ص متغيرين حقيقيين فحدد أي علاقة مما يأتي تمثل دالة في س وأيها لا :

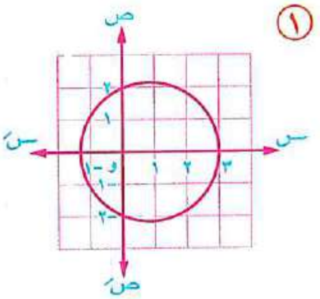
(١) ص = ٢ س + ٥ (٢) ص^{٢} = س + ٤ (٣) ص = $\sqrt{س^{٢} + ٤}$

(٤) (س − ص)^{٢} = ٥ (٥) ص^{٣} − س^{٢} = ٢ (٦) ص = ٢

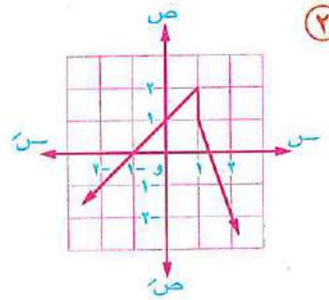
(٧) س = ٣ (٨) ص = ٣ جا س (٩) س ص + ص = ٢ س + ٢

٢ في كل شكل من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت ص تمثل دالة في س أم لا :

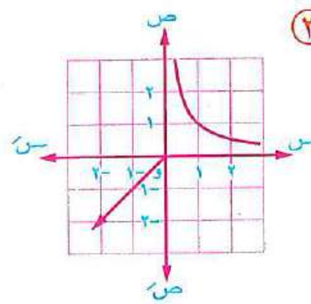
(١)



(٢)



(٣)



٣ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

(١) د(س) = $\frac{٢ س + ٣}{س^{٢} - ٣ س + ٢}$ (٢) د(س) = $\frac{٨}{س^{٢} - ٦ س + ٩}$

(٣) د(س) = $\frac{س + ٣}{٣ س^{٢} - س - ٢}$ (٤) د(س) = $\frac{س + ١}{س^{٣} + ١}$

٤ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

(١) د(س) = $\frac{٤}{\sqrt[٣]{٢ س - ٥}}$ (٢) د(س) = $\frac{٣}{\sqrt{س - ٣}}$

(٣) د(س) = $\frac{٢}{\sqrt{١ - س}}$ (٤) د(س) = $\sqrt{س^{٢} - ١٦}$

(٥) د(س) = $\frac{٥}{\sqrt{٩ - س^{٢}}}$ (٦) د(س) = $\sqrt{س^{٢} + ٢ س + ٥}$

(٧) د(س) = $\frac{١}{\sqrt{س^{٢} - ٤ س + ٤}}$ (٨) د(س) = $\frac{٥}{\sqrt{س - ١}}$

٥ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

① $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -٣ & \text{، س} < ٣ \\ ٥ - \text{س} & \text{، س} \geq ٣ \end{cases}$

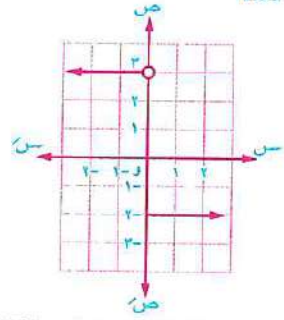
② $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ١ & \text{، س} \leq ٢ \\ -٥ & \text{، } ٢ < \text{س} < ٤ \end{cases}$

③ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س} & \text{، س} \in [٠ \text{ ، } ٢] \\ ٦ & \text{، س} \in]٢ \text{ ، } ٤[\\ \text{س} + ٢ & \text{، س} \in [٤ \text{ ، } ٦] \end{cases}$

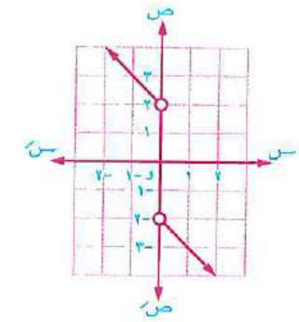
---

٦ عين مجال ومدى ثم ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :

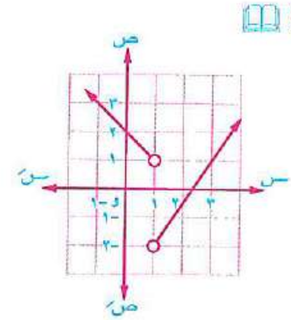
①



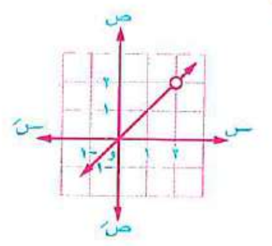
②



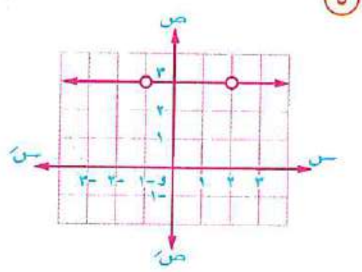
③



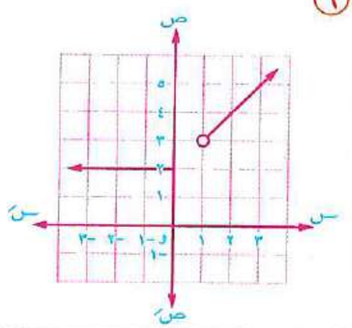
④



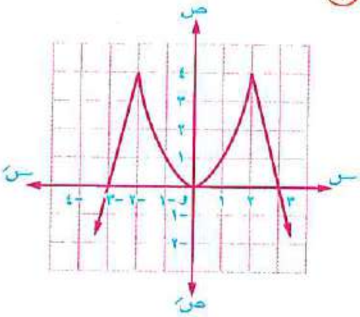
⑤



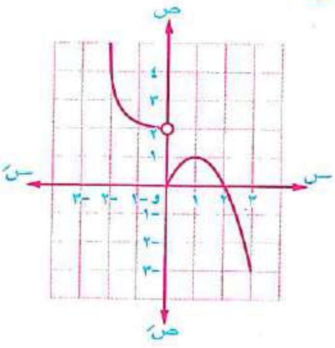
⑥



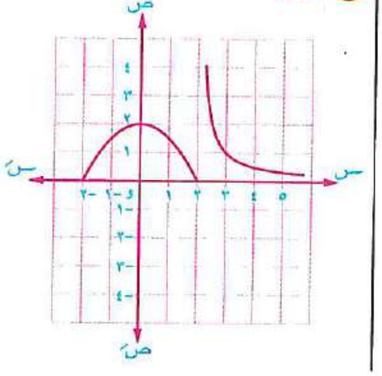
⑦



⑧



⑨



ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت العلاقة بين مجموع قياسات زوايا المضلع الداخلة (ص) ، عدد أضلاع المضلع (س) هى ص = π (س − ٢) فإن مجال الدالة ص = ...

(أ) $ح^+$ (ب) ح − {٢} (جـ) $ص^+$ (د) $ص^+$ − {١ ، ٢}

(٢) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س}{\sqrt[٣]{س - ٢}}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٢} (جـ) ح − {٠ ، ٢} (د) ح − {٨}

(٣) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س}{\sqrt[٣]{س} - س}$ هو ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠[

(جـ) [٠ ، ∞[− {١} (د)]٠ ، ∞[− {٣}

(٤) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س - ١} - ٣}$ هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[− {٣}

(جـ) [١ ، ∞[− {١٠} (د) [−٣ ، ∞[

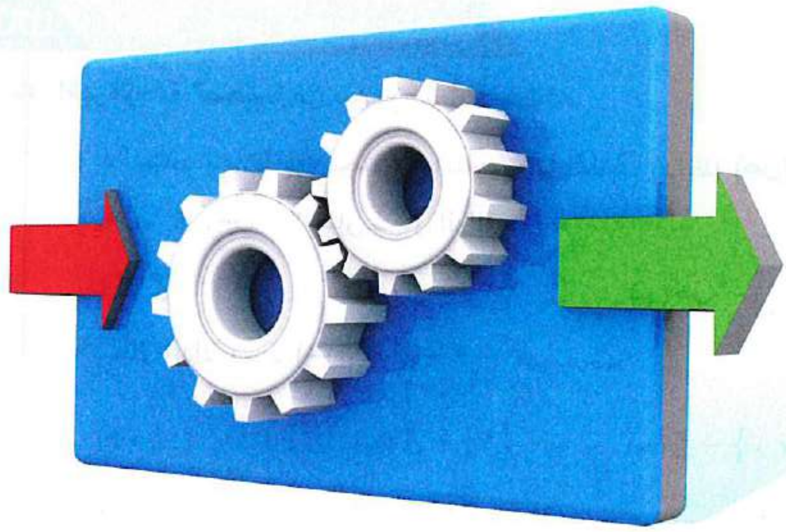
(٥) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٧}{\sqrt{س - ١} + ٣}$ هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[− {−٣}

(جـ) [١ ، ∞[− {١٠} (د) [٣ ، ∞[

(٦) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{٦س - ٩ - س^٢}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٣} (جـ) [٣ ، ∞[(د) {٣}



الدرس 2

العمليات على الدوال
- تركيب دالتين

*** إذا كانت $د_{1}$ ، $د_{2}$ دالتين مجالاهما $م_{1}$ ، $م_{2}$ فإن :**

1 $(د_{1} \pm د_{2})$ (س) = $د_{1}$ (س) $\pm$ $د_{2}$ (س) ، مجال $(د_{1} \pm د_{2})$ هو $م_{1} \cap م_{2}$

2 $(د_{1} \times د_{2})$ (س) = $د_{1}$ (س) $\times$ $د_{2}$ (س) ، مجال $(د_{1} \times د_{2})$ هو $م_{1} \cap م_{2}$

3 $\left(\frac{د_{1}}{د_{2}}\right)$ (س) = $\frac{د_{1}(س)}{د_{2}(س)}$ حيث $د_{2}$ (س) $\neq$ ٠

، مجال $\left(\frac{د_{1}}{د_{2}}\right)$ هو $(م_{1} \cap م_{2})$ − ص $(د_{2})$ حيث ص $(د_{2})$ مجموعة أصفار $د_{2}$

ونلاحظ أنه فى جميع العمليات على الدوال يكون مجال الدالة الناتجة يساوى تقاطع مجالى الدالتين مع استثناء القيم التى تجعل المقام يساوى الصفر فى عملية القسمة.

مثال 1

إذا كانت د : $ح^{+} \longrightarrow ح$ حيث د (س) = ٢ $س^{٢}$ − ٧ س + ٥

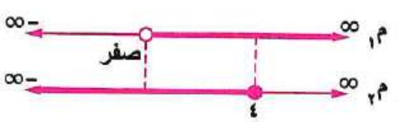
، ر :]− ∞ ، ٤] $\longrightarrow$ ح حيث ر (س) = ٢ س − ٥ أوجد :

1 (د + ر) (س) 2 (د − ر) (س) 3 (د × ر) (س) 4 $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (س)

وعين مجال كل منهم ثم احسب قيمة كل من :

(د + ر) (٣) ، (د − ر) (٠) ، (د × ر) (−٣) ، $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (١)

الحل



مجال د = $م_{1}$ = $ح^{+}$ =]٠ ، ∞[

، مجال ر = $م_{2}$ =]− ∞ ، ٤]

$\therefore$ المجال المشترك للدالتين = $م_{1} \cap م_{2}$ = $ح^{+} \cap$]− ∞ ، ٤] =]٠ ، ٤]

١ (د + ر) (س) = (٢ س^{٢} − ٧ س + ٥) + (٢ س − ٥) = ٢ س^{٢} − ٥ س
، المجال =]٠ ، ٤[

٢ (د − ر) (س) = (٢ س^{٢} − ٧ س + ٥) − (٢ س − ٥) = ٢ س^{٢} − ٩ س + ١٠
، المجال =]٠ ، ٤[

٣ (د × ر) (س) = (٢ س^{٢} − ٧ س + ٥) (٢ س − ٥)
= ٤ س^{٣} − ٢٤ س^{٢} + ٤٥ س − ٢٥ ، المجال =]٠ ، ٤[

٤ $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (س) = $\frac{\text{٢ س}^{٢}\text{ − ٧ س + ٥}}{\text{٢ س − ٥}}$ = $\frac{\text{(٢ س − ٥) (س − ١)}}{\text{٢ س − ٥}}$ = س − ١
، المجال =]٠ ، ٤[− $\left\{\frac{٥}{٢}\right\}$

القيم العددية : • (د + ر) (٣) = ٢ × ٩ − ٥ × ٣ = ٣

• (د − ر) (٠) غير معرفة لأن صفر ∌]٠ ، ٤[

• (د × ر) (−٣) غير معرفة لأن −٣ ∌]٠ ، ٤[

• $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (١) = صفر

مثال ٢

إذا كانت د ، ر دالتين حيث د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س + ١}}$ ، ر (س) = $\frac{\text{س + ١}}{\text{س − ٢}}$ فأوجد :

١ (د + ر) (س) ثم احسب قيمة (د + ر) (٣)

٢ (د − ر) (س) ثم احسب قيمة (د − ر) (٢)

٣ (د × ر) (س) ثم احسب قيمة (د × ر) (٣)

٤ $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (س) ثم احسب قيمة $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (−١) ، $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (١)

الحل

مجال د = م$_{١}$ = ح − {−١} ، مجال ر = م$_{٢}$ = ح − {٢}

∴ المجال المشترك للدالتين د ، ر = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح − {−١ ، ٢}

١ (د + ر) (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س + ١}}$ + $\frac{\text{س + ١}}{\text{س − ٢}}$ = $\frac{\text{س (س − ٢) + (س + ١)}^{٢}}{\text{(س + ١) (س − ٢)}}$

= $\frac{\text{س}^{٢}\text{ − ٢ س + س}^{٢}\text{ + ٢ س + ١}}{\text{(س + ١) (س − ٢)}}$ = $\frac{\text{٢ س}^{٢}\text{ + ١}}{\text{(س + ١) (س − ٢)}}$

، المجال = ح − {−١ ، ٢} ، (د + ر) (٣) = $\frac{\text{٢ × ٩ + ١}}{\text{٤ × ١}}$ = $\frac{١٩}{٤}$

[٢] $(\text{د} - \text{ر})(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١} - \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٢} = \frac{\text{س}(\text{س} - ٢) - (\text{س} + ١)^{٢}}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)}$

$= \frac{-٤\text{س} - ١}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)}$ ، المجال $= \text{ح} - \{-١ ، ٢\}$

، $(\text{د} - \text{ر})(٢)$ غير معرفة لأن $٢ \notin$ مجال $(\text{د} - \text{ر})$

[٣] $(\text{د} \times \text{ر})(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١} \times \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٢} = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$

، المجال $= \text{ح} - \{-١ ، ٢\}$ ، $(\text{د} \times \text{ر})(٣) = \frac{٣}{١} = ٣$

[٤] $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١} \div \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٢} = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١} \times \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ١} = \frac{\text{س}(\text{س} - ٢)}{(\text{س} + ١)^{٢}}$

، المجال $= \text{ح} - \{-١ ، ٢\}$

، $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)(-١)$ غير معرفة لأن $-١ \notin$ مجال $\frac{\text{د}}{\text{ر}}$ ، $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)(١) = \frac{١ \times -١}{٢^{٢}} = \frac{-١}{٤}$

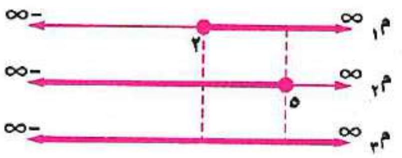
مثال ٣

إذا كانت : $\text{د}_{١}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ٢}$ ، $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \sqrt{٥ - \text{س}}$ ، $\text{د}_{٣}(\text{س}) = \text{س} - ٣$

فأوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية :

[١] $(\text{د}_{١} + \text{د}_{٢})$ [٢] $(\text{د}_{٢} - \text{د}_{٣})$ [٣] $(\text{د}_{١} \times \text{د}_{٢})$ [٤] $\left(\frac{\text{د}_{٢}}{\text{د}_{٣}}\right)$ [٥] $\left(\frac{\text{د}_{٣}}{\text{د}_{١}}\right)$

الحل



مجال $\text{د}_{١} = \text{م}_{١} = [٢ ، \infty[$

، مجال $\text{د}_{٢} = \text{م}_{٢} =]-\infty ، ٥]$

، مجال $\text{د}_{٣} = \text{م}_{٣} = \text{ح}$

[١] $(\text{د}_{١} + \text{د}_{٢})(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ٢} + \sqrt{٥ - \text{س}}$ ، المجال $= [٢ ، ٥]$

[٢] $(\text{د}_{٢} - \text{د}_{٣})(\text{س}) = \sqrt{٥ - \text{س}} + ٣ - \text{س}$ ، المجال $=]-\infty ، ٥]$

[٣] $(\text{د}_{١} \times \text{د}_{٢})(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ٢} \times \sqrt{٥ - \text{س}}$ ، المجال $= [٢ ، ٥]$

[٤] $\left(\frac{\text{د}_{٢}}{\text{د}_{٣}}\right)(\text{س}) = \frac{\sqrt{٥ - \text{س}}}{\text{س} - ٣}$ ، المجال $=]-\infty ، ٥] - \{٣\}$

[٥] $\left(\frac{\text{د}_{٣}}{\text{د}_{١}}\right)(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٣}{\sqrt{\text{س} - ٢}}$ ، المجال $=]٢ ، \infty[$

تركيب الدوال

إذا كانت : د ، ر دالتين وكان مدى الدالة ر تقاطع مجال الدالة د لا يساوى ∅

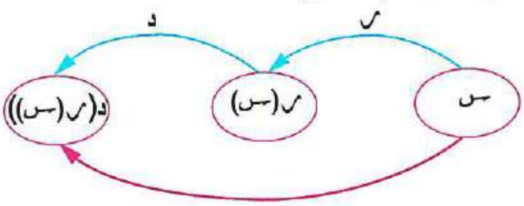
فإن تركيب الدالة د مع الدالة ر ينتج دالة جديدة يرمز لها بالرمز (د ○ ر) وتقرأ [د تركيب ر] أو [د بعد ر]

ويكون (د ○ ر) (س) = د (ر (س)) وتطبق قاعدة الدالة ر أولاً ثم قاعدة الدالة د

حيث : مجال (د ○ ر) يتكون من قيم س التى فى مجال الدالة ر والتى تجعل ر (س) فى مجال الدالة د

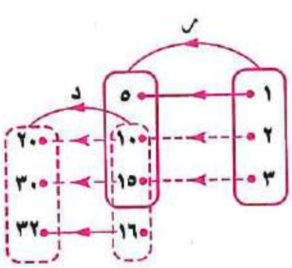
أى أن مجال (د ○ ر) = {س : س ∈ مجال ر ، ر (س) ∈ مجال د}

والشكل التالى يساعدنا فى توضيح تعريف (د ○ ر)



مثال توضيحى

إذا كانت : ر ، د دالتين معرفتين كمجموعة من الأزواج المرتبة كالتالى :



بيان ر = {(١ ، ٥) ، (٢ ، ١٠) ، (٣ ، ١٥)}

، بيان د = {(١٠ ، ٢٠) ، (١٥ ، ٣٠) ، (١٦ ، ٣٢)}

فإن : مجال ر = {١ ، ٢ ، ٣} ، مجال د = {١٠ ، ١٥ ، ١٦}

مجال (د ○ ر) = {س : س ∈ مجال ر ، ر (س) ∈ مجال د}

= مجموعة المساقط الأولى فى بيان ر والتى مساقطها الثانية تظهر كمساقط أولى فى بيان د

∴ مجال (د ○ ر) = {٢ ، ٣} ، مدى (د ○ ر) = {٢٠ ، ٣٠}

، بيان (د ○ ر) = {(٢ ، ٢٠) ، (٣ ، ٣٠)}

مثال ٤

إذا كانت : د (س) = $س^٣$ ، ر (س) = س + ١ **فأوجد :**

[١] (د ○ ر) (١) [٢] (ر ○ د) (١) [٣] (د ○ د) (−١) [٤] (ر ○ ر) (−١)

الحـــل

[١] ∵ (د ○ ر) (س) = د (ر (س)) ∴ (د ○ ر) (١) = د (ر (١))

، ∵ ر (١) = ١ + ١ = ٢ ∴ (د ○ ر) (١) = د (٢) = $٢^٣$ = ٨

٢ ∵ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

، ∵ د (١) = ١^{٣} = ١

∴ (ر ∘ د) (١) = ر (د (١))

∴ (ر ∘ د) (١) = ر (١) = ١ + ١ = ٢

٣ ∵ (د ∘ د) (س) = د (د (س))

، ∵ د (−١) = (−١)^{٣} = −١

∴ (د ∘ د) (−١) = د (د (−١))

∴ (د ∘ د) (−١) = د (−١) = −١

٤ ∵ (ر ∘ ر) (س) = ر (ر (س))

، ∵ ر (−١) = −١ + ١ = ٠

∴ (ر ∘ ر) (−١) = ر (ر (−١))

∴ (ر ∘ ر) (−١) = ر (٠) = ٠ + ١ = ١

مثال ٥

إذا كانت : د (س) = ٢ س + ١ ، ر (س) = س^{٢} − ٣

فأوجد كلًا من تركيبات الدوال الآتية :

١ (د ∘ ر) (س) ٢ (ر ∘ د) (س) ٣ (د ∘ د) (س)

الحل

١ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) وبوضع ر (س) بدلًا من س فى الدالة د

∴ (د ∘ ر) (س) = ٢ ر (س) + ١ وبوضع ر (س) = س^{٢} − ٣

∴ (د ∘ ر) (س) = ٢ (س^{٢} − ٣) + ١ وبتبسيط المقدار الناتج

∴ (د ∘ ر) (س) = ٢ س^{٢} − ٦ + ١ = ٢ س^{٢} − ٥

٢ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) وبوضع د (س) بدلًا من س فى الدالة ر

∴ (ر ∘ د) (س) = (د (س))^{٢} − ٣ وبوضع د (س) = ٢ س + ١

∴ (ر ∘ د) (س) = (٢ س + ١)^{٢} − ٣ وبتبسيط المقدار الناتج

∴ (ر ∘ د) (س) = ٤ س^{٢} + ٤ س + ١ − ٣ = ٤ س^{٢} + ٤ س − ٢

٣ (د ∘ د) (س) = د (د (س))

∴ (د ∘ د) (س) = ٢ (د (س)) + ١

∴ (د ∘ د) (س) = ٢ (٢ س + ١) + ١

∴ (د ∘ د) (س) = ٤ س + ٢ + ١ = ٤ س + ٣

ملاحظة

فى المثال السابق لاحظ أن : (د ∘ ر) (س) ≠ (ر ∘ د) (س)

ومن ذلك يمكن استنتاج أن : د ∘ ر ≠ ر ∘ د

أى أن عملية تركيب دالتين ليست عملية إبدالية.

مثال ٦

إذا كانت د دالة خطية وكانت (د ∘ د) (س) = ٤ س + ٣ **أوجد :** د (س)

الحل

نفرض أن : د (س) = أ س + ب

، ∵ (د ∘ د) (س) = ٤ س + ٣ ∴ د (د (س)) = ٤ س + ٣

∴ د (أ س + ب) = ٤ س + ٣ ∴ أ (أ س + ب) + ب = ٤ س + ٣

∴ أ^{٢} س + أ ب + ب = ٤ س + ٣ ∴ أ^{٢} = ٤ ومنها أ = ± ٢

، أ ب + ب = ٣ ∴ ب = $\frac{٣}{أ + ١}$

، عند أ = ٢ ∴ ب = ١

، عند أ = −٢ ∴ ب = −٣

∴ د (س) = ٢ س + ١ أ، د (س) = −٢ س − ٣

مثال ٧

إذا كانت د (س) = ٢ س + ١ ، (د ∘ ر) (س) = س^{٢} + س − ١ **أوجد :** ر (س)

الحل

∵ (د ∘ ر) (س) = س^{٢} + س − ١ ∴ د (ر (س)) = س^{٢} + س − ١

∴ ٢ ر (س) + ١ = س^{٢} + س − ١ ∴ ٢ ر (س) = س^{٢} + س − ٢

∴ ر (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ س − ١

مثال ٨

إذا كانت د : ح ⟵ ح ، د (س) = ٥ س − ٢ ، ر (س) = { س + ١ ، س > ٣ ؛ ٢ س ، س ≤ ٣ }

أوجد : [١] (د ∘ ر) (٤) [٢] (ر ∘ د) (١)

الحل

[١] (د ∘ ر) (٤) = د (ر (٤)) (لاحظ أن : ر (٤) = ٤ + ١ = ٥)

= د (٥) = ٥ × ٥ − ٢ = ٢٣

[٢] (ر ∘ د) (١) = ر (د (١)) (لاحظ أن : د (١) = ٥ × ١ − ٢ = ٣)

= ر (٣) = ٢ × ٣ = ٦

لتعيين مجال الدالة (د ٥ ر) نتبع الخطوات التالية :

١ نوجد م$_1$ = مجال الدالة ر

٢ نوجد م$_2$ = قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د

٣ نوجد م$_1$ ∩ م$_2$ وهو مجال (د ٥ ر)

مثال ٩

أوجد مجال (د ٥ ر) إذا كان : د (س) = $\frac{٣}{س - ٤}$ ، ر (س) = $\frac{٤}{س + ٢}$

الحـــل

لإيجاد مجال (د ٥ ر) نتبع الخطوات الآتية :

* نوجد مجال ر وليكن م$_1$:

∵ ر (س) = $\frac{٤}{س + ٢}$ ∴ م$_1$ = مجال ر = ح - {-٢}

* نوجد قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال الدالة د ولتكن م$_2$:

∵ د (س) = $\frac{٣}{س - ٤}$ ∴ د (ر (س)) = $\frac{٣}{ر (س) - ٤}$

∴ ر (س) فى مجال د إذا كان : ر (س) ≠ ٤

، عندما ر (س) = ٤ ∴ $\frac{٤}{س + ٢}$ = ٤

∴ س + ٢ = ١ ∴ س = -١

∴ م$_2$ = قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د = ح - {-١}

* نوجد مجال (د ٥ ر) = م$_1$ ∩ م$_2$ = (ح - {-٢}) ∩ (ح - {-١}) = ح - {-٢ ، -١}

ويمكن اختصار الخطوات السابقة فى المخطط التالى :

د [ر (س)] = $\frac{٣}{\frac{٤}{س + ٢} - ٤}$

س + ٢ ≠ ٠

∴ س ≠ -٢

$\frac{٤}{س + ٢}$ - ٤ ≠ ٠

∴ $\frac{٤}{س + ٢}$ ≠ ٤

∴ س + ٢ ≠ ١

∴ س ≠ -١

لاحظ أنه

فى حالة استخدام هذا المخطط لإيجاد المجال نكتب د [ر (س)] كما هى دون تبسيط.

∴ مجال (د ٥ ر) = ح - {-٢ ، -١}

مثال ١٠

إذا كانت : د (س) = √(س − ٢) ، ر (س) = √(٦ − س)

فأوجد مجال كل من الدالتين الآتيتين : [١] د ∘ ر [٢] ر ∘ د

الحــل

[١] (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = √(ر (س) − ٢) = √(√(٦ − س) − ٢)

، ∵ ر (س) = √(٦ − س) وبوضع ٦ − س ≥ ٠ ∴ س ≤ ٦

∴ $م_١$ = مجال ر =]− ∞ ، ٦]

وبوضع ر (س) − ٢ ≥ ٠ ∴ √(٦ − س) − ٢ ≥ ٠

∴ √(٦ − س) ≥ ٢ (بتربيع الطرفين)

∴ ٦ − س ≥ ٤ ∴ س ≤ ٢

∴ $م_٢$ = قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د =]− ∞ ، ٢]

∴ مجال (د ∘ ر) = $م_١$ ∩ $م_٢$ =]− ∞ ، ٦] ∩]− ∞ ، ٢] =]− ∞ ، ٢]

[٢] (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) = √(٦ − د (س)) = √(٦ − √(س − ٢))

، ∵ د (س) = √(س − ٢) وبوضع س − ٢ ≥ ٠

∴ س ≥ ٢ ∴ $م_١$ = مجال د = [٢ ، ∞[

وبوضع ٦ − √(س − ٢) ≥ ٠ ∴ √(س − ٢) ≤ ٦ (بتربيع الطرفين)

∴ س − ٢ ≤ ٣٦ ∴ س ≤ ٣٨

∴ $م_٢$ = قيم س التى تجعل د (س) فى مجال ر =]− ∞ ، ٣٨]

∴ مجال (ر ∘ د) = $م_١$ ∩ $م_٢$ = [٢ ، ∞[∩]− ∞ ، ٣٨] = [٢ ، ٣٨]

حل آخر لإيجاد مجال (ر ∘ د) :

∵ مجال د = [٢ ، ∞[، مجال ر =]− ∞ ، ٦]

، ∵ مجال (ر ∘ د) = {س : س ∈ مجال د ، د (س) ∈ مجال ر}

∵ س ∈ مجال د ∴ س ∈ [٢ ، ∞[

∵ د (س) ∈ مجال ر ∴ د (س) ∈]− ∞ ، ٦]

∴ √(س − ٢) ∈]−∞ ، ٦]　　∴ √(س − ٢) ≤ ٦

∴ س − ٢ ≤ ٣٦　　∴ س ≤ ٣٨

∴ س ∈]−∞ ، ٣٨]

أى أن مجال (ر ○ د) = [٢ ، ∞[∩]−∞ ، ٣٨] = [٢ ، ٣٨]

مثال ١١

إذا كانت : د (س) = √(س − ١) ، ر (س) = س^٢ − ٣

أوجد (د ○ ر) (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال ثم أوجد (د ○ ر) (٢)

الحـــل

(د ○ ر) (س) = د (ر (س)) = √(ر (س) − ١) = √(س^٢ − ٣ − ١) = √(س^٢ − ٤)

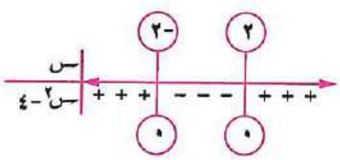
∵ مجال د = [١ ، ∞[، مجال ر = ح

، ∵ مجال (د ○ ر) = {س : س ∈ مجال ر ، ر (س) ∈ مجال د}

∵ س ∈ مجال ر　　∴ س ∈ ح

، ∵ ر (س) ∈ مجال د　　∴ ر (س) ∈ [١ ، ∞[

∴ س^٢ − ٣ ∈ [١ ، ∞[　　∴ س^٢ − ٣ ≥ ١



∴ س^٢ − ٤ ≥ صفر

∴ (س − ٢) (س + ٢) ≥ صفر

∴ س ≥ ٢ ، س ≤ −٢　　∴ س ∈ ح −]−٢ ، ٢[

∴ مجال (د ○ ر) = ح ∩ (ح −]−٢ ، ٢[) = ح −]−٢ ، ٢[

، (د ○ ر) (٢) = √(٤ − ٤) = صفر

تمارين 2 على العمليات على الدوال - تركيب دالتين

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : د (س) = $\sqrt[3]{\text{س} - ١}$ ، ر (س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$ فإن مجال (د − ر) هو ....

(أ) [−١ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[(جـ) ح (د)]−∞ ، ١]

(٢) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{\text{س} - ١} + \sqrt{\text{س} + ٢}$ هو ....

(أ) [−٢ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[(جـ)]١ ، ∞[(د)]−٢ ، ∞[

(٣) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{\text{س} + ٢} - \sqrt{٣ - \text{س}}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − [−٢ ، ٣] (جـ) [−٢ ، ٣] (د)]−٢ ، ٣[

(٤) إذا كانت د دالة حيث بيان د = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨)}

، ر دالة حيث بيان ر = {(١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧)} فإن : د + ر = ...

(أ) {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧)}

(ب) {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) ، (٥ ، ٧)}

(جـ) {(١ ، ٥) ، (٣ ، ١١)}

(د) {(١ ، ٥) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ١١) ، (٤ ، ٨) ، (٥ ، ٧)}

(٥) إذا كانت : د ، ر : ح ← ح حيث د (س) = ٣ س + ١

، وكان (د + ر) (س) = س^2 + ٢ س − ١ فإن : ر (−١) = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) صفر (د) ٢

(٦) إذا كانت د : ح^+ ← ح حيث د (س) = س^2 − ٧ ، ر : [−٣ ، ٢] ← ح

حيث ر (س) = س^2 + ٣ فإن : (د − ر) (−٥) = ...

(أ) −٥ (ب) −١٠ (جـ) −٢٠ (د) غير معرفة.

(٧) مجال الدالة (د . ر) حيث د (س) = س^2 − ٤ ، ر (س) = س + ١ هو ....

(أ) ح − {٢ ، −٢ ، −١} (ب) {٢ ، −٢ ، −١}

(جـ) ح (د) ح − {٤ ، ١}

⑧ إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س}$ ، ر (س) = $\sqrt{س}$ فإن مجال (د × ر) = ...

(أ) ح − {٠} (ب) ح (ج) ح⁺ (د)]٠ ، ∞[

⑨ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٤} - \sqrt[٣]{س - ٢}$ هو ....

(أ)]٤ ، ∞[(ب) [٢ ، ∞[(ج) ح (د) [٤ ، ∞[

⑩ إذا كان د : ح ⟵ ح حيث د (س) = س² − س ، ر : ح ⟵ ح حيث ر (س) = ٣ س − ٢

فإن : (د × ر − ٦ ر) (٢) = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٤٠ (ج) ١٦ (د) −١٦

⑪ إذا كانت : د (س) = ٢ س + ١ ، ر (س) = − س − ٢

وكانت : هـ (س) = د (س) + ر (س) ، ك (س) = د (س) − ر (س)

فإن : هـ (٢) × ك (١) = ...

(أ) ٣ (ب) ١ (ج) ٦ (د) صفر

⑫ إذا كانت د : ح⁺ ⟵ ح حيث د (س) = س − ٥ ، ر : [−١ ، ٥] ⟵ ح

حيث ر (س) = س − ٢ فإن : $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (١) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٨

⑬ إذا كانت : د ، ر دالتين حقيقيتين حيث د (س) = $\frac{س - ٢}{س^{٢} - ٣س + ٢}$ ، ر (س) = س − ٣

فإن : $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (٣) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (ج) صفر (د) غير معرفة.

⑭ إذا كانت د ، ر دالتين كثيرتي حدود وكان مجال الدالة $\left(\frac{د}{ر}\right)$ هو ح − {٣} ومجال الدالة $\left(\frac{ر}{د}\right)$ هو ح − {٢} فإن مجال الدالة (د . ر) هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٣} (ج) ح − {٢} (د) ح − {٢ ، ٣}

⑮ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س - ٥}{\sqrt{٢س - ٣}}$ هو ....

(أ) ح − {٥} (ب)]$\frac{٣}{٢}$ ، ∞[(ج) [$\frac{٣}{٢}$ ، ∞[− {٥} (د) ح − {$\frac{٣}{٢}$}

⑯ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٣}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٣} (ج) [٢ ، ∞[(د) [٢ ، ∞[− {٣}

(١٧) إذا كانت د : $ح^+$ ← ح حيث د (س) = س − ٥ ، ر : [−١ ، ٥] ← ح

حيث ر (س) = س − ٢ فإن مجال $\left(\frac{د}{ر}\right)$ هو ....

(أ)]٠ ، ٥] (ب)]٠ ، ٥] − {٢} (جـ) [−١ ، ∞[(د) ح

(١٨) إذا كانت $د_١$: [−٢ ، ٣] ← ح حيث $د_١$ (س) = س ، $د_٢$:]٠ ، ٤] ← ح

، حيث $د_٢$ (س) = $س^٢$ فإن : مجال $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$ = ...

(أ) [−٢ ، ٤] (ب) [−٢ ، ٤] − {٠} (جـ)]٠ ، ٣] (د) [٠ ، ٣]

(١٩) مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{س + ١}{\sqrt[٣]{س - ١}}$ هو ....

(أ) ح − {١} (ب) ح − {−١} (جـ) [−١ ، ∞[(د) ح

(٢٠) إذا كان : د (س) = $\sqrt[٤]{س - ٣}$ ، ر (س) = $\sqrt[٣]{٣ - س}$ فإن مجال $\left(\frac{د}{ر}\right)$ هو ....

(أ)]٣ ، ∞[(ب) [٣ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٣[(د)]−∞ ، ٣]

(٢١) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٤}}{(س - ٣)(س - ٥)}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٣ ، ٥} (جـ) [٤ ، ∞[(د) [٤ ، ∞[− {٥}

(٢٢) مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٣}}{\sqrt{٥ - س}}$ هو ....

(أ) [٣ ، ٥[(ب) ح − {٣ ، ٥} (جـ) [٣ ، ٥] (د) {−٣ ، −٥}

(٢٣) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{\frac{٣ - س}{٥ - س}}$ هو ....

(أ) [٣ ، ٥[(ب) ح − [٣ ، ٥[(جـ) [٣ ، ٥] (د) ح − [٣ ، ٥]

(٢٤) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س + ٥}$ ، ر (س) = $س^٢$ فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٧ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٩

(٢٥) إذا كان : د (١) = ٤ ، ر (٤) = ٧ فإن : (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١١

(٢٦) إذا كانت د : [−٢ ، ٣] ← ح حيث د (س) = س + ١ ، ر : [٠ ، ٢] ← ح

حيث ر (س) = $س^٢$ فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٤ (ب) −١ (جـ) ٥ (د) غير معرفة

(٢٧) إذا كانت : د (س) = ٥ س + ٤ ، ر (س) = ٢ − س

فإن : (د ∘ ر) (−٢) + (ر ∘ د) (٥) = ...

(أ) ٢٤ (ب) −٢٧ (جـ) ٤٩ (د) −٣

(٢٨) إذا كان : د (س) = $\sqrt[3]{س}$ ، ر (س) = س^{٣} فإن : (د ∘ ر) (س) = ...

(أ) س (ب) س^{٣} (ج) $\sqrt[3]{س}$ (د) |س|

(٢٩) إذا كان : د (س) = س − ٣ ، ر (س) = س^{٢} فإن : (د ∘ ر) (س) = ...

(أ) (س − ٣)^{٢} (ب) س^{٢} − ٣ (ج) س^{٢} + ٣ (د) $\sqrt{س - ٣}$

(٣٠) إذا كانت : د (س) = $\frac{٣س + ٢}{٢س - ٣}$ فإن : (د ∘ د) (س) = ...

(أ) س (ب) − س (ج) د (س) (د) − د (س)

(٣١) إذا كانت : د (س) = ٢ س + ٥ ، وكانت ر (س) = س^{٢} فإن : د (ر (س)) = ...

(أ) (٢ س + ٥)^{٢} (ب) ٢ س^{٢} + ٥ (ج) (٢ س^{٢} + ٥)^{٢} (د) ٢ س^{٢} + ١٠

(٣٢) إذا كان : د (س) = ٣ س + ٢ ، ر (س) = ٢ س + ك

وكان (د ∘ ر) (س) = (ر ∘ د) (س) فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣٣) إذا كانت : د (س) = س + ١ ، ر (س) = س^{٢} − ١

فإن مجموعة حل المعادلة ر (د (س)) = صفر هي ....

(أ) {٠ ، ٢} (ب) {١ ، −١} (ج) {٠ ، −٢} (د) {٢ ، −٢}

(٣٤) إذا كانت : د (س) = أ س + ٣ ، ر (س) = ٢ س + أ وكان (د ∘ ر) (٢) = ١٥

فإن أ ∈ ....

(أ) {٢ ، ٦} (ب) {−٢ ، −٦} (ج) {−٦ ، ٢} (د) {−٢ ، ٦}

(٣٥) إذا كانت : د (س) = ٢ س ، ر (س) = $\frac{١}{٢ س}$ ، كان د (ر (س)) = ٦

فإن : س = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) ٦ (ج) ٤ (د) $\frac{١}{١٢}$

(٣٦) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س}$ ، ر (س) = س^{٢} − ١ فإن مجال (د ∘ ر) = ...

(أ) {٠ ، ١ ، −١} (ب) ح − {٠ ، ١ ، −١} (ج) ح − {١ ، −١} (د) [−١ ، ١]

(٣٧) إذا كان : د (س) = $\sqrt{س}$ ، ر (س) = س^{٢} فإن : مجال (ر ∘ د) = ...

(أ)]−∞ ، ٠] (ب) [٠ ، ∞[(ج) ح$^{+}$ (د) ح

(٣٨) إذا كان : د (س) = $\sqrt{س}$ ، ر (س) = س^{٢} فإن : مجال (د ∘ ر) = ...

(أ)]−∞ ، ٠] (ب) [٠ ، ∞[(ج) ح$^{+}$ (د) ح

(٣٩) مجال الدالة (د ∘ ر) حيث : د (س) = $\sqrt{س - ٢}$ ، ر (س) = $\sqrt{٦ - س}$ هو ....

(أ) ح (ب) [٢ ، ∞[(ج)]−∞ ، ٢] (د)]−∞ ، ٢[

(٤٠) إذا كانت العلاقة بين س ، د (س) ، ر (س) كما بالجدول المقابل

س	د (س)	س	ر (س)
٣−	٤	٤−	٣
٢−	٣	١−	١
٣	١	١	٤−
٦	١−	٤	٧−

فإن : ر (د (٦)) = ...

(أ) ٣   (ب) ١

(جـ) ٤−   (د) ٧−

(٤١) إذا كان الجدول المقابل يمثل بيان كل من الدالتين د ، ر

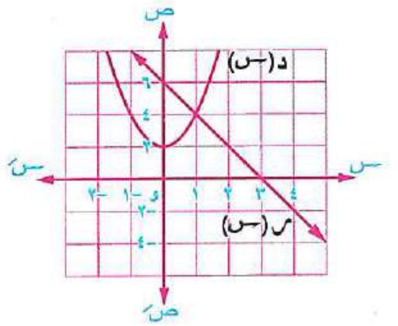
س	١	٢	٣	٤
د (س)	٣	١	٤	٢
ر (س)	٤	٣	٢	١

فإن (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) ١   (ب) ٢

(جـ) ٣   (د) ٤

(٤٢) الشكل المقابل يوضح منحنى الدالتين د ، ر



فإن : (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) ٥   (ب) ٢−

(جـ) ٤−   (د) ٦

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت د دالة حيث : د (س) = $س^{٢}$ − س − ١٢ ومجالها [−٤ ، ٨] ، ر دالة حيث ر (س) = س − ٤ ومجالها [−٧ ، ٤] **فأوجد كلاً من الدوال الآتية مع تعيين مجال كل منها :**

(١) (د + ر) (س) | (٢) (د − ر) (س) | (٣) (د . ر) (س)

(٤) $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (س) | (٥) $\left(\frac{ر}{د}\right)$ (س)

٢ إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث : د (س) = $س^{٢}$ − ٤ ، ر (س) = $\sqrt{س - ١}$

أوجد : (١) مجال كل من الدوال الآتية : (د + ر) ، (د . ر) ، $\left(\frac{د}{ر}\right)$ ، $\left(\frac{ر}{د}\right)$

(٢) القيمة العددية − إن أمكن − لكل من :

(د + ر) (٥) ، (د . ر) (٢) ، $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (٣) ، $\left(\frac{ر}{د}\right)$ (−٢)

٣ إذا كان : د (س) = $س^{٢}$ − ٤ س ، ر (س) = $\sqrt{س + ٢}$ ، ع (س) = $\sqrt{٤ - س}$

أولًا : أوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية :

(١) (د + ر)   (٢) (ر − ع)   (٣) (د . ع)   (٤) $\left(\frac{ع}{د}\right)$

ثانيًا : احسب القيمة العددية - إن أمكن - لكل من :

(١) (ر − ع) (١) (٢) (د . ع) (٥) (٣) $\left(\frac{\text{ع}}{\text{د}}\right)$ (٣)

---

٤ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

(١) د (س) = $\frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س} + 2}$

(٢) د (س) = $\frac{\text{س} - 1}{\text{س}^2 - 1} + \frac{1}{\text{س} + 1}$

(٣) د (س) = $\frac{\text{س}}{\sqrt{1 - \text{س}}}$

(٤) د (س) = $\frac{3\,\text{س}}{\sqrt{2\,\text{س} - 1}}$

(٥) د (س) = $\sqrt[3]{\text{س} - 4} + \sqrt{\text{س} - 2}$

(٦) د (س) = $\frac{\sqrt{\text{س} - 4}}{\text{س} - 6}$

(٧) د (س) = $\frac{\sqrt{\text{س} - 3}}{\text{س}^2 - 4}$

(٨) د (س) = $\frac{\sqrt{\text{س} - 3}}{\sqrt{\text{س} - 5}}$

---

٥ إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث : د (س) = $\begin{cases} \text{س} - 2 & \text{، س} \geq 2 \\ -\text{س} + 2 & \text{، س} < 2 \end{cases}$ ، ر (س) = س

فأوجد كلاً من : (١) (د . ر) (س) (٢) $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (س) (٣) $\left(\frac{\text{ر}}{\text{د}}\right)$ (س)

مع تعيين مجال كل دالة.

---

٦ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

(١) د (س) = $\sqrt{\frac{\text{س} - 3}{\text{س} - 5}}$

(٢) د (س) = $\frac{5\,\text{س} + 2}{\sqrt{\text{س} - 2} - 1}$

(٣) د (س) = $\frac{\sqrt{\text{س} + 2}}{\text{س}^2 - 6\,\text{س} - 7}$

(٤) د (س) = $\frac{\frac{3}{\text{س} - 1}}{\frac{1}{\text{س} - 2} + 4}$

---

٧ إذا كان : د (س) = ٣ س + ١ ، ر (س) = $\text{س}^2 - 5$ ، هـ (س) = س^3

أوجد : (١) (د ∘ ر) (٢) (٢) (ر ∘ د) (−٣)

(٣) (ر ∘ هـ) (١) (٤) (هـ ∘ د) (−٢)

«−٢ ، ٥٩ ، −٤ ، −١٢٥»

---

٨ إذا كان : د (س) = $\frac{1}{\text{س}}$ ، ر (س) = س + ٣

أوجد : (١) (د ∘ ر) (س) (٢) (ر ∘ د) (س) وحدد مجال كل منهما.

---

٩ إذا كان : د (س) = $\text{س}^2 + 6$ ، ر (س) = ٣ س

(١) **أوجد :** (د ∘ ر) (٣)

(٢) **حدد :** قيم س التى تجعل (د ∘ ر) (س) = ٤٢

«٨٧ ، ± ٢»

١٠ إذا كان : د (سـ) = سـ^{٢} − ٣ ، ر (سـ) = $\sqrt{\text{سـ} - ٢}$

أوجد (د ○ ر) (سـ) في أبسط صورة محددًا المجال ثم أوجد (د ○ ر) (٣) «−٢»

---

١١ إذا كان : د (سـ) = $\sqrt{\text{سـ} + ١}$ ، ر (سـ) = $\frac{٢}{\text{سـ} - ٣}$ فأوجد مجال (د ○ ر)

---

١٢ إذا كان : د (سـ) = $\sqrt{\text{سـ} - ٢}$ ، ر (سـ) = $\sqrt{٤ - \text{سـ}}$

فأوجد كلًا من الدالتين الآتيتين موضحًا مجالها : (١) د ○ ر (٢) ر ○ د

---

١٣ إذا كان : د (سـ) = $\sqrt{\text{سـ} - ١}$ ، ر (سـ) = $\sqrt{\text{سـ}^{٢} - ٤}$

فأوجد مجال كل من الدالتين الآتيتين : (١) د ○ ر (٢) ر ○ د

---

١٤ إذا كان : ع (سـ) = $\sqrt{\text{سـ}^{٢} - ٤}$ فأوجد الدالتين د ، ر بحيث يكون : ع (سـ) = (د ○ ر) (سـ)

---

١٥ إذا كانت : د دالة خطية وكان (د ○ د) (سـ) = ١٦ سـ + ١٥ **أوجد :** د (سـ)

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كانت : د (سـ) = $\sqrt{\text{سـ} - ١}$ ، ر (سـ) = $\sqrt{١ - \text{سـ}}$ فإن مجال (د + ر) هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب)]−∞ ، ١] (جـ) [−١ ، ∞[(د) {١}

(٢) إذا كانت : د (سـ) = $\begin{cases} -\text{سـ} + ٢ &، \text{سـ} > ٠ \\ ٣\,\text{سـ} &، \text{سـ} \leq ٠ \end{cases}$ ، ر (سـ) = $\begin{cases} ٢\,\text{سـ} - ١ &، \text{سـ} \geq ١ \\ \text{سـ} + ٢ &، \text{سـ} < ١ \end{cases}$

فإن : (د + ر) (سـ) = ... حيث ٠ < سـ < ١

(أ) ٤ سـ + ٢ (ب) سـ + ١ (جـ) ٥ سـ − ١ (د) ٤

(٣) إذا كانت : د (سـ) = $\begin{cases} \text{سـ}^{٢} + ١ &، \text{سـ} < ٠ \\ ٣\,\text{سـ} + ١ &، \text{سـ} \geq ٠ \end{cases}$ ، ر (سـ) = $\begin{cases} ٤\,\text{سـ} - ٢ &، \text{سـ} < ٢ \\ \text{سـ}^{٢} + ٢ &، \text{سـ} \geq ٢ \end{cases}$

فإن : (ر ○ د) (−١) = ...

(أ) ٣٧ (ب) −١٧ (جـ) ١٠ (د) ٦

(٤) إذا كانت : د (سـ) = سـ^{٢} ، ر (سـ) = ٢ سـ + ٣

فإن مجموعة حل المعادلة د (ر (سـ)) = د (سـ) هي ....

(أ) {١ ، ٣} (ب) {−٣ ، ١} (جـ) {−١ ، −٣} (د) {−١ ، ٣}

(٥) إذا كانت : د (س) = ٢ س + ١ وكان : (د ∘ ر) (س) = ٣ س + ٢

فإن : ر (س) = ...

(أ) س + ١ (ب) ٥ س + ٣ (جـ) ٣/٢ س + ١/٢ (د) ٢ س + ٣

(٦) إذا كانت د : ح ⟵ ح وكان : د (س) = ٢ س − ٣ ، (ر ∘ د) (س) = س + ٢

فإن : ر (س) = ...

(أ) ٢ س^٢ + س − ٦ (ب) (س + ٢)/(٢ س − ٣) (جـ) (س + ٣)/٢ (د) (س + ٧)/٢

(٧) إذا كانت : د (س) = س + ٢ ، ر (س) = (س − ك)/(٣ س − ١)

وكان : (ر ∘ د) (٠) = (د ∘ ر) (١) فإن : ك = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ١ (د) ٧/٢

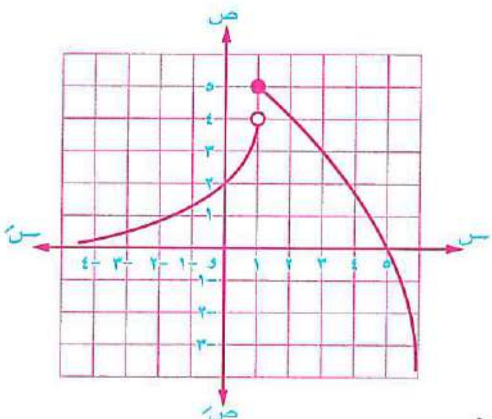
(٨) الشكل المقابل يمثل

منحنى ص = د (س)

فإن : (د ∘ د ∘ د) (١) = ...

(أ) −٥ (ب) −١

(جـ) ١ (د) ٢



(٩) إذا كانت د : ط ⟵ ط حيث د (س) = ٢ س

، ت : ط ⟵ ط حيث ت (س) = { س/٢ ، س زوجى ؛ (س + ١)/٢ ، س فردى }

فإن : (د ∘ ت) (٣) − (د ∘ ت) (٨) = ...

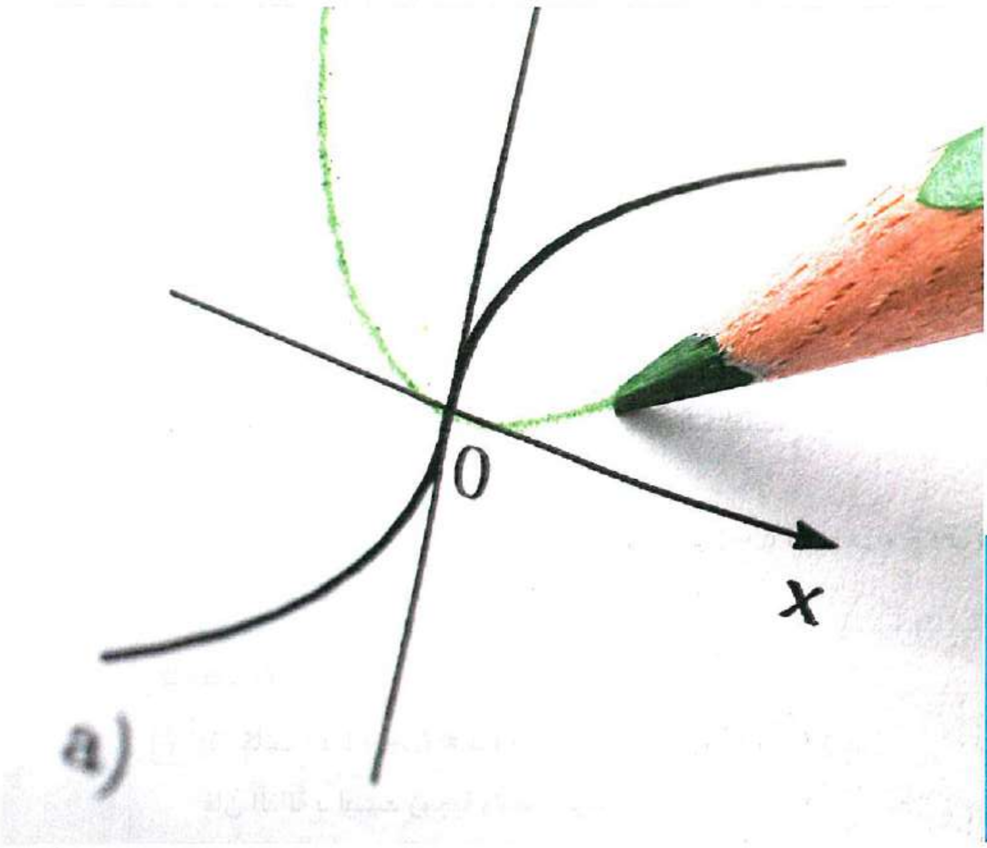
(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) −٤ (د) −٥

---

٢ إذا كانت د : ح − {٠} ⟵ ح وكان د (س) = ١/س أوجد :

(١) (د ∘ د) (س) (٢) (د ∘ د ∘ د) (س)

(٣) (د ∘ د ∘ د ∘ ..... إلى ن من المرات) (س)



الدرس

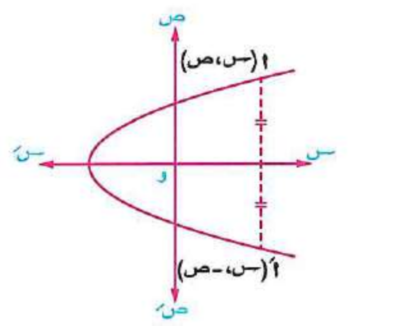
3

بعض خواص الدوال (الدوال الزوجية والفردية - الدوال الأحادية)

تمهيد

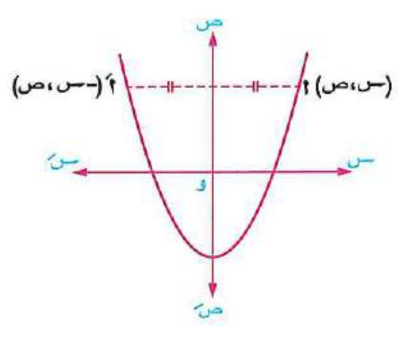
١ التماثل حول محور السينات

يكون الشكل البيانى متماثلًا حول محور السينات إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البيانى توجد نقطة أخرى أَ (س ، – ص) تقع على الشكل البيانى حيث أَ صورة أ بالانعكاس فى محور السينات.



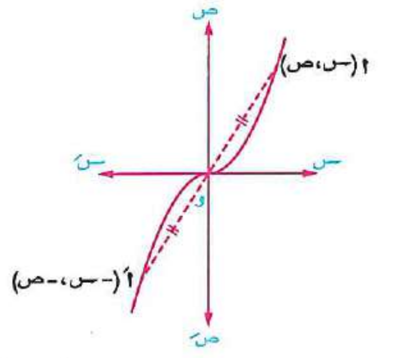
٢ التماثل حول محور الصادات

يكون الشكل البيانى متماثلًا حول محور الصادات إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البيانى توجد نقطة أخرى أَ (– س ، ص) تقع على الشكل البيانى حيث أَ صورة أ بالانعكاس فى محور الصادات.



٣ التماثل حول نقطة الأصل «و»

يكون الشكل البيانى متماثلًا حول نقطة الأصل (و) إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البيانى توجد نقطة أخرى أَ (– س ، – ص) تقع على الشكل البيانى حيث أَ صورة أ بالانعكاس فى نقطة الأصل (و)



الدالة الزوجية والدالة الفردية

• **الدالة الزوجية :**

يقال إن الدالة د زوجية إذا كانت : د (– س) = د (س) لكل س ، – س فى مجال الدالة د ويكون الشكل البيانى للدالة الزوجية متماثلًا حول محور الصادات.

• **الدالة الفردية :**

يقال إن الدالة د فردية إذا كانت : د (– س) = – د (س) لكل س ، – س فى مجال الدالة د ويكون الشكل البيانى للدالة الفردية متماثلًا حول نقطة الأصل.

ملاحظات

١ إذا كانت : د (– س) ≠ د (س) ، د (– س) ≠ – د (س)
فإن الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

٢ عند بحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط انتماء كل من العنصرين س ، – س إلى مجال الدالة وإذا لم يتحقق الشرط كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون الحاجة لإيجاد د (– س)

٣ إذا كانت الدالة مجالها ح – {أ} ، أ ≠ صفر فإن الدالة ليست زوجية وليست فردية بدون بحثها.

٤ إذا كانت الدالة زوجية ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (أ ، ب) فإن منحنى الدالة أيضًا يمر بالنقطة (– أ ، ب)

٥ إذا كانت الدالة فردية ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (أ ، ب) فإن منحنى الدالة أيضًا يمر بالنقطة (– أ ، – ب)

٦ الدالة الصفرية د : د (س) = ٠ هى زوجية وفردية فى نفس الوقت.

مثال ١

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (س) = س^{٢} | ٢ د (س) = ٢ س^{٣}

٣ د (س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$ | ٤ د (س) = جتا س

٥ د (س) = س^{٢} – ٥ ، س ∈ [–٢ ، ٢]

الحل

١ ∵ د كثيرة حدود ∴ مجال د = ح

∴ لكل س ، – س ∈ ح يكون : د (– س) = (– س)^{٢} = س^{٢} = د (س) ∴ د دالة زوجية.

٢ ∵ د كثيرة حدود ∴ مجال د = ح

∴ لكل س ، – س ∈ ح يكون : د (– س) = ٢ (– س)^{٣} = ٢ (– س^{٣}) = –٢ س^{٣} = – د (س)

∴ د دالة فردية.

٣ ∵ مجال د هو مجموعة قيم س التى تجعل س − ١ ≥ ٠ أى : س ≥ ١

∴ مجال د = [١ ، ∞[

∴ لكل س ∈ [١ ، ∞[لا يوجد − س ∈ [١ ، ∞[

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

لاحظ أن

٣ ∈ [١ ، ∞[

ولكن −٣ ∉ [١ ، ∞[

٤ مجال الدالة د : د (س) = جتا س هو ح

∴ لكل س ، − س ∈ ح يكون : د (− س) = جتا (− س) = جتا س = د (س)

∴ د دالة زوجية.

تذكر أن

جا (− س) = − جا س

جتا (− س) = جتا س

ظا (− س) = − ظا س

٥ ∵ −٢ ∈ مجال الدالة ، ٢ ∉ مجال الدالة ∴ د ليست زوجية وليست فردية.

ملاحظتان

١ تُسمى الدالة د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ سⁿ حيث أ ≠ ٠ ، ن ∈ ص₊ دالة القوى وتكون الدالة د زوجية إذا كان ن عددًا زوجيًا. ، فردية إذا كان ن عددًا فرديًا.

٢ د (س) = جتا س ، د (س) = قا س دوال زوجية

بينما د (س) = جا س ، د (س) = قتا س ، د (س) = ظا س ، د (س) = ظتا س دوالًا فردية.

مثال ٢

إذا كانت د دالة زوجية حيث : د (س) = أ س^{٢} + ب س + ٥ وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (١ ، ٦)

فأوجد : قيمة كل من أ ، ب

الحل

∵ الدالة زوجية ومنحناها يمر بالنقطة (١ ، ٦) ∴ المنحنى يمر بالنقطة (−١ ، ٦)

عند النقطة (١ ، ٦) ∴ ٦ = أ + ب + ٥ (١)

، عند النقطة (−١ ، ٦) ∴ ٦ = أ − ب + ٥ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ١٢ = ٢ أ + ١٠ ∴ ٢ أ = ٢ ∴ أ = ١

، بالتعويض فى (١) : ∴ ٦ = ١ + ب + ٥ ∴ ب = صفر

خواص هامة

إذا كان كل من د$_{١}$ ، د$_{٢}$ دالة زوجية وكل من ر$_{١}$ ، ر$_{٢}$ دالة فردية فإن :

١ د$_{١}$ ± د$_{٢}$ دالة زوجية.

٢ ر$_{١}$ ± ر$_{٢}$ دالة فردية.

٣ د$_{١}$ ± ر$_{١}$ دالة ليست زوجية وليست فردية.

٤ كل من (د$_{١}$ × د$_{٢}$) ، $\left(\frac{د_{١}}{د_{٢}}\right)$ دالة زوجية.

٥ كل من (ر$_{١}$ × ر$_{٢}$) ، $\left(\frac{ر_{١}}{ر_{٢}}\right)$ دالة زوجية.

٦ كل من (د$_{١}$ × ر$_{١}$) ، $\left(\frac{د_{١}}{ر_{١}}\right)$ دالة فردية.

مثال ٣

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

[١] د (س) = س^{٢} + جتا س [٢] د (س) = س^{٣} + جا س [٣] د (س) = ٣ س^{٤} ظا س

الحـــل

[١] ∵ د (− س) = (− س)^{٢} + جتا (− س) = س^{٢} + جتا س = د (س)

∴ د دالة زوجية.

حل آخر : بفرض أن : د (س) = د$_{١}$ (س) + د$_{٢}$ (س)

حيث د$_{١}$ (س) = س^{٢} ، د$_{٢}$ (س) = جتا س دالتان زوجيتان.

∴ د$_{١}$ + د$_{٢}$ دالة زوجية. ∴ د دالة زوجية.

[٢] ∵ د (− س) = (− س)^{٣} + جا (− س) = − س^{٣} − جا س

= − (س^{٣} + جا س) = − د (س)

∴ د دالة فردية.

لاحظ أن : الدالة الناتجة من جمع دالتين فرديتين هى دالة فردية.

[٣] ∵ د (− س) = ٣ (− س)^{٤} ظا (− س) = ٣ س^{٤} (− ظا س)

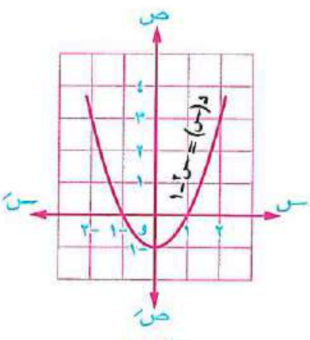
= −٣ س^{٤} ظا س = − د (س)

∴ د دالة فردية.

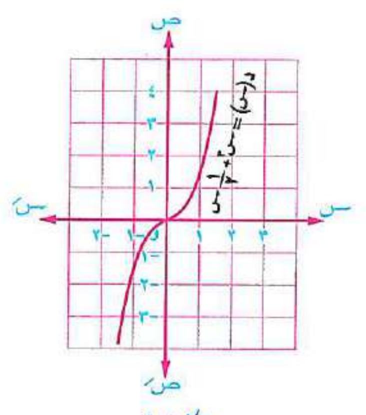
لاحظ أن : الدالة الناتجة من ضرب دالتين إحداهما زوجية والأخرى فردية هى دالة فردية.

مثال ٤

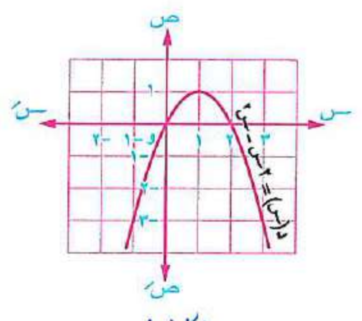
كل من الأشكال الآتية يوضح الشكل البيانى للدالة د ، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أم فردية أم غير ذلك وحقق إجابتك جبريًا :



شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)

الحـــل

شكل (١) : $د(س) = س^{٢} - ١$

$\because$ مجال الدالة د = ح والمنحنى متماثل حول محور الصادات $\therefore$ الدالة د دالة زوجية.

التحقق الجبرى : $\because$ لكل س ، $-س \in ح$

$د(-س) = (-س)^{٢} - ١ = س^{٢} - ١ = د(س)$ $\therefore$ الدالة د دالة زوجية.

شكل (٢) : $د(س) = س^{٣} + \frac{١}{٢} س$

$\because$ مجال الدالة د = ح والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل

$\therefore$ الدالة د دالة فردية.

التحقق الجبرى : $\because$ لكل س ، $-س \in ح$

$د(-س) = (-س)^{٣} + \frac{١}{٢}(-س) = -س^{٣} - \frac{١}{٢} س = -\left(س^{٣} + \frac{١}{٢} س\right) = -د(س)$

$\therefore$ الدالة د دالة فردية.

شكل (٣) : $د(س) = ٢ س - س^{٢}$

$\because$ مجال الدالة د = ح والمنحنى ليس متماثلًا حول محور الصادات وليس متماثلًا حول نقطة الأصل.

$\therefore$ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

التحقق الجبرى : لكل س ، $-س \in ح$

$د(-س) = ٢(-س) - (-س)^{٢} = -٢ س - س^{٢} = -(٢ س + س^{٢})$

$\therefore$ $د(-س) \neq د(س)$ ، $د(-س) \neq -د(س)$

$\therefore$ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

مثال ٥

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

[١] $د(س) = ٣ س^{٤} - ٥ س^{٢} + ١$

[٢] $د(س) = س^{٣} + ٢ س - ٥$

[٣] $د(س) = \frac{س - جا ٢ س}{١ + س^{٢}}$

[٤] $د(س) = \frac{س - ظا س}{س^{٢} + س}$

الحـــل

[١] $\because$ $د(-س) = ٣(-س)^{٤} - ٥(-س)^{٢} + ١ = ٣ س^{٤} - ٥ س^{٢} + ١ = د(س)$

$\therefore$ الدالة د زوجية.

[٢] ∵ $\text{د}(-\text{س}) = (-\text{س})^{٣} + ٢(-\text{س}) - ٥ = -\text{س}^{٣} - ٢\text{س} - ٥ = -(\text{س}^{٣} + ٢\text{س} + ٥)$

∴ $\text{د}(-\text{س}) \neq \text{د}(\text{س})$ ، $\text{د}(-\text{س}) \neq -\text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

[٣] ∵ $\text{د}(-\text{س}) = \frac{(-\text{س}) - \text{جا}\,٣(-\text{س})}{١ + (-\text{س})^{٢}} = \frac{(-\text{س}) - (-\text{جا}\,٣\text{س})}{١ + \text{س}^{٢}} = \frac{-(\text{س} - \text{جا}\,٣\text{س})}{١ + \text{س}^{٢}} = -\text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د فردية.

[٤] ∵ $\text{د}(-\text{س}) = \frac{(-\text{س}) - \text{ظا}(-\text{س})}{(-\text{س})^{٣} + (-\text{س})} = \frac{-\text{س} - (-\text{ظا}\,\text{س})}{-\text{س}^{٣} - \text{س}} = \frac{-\text{س} + \text{ظا}\,\text{س}}{-\text{س}^{٣} - \text{س}}$

$= \frac{-(\text{س} - \text{ظا}\,\text{س})}{-(\text{س}^{٣} + \text{س})} = \frac{\text{س} - \text{ظا}\,\text{س}}{\text{س}^{٣} + \text{س}} = \text{د}(\text{س})$ ∴ الدالة د زوجية.

مثال ٦

ابحث نوع كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

[١] $\text{د}(\text{س}) = \left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٣} + \left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٣}$

[٢] $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -\frac{١}{\text{س}} & ،\ \text{س} < ٠ \\ \frac{١}{\text{س}} & ،\ \text{س} > ٠ \end{cases}$

الحل

[١] ∵ $\text{د}(-\text{س}) = \left(-\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٣} + \left(-\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٣}$

$= \left[-\left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)\right]^{٣} + \left[-\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)\right]^{٣} = -\left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٣} - \left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٣}$

$= -\left[\left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٣} + \left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٣}\right] = -\text{د}(\text{س})$ ∴ الدالة د فردية.

[٢] ∵ $\text{د}(-\text{س}) = \begin{cases} -\frac{١}{(-\text{س})} & ،\ (-\text{س}) < ٠ \\ \frac{١}{(-\text{س})} & ،\ (-\text{س}) > ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{١}{\text{س}} & ،\ \text{س} > ٠ \\ -\frac{١}{\text{س}} & ،\ \text{س} < ٠ \end{cases}$ «وبتبديل كتابة القاعدتين».

$= \begin{cases} -\frac{١}{\text{س}} & ،\ \text{س} < ٠ \\ \frac{١}{\text{س}} & ،\ \text{س} > ٠ \end{cases} = \text{د}(\text{س})$ ∴ الدالة د زوجية.

الدالة الأحادية (Injective function)

تعريف

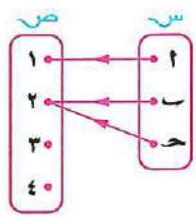
الدالة د : س ← ص تسمى دالة أحادية إذا كان :

لكل أ ، ب ∈ س ، د (أ) = د (ب) فإن : أ = ب

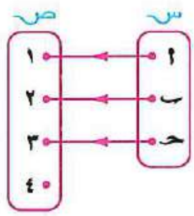
أو : لكل أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب فإن : د (أ) ≠ د (ب)

وهذا يعنى أنه لا يوجد عنصران فى مجال الدالة الأحادية لهما نفس الصورة.

فمثلًا :



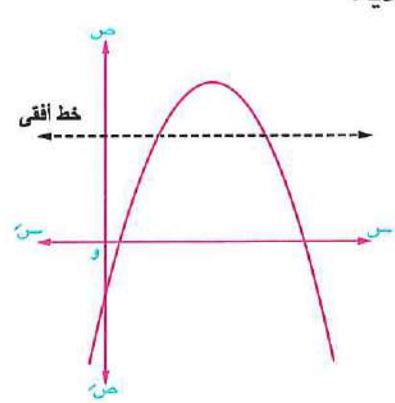
دالة ليست أحادية
من س ← ص



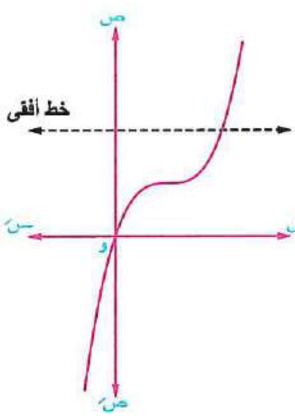
دالة أحادية
من س ← ص

اختبار الخط الأفقى

إذا وجد خط أفقى (يوازى محور السينات) يقطع منحنى الدالة فى أكثر من نقطة فإن المنحنى يمثل دالة ليست أحادية.



الخط الأفقى يقطع المنحنى فى نقطتين لذلك فإن الدالة ليست أحادية



أى خط أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة على الأكثر لذلك فإن الدالة أحادية

مثال ٧

أثبت أن كلًا من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين دالة أحادية :

[١] د (س) = $س^{٣}$ + ٢

[٢] د (س) = $\frac{٢ س - ٣}{٣ س + ٢}$

الحـــل

[١] بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = $أ^{٣}$ + ٢ ، د (ب) = $ب^{٣}$ + ٢ وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $أ^{٣}$ + ٢ = $ب^{٣}$ + ٢ ∴ $أ^{٣}$ = $ب^{٣}$

∴ أ = ب ∴ الدالة د دالة أحادية.

[٢] بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = $\frac{٢أ - ٣}{٣أ + ٢}$ ، د (ب) = $\frac{٢ب - ٣}{٣ب + ٢}$ وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{٢أ - ٣}{٣أ + ٢} = \frac{٢ب - ٣}{٣ب + ٢}$ ∴ (٢ أ − ٣) (٣ ب + ٢) = (٣ أ + ٢) (٢ ب − ٣)

∴ ~~٦ أ ب~~ + ٤ أ − ٩ ب − ~~٦~~ = ~~٦ أ ب~~ − ٩ أ + ٤ ب − ~~٦~~

∴ ٤ أ + ٩ أ = ٤ ب + ٩ ب ∴ ١٣ أ = ١٣ ب

∴ أ = ب ∴ الدالة د دالة أحادية.

مثال ٨

أثبت أن كلًا من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ليست أحادية :

[١] د (س) = ٣ − $س^{٢}$ [٢] د (س) = $س^{٢}$ + س

الحـــل

[١] بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = ٣ − $أ^{٢}$ ، د (ب) = ٣ − $ب^{٢}$ وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٣ − $أ^{٢}$ = ٣ − $ب^{٢}$ ∴ $أ^{٢}$ = $ب^{٢}$

∴ أ = ± ب ∴ أ لها قيمتان هما ب ، − ب

∴ الدالة د ليست أحادية.

[٢] بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د ∴ د (أ) = $أ^{٢}$ + أ ، د (ب) = $ب^{٢}$ + ب

وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ $أ^{٢}$ + أ = $ب^{٢}$ + ب

∴ $أ^{٢}$ − $ب^{٢}$ + أ − ب = ٠ ∴ (أ − ب) (أ + ب) + (أ − ب) = ٠

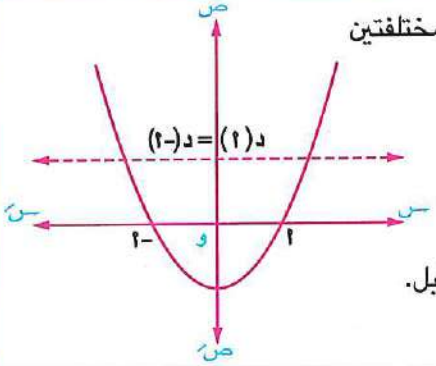
∴ (أ − ب) (أ + ب + ١) = ٠

∴ إما أ − ب = ٠ ومنها أ = ب أو أ + ب + ١ = ٠ ومنها أ = − ب − ١

∴ أ لها قيمتان هما ب ، − ب − ١

∴ الدالة د ليست أحادية.

ملاحظتان



- الدوال الزوجية بصفة عامة ليست دوال أحادية لأنه لكل قيمتين مختلفتين أ ، – أ ∈ مجال الدالة الزوجية يكون د (– أ) = د (أ)

أى أن : القيمتين أ ، – أ للمتغير س تناظرهما قيمة وحيدة للمتغير ص ولذلك فإن الدالة الزوجية ليست دالة أحادية كما يتضح ذلك باستخدام اختبار الخط الأفقى كما فى الشكل المقابل.

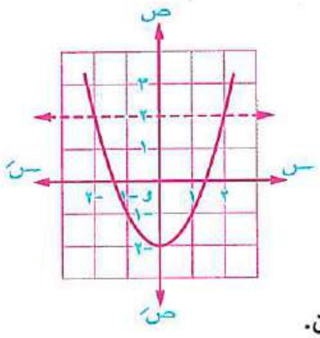
- الدالة الفردية قد تكون أحادية أو غير أحادية.

مثال ٩

مثل بيانيًا منحنى دالة زوجية يمر بالنقط : (٠ ، –٢) ، (–١ ، –١) ، (–٢ ، ٢)

ومن الرسم : بيِّن أن الدالة ليست أحادية.

الحل



∵ الدالة زوجية ∴ د (س) = د (– س)

∴ د (١) = د (–١) = –١ ، د (٢) = د (–٢) = ٢

أى أن : منحنى الدالة يمر أيضًا بالنقطتين :

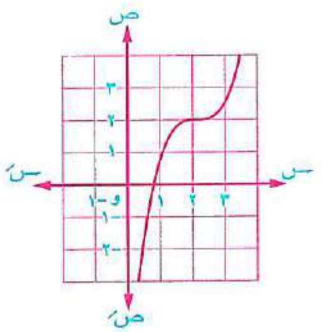
(١ ، –١) ، (٢ ، ٢)

من الرسم : الدالة ليست أحادية لأنه يوجد خط أفقى يقطع منحنى الدالة فى نقطتين.

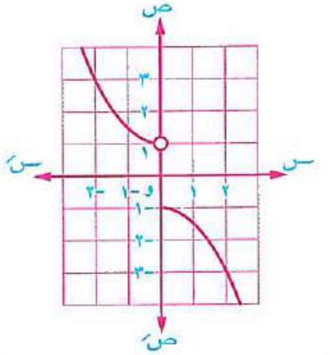
ملاحظة

إذا كانت الدالة د فى تزايد مستمر أو فى تناقص مستمر لجميع القيم التى تنتمى إلى مجال الدالة فإن الدالة د تكون أحادية.

فمثلًا : فى كل من الشكلين الآتيين :



الدالة د فى تزايد مستمر على مجالها
لذلك الدالة د دالة أحادية



الدالة د فى تناقص مستمر على مجالها
لذلك الدالة د دالة أحادية

تمـارين 3 على بعض خواص الدوال (الدوال الزوجية و الفردية - الدوال الأحادية)

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهـم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة الزوجية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = س^{٣} (ب) د (س) = حا س

(جـ) د (س) = س حتا س (د) د (س) = س حا س

(٢) الدالة الفردية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = س^{٢} حا س (ب) د (س) = ظا^{٢} س

(جـ) د (س) = حتا س (د) د (س) = ١

(٣) نوع الدالة د : د (س) = $\frac{\text{حا س}}{\text{س}}$ هى ....

(أ) زوجية. (ب) فردية. (جـ) لا زوجية ولا فردية. (د) أحادية.

(٤) الدالة د : د (س) = س حتا س ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) ليست زوجية ولا فردية. (د) أحادية.

(٥) كل مما يأتى قواعد دوال زوجية ماعدا ....

(أ) د (س) = حا س (ب) د (س) = حتا س

(جـ) د (س) = س^{٢} − ١ (د) د (س) = ١

(٦) القاعدة التى لا تمثل دالة زوجية فيما يلى هى ....

(أ) ص = $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$ (ب) ص = قا س

(جـ) ص = س^{٢} + حا س (د) ص = ٣ س^{٤} + ٢٧

(٧) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{\text{حا س}}$ فإن : ....

(أ) د (س) = $\frac{١}{\text{د (س)}}$ (ب) د (س) = − د (− س)

(جـ) د (س) = د (− س) (د) د (− س) = د $\left(\frac{١}{\text{س}}\right)$

(٨) إذا كانت د دالة فردية ، د (١) = ٢ فأى من النقط الآتية تقع على منحنى د ؟

(أ) (−١ ، ٢) (ب) (−١ ، −٢) (جـ) (١ ، −٢) (د) (−١ ، ٠)

(٩) إذا كانت د دالة فردية ، ا ∋ مجال د فإن : د (ا) + د (− ا) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ د (ا) (جـ) ٢ ا (د) د (ا)

(١٠) اذا كانت : د (س) دالة فردية فإن : د (ا) − د (− ا) = ...

(أ) صفر (ب) د (ا) (جـ) ٢ د (ا) (د) د (٢ ا)

(١١) اذا كانت : د (س) دالة زوجية فإن : د (ا) − د (− ا) = ...

(أ) صفر (ب) د (ا) (جـ) ٢ د (ا) (د) د (٢ ا)

(١٢) إذا كانت د دالة زوجية ، ٢ ∋ مجال د فإن : د (٢) + د (−٢) = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ٢ د (٢)

(١٣) الدالة د : د (س) = (س + جاس) (..............) تكون زوجية.

(أ) $س^٣$ + طاس (ب) ١ + جاس (جـ) ٤ − $س^٢$ (د) س − جتاس

(١٤) إذا كانت د دالة زوجية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (−٣ ، ٢ م + ١) وكانت د (٣) = ٥

فإن : م = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(١٥) إذا كانت الدالة د دالة زوجية فى الفترة [ا ، ب] فإن : ب = ...

(أ) ا (ب) − ا (جـ) ٢ ا (د) $ا^٣$

(١٦) إذا كانت : د دالة زوجية وكان د (٥) = ١ ، د (−٥) = ٣ − ك فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢

(١٧) إذا كانت د دالة حيث د :]−٥ ، ٥[⟵ ح ، د (س) = $س^٢$ فإن الدالة د (س) تكون ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) أحادية. (د) ليست زوجية وليست فردية.

(١٨) إذا كانت : د دالة زوجية مجالها]−٥ ، ٥[فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = د (س − ٢)

هى ....

(أ) {٢} (ب) {١} (جـ) {٠} (د) {−١}

(١٩) إذا كانت : د (س) = أ $س^{٣}$ + ب س + جـ ، د دالة فردية فإن : جـ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) −١

(٢٠) إذا كانت د : د (س) = $س^{٢}$ + أ س + ٩ دالة زوجية فإن : أ = ...

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) صفر (د) −٦

(٢١) إذا كانت : د (س) = $س^{٣}$ − س فإن : | د (س) + د (− س) | = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٢٢) إذا كانت د دالة زوجية وكان : د (س) + $س^{٢}$ د (− س) = ٣ فإن : د (١) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٢

(٢٣) إذا كانت د دالة فردية فإن : $\frac{٢ د (س) + ٨ د (− س)}{٣ د (س)}$ = ... حيث د (س) ≠ صفر

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) −٤ (د) ٤

(٢٤) إذا كانت : د دالة فردية وكان س د (س) + $س^{٣}$ د (− س) = ٢ فإن : د (٢) = ...

(أ) −٢ (ب) ٢ (جـ) $\frac{-١}{٣}$ (د) $\frac{١}{١٠}$

(٢٥) إذا كانت د : د (س) = أ $س^{٣}$ + ب دالة فردية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (٢ ، ٨)

فإن : أ + $ب^{٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٥

(٢٦) الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = ٣ − $س^{٢}$ (ب) د (س) = $س^{٣}$ + ٣

(جـ) د (س) = جا س طا س (د) د (س) = $س^{٢}$ + س

(٢٧) الدوال المعرفه بالقواعد الآتية كلها أحادية ما عدا ؟

(أ) د (س) = $س^{٣}$ (ب) ر (س) = ٣ س (جـ) ع (س) = $\frac{١}{س}$ (د) ل (س) = $س^{٢}$

(٢٨) كل الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ليست أحادية ما عدا ....

(أ) د (س) = $س^{٢}$ (ب) د (س) = ٥ (جـ) د (س) = س + ٢ (د) د (س) = جا س

(٢٩) إذا كان د ، ر دالتين حيث : د (س) = $س^{٣}$ ، ر (س) = س + ٢

فإن : (ر ∘ د) هى دالة ....

(أ) أحادية. (ب) فردية. (جـ) زوجية. (د) خطية.

(٣٠) إذا كانت الدالة فى تناقص مستمر لجميع قيم س ∈ مجال الدالة فإن الدالة تكون ....

(أ) زوجية. (ب) فردية. (جـ) أحادية. (د) ليست أحادية.

(٣١) إذا كانت الدالة فى تزايد مستمر لجميع قيم سـ ∋ مجال الدالة فإن الدالة تكون ....

(أ) أحادية.　(ب) زوجية.　(جـ) فردية.　(د) ليست أحادية.

(٣٢) الدالة د : د (سـ) = سـ^{٢} + ٥ سـ متماثلة حول ....

(أ) محور السينات.　(ب) محور الصادات.　(جـ) نقطة الأصل.　(د) لا يمكن أن تحدد.

(٣٣) الدالة د : د (سـ) = سـ^{٢} + سـ^{٤} + ١ متماثلة حول ....

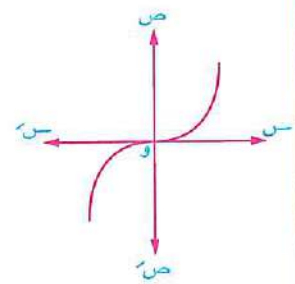
(أ) نقطة الأصل.　(ب) محور السينات.

(جـ) محور الصادات.　(د) ليس لها نقطة أو محور تماثل.

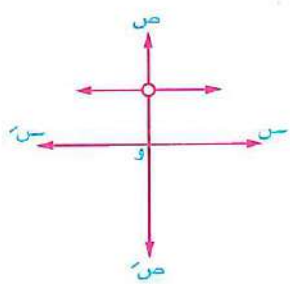
(٣٤) الدالة د : د (سـ) = جا ٣ سـ متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٠ ، ٠)　(ب) (٣ ، ٠)　(جـ) (-٣ ، ٠)　(د) (-٣ ، ٣)

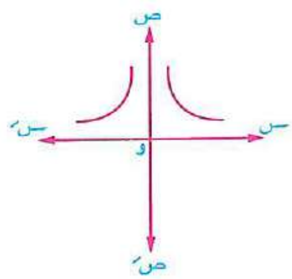
(٣٥) أى من الدوال الآتية ليست زوجية ؟



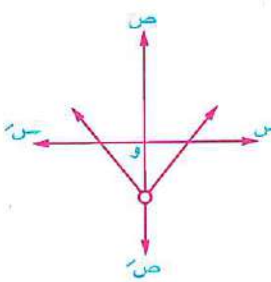
(أ)



(ب)

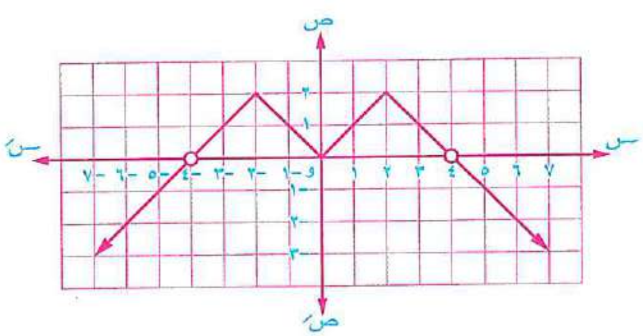


(جـ)



(د)

(٣٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د ، فإن د تكون ....



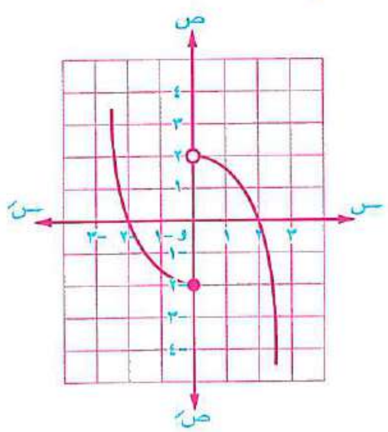
(أ) أحادية.

(ب) زوجية.

(جـ) فردية.

(د) ليست زوجية ولا فردية.

(٣٧) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د فإن د تكون ....



(أ) أحادية.

(ب) زوجية.

(جـ) فردية.

(د) ليست زوجية وليست فردية.

(٣٨) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

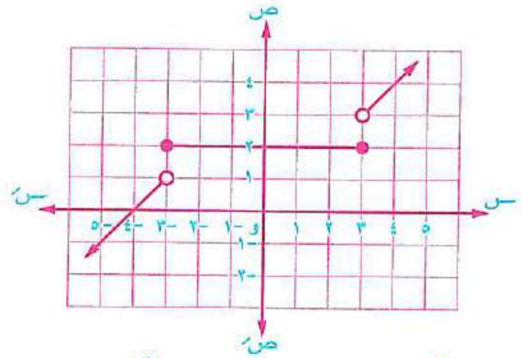
فإن د تكون ....

(أ) أحادية.

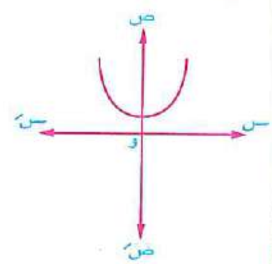
(ب) زوجية.

(جـ) فردية.

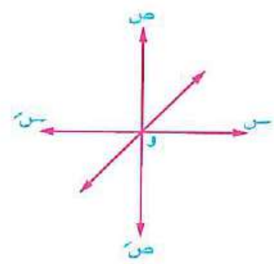
(د) ليست زوجية ولا فردية.



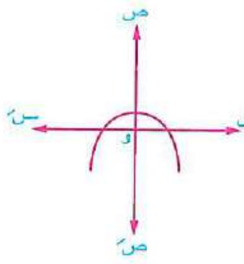
(٣٩) أى من الأشكال الآتية يعبر عن دالة أحادية ؟



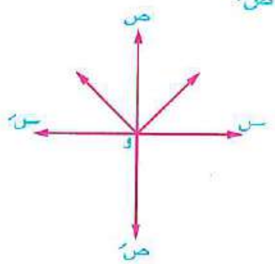
(أ)



(ب)



(جـ)



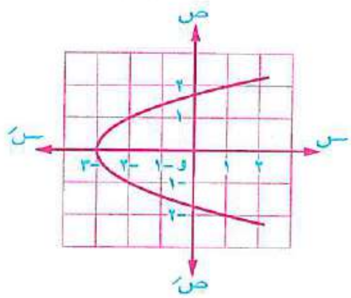
(د)

(٤٠) المنحنى الموضح بالشكل المقابل

متماثل حول المستقيم الذى معادلته ....

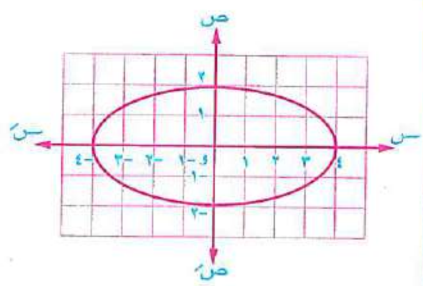
(أ) س = صفر   (ب) ص = صفر

(جـ) ص = −٢   (د) س = ٢

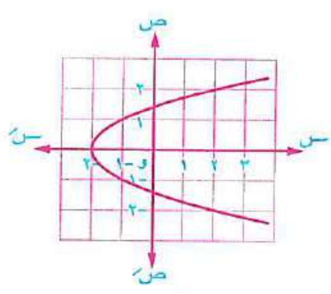


ثانيًا الأسئلة المقالية

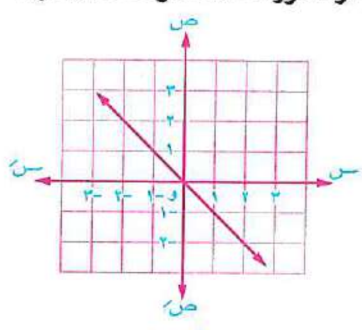
(١) فى كل من الأشكال الآتية اذكر ما إذا كان تماثل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل :



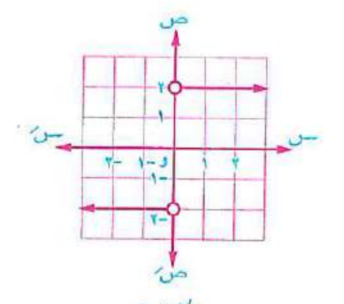
شكل(١)



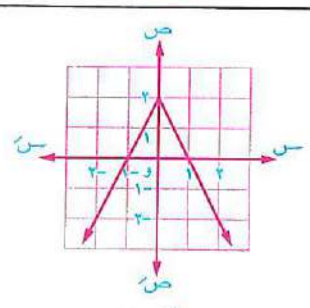
شكل(٢)



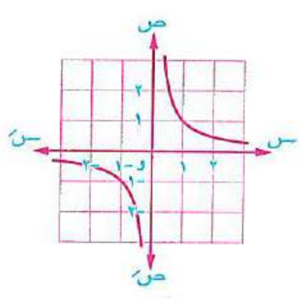
شكل(٣)



شكل(٤)



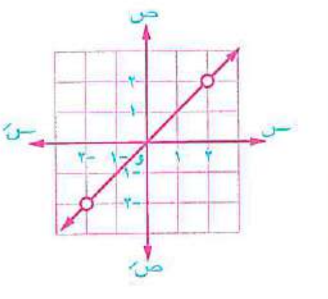
شكل(٥)



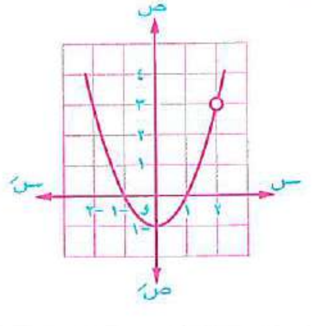
شكل(٦)

٢ اذكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

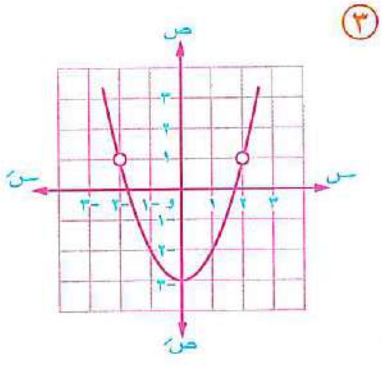
①



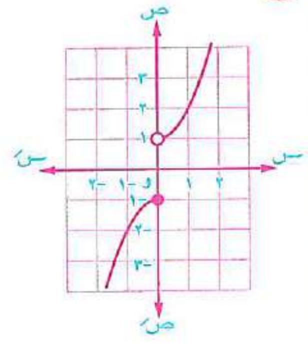
②



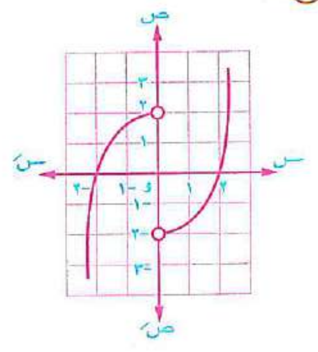
③



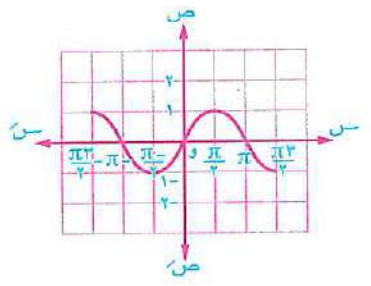
④



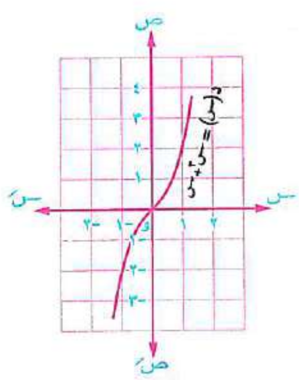
⑤



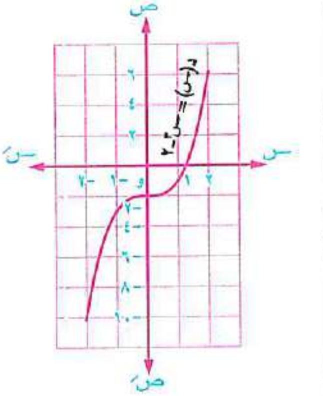
⑥



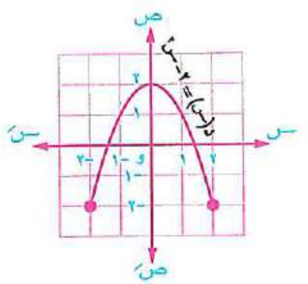
٣ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د ، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك وحقق إجابتك جبريًا.



شكل (١)

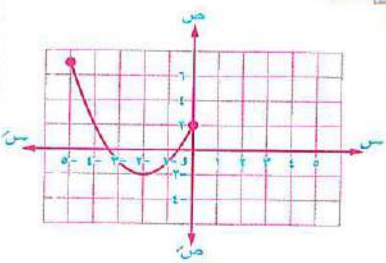


شكل (٢)

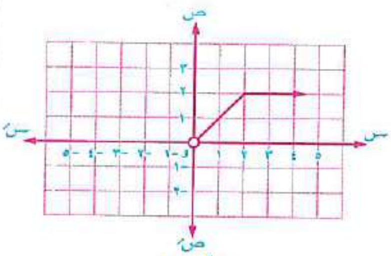


شكل (٣)

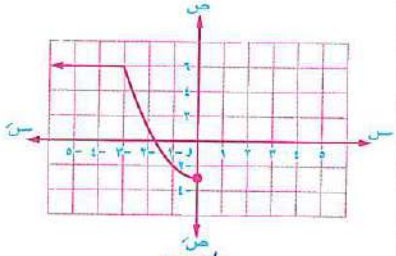
٤ أجب عما يلى من خلال الأشكال الآتية :



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

أولًا : أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) فى كراستك ، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها.

ثانيًا : أكمل رسم شكل (٢) فى كراستك ، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.

ثالثًا : حدد مجال ومدى الدالة فى كل حالة وبين أى الأشكال البيانية يمثل منحنى دالة أحادية.

---

٥ **ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :**

(١) $د(س) = ٥$

(٢) $د(س) = س^٤ + س^٢ - ١$

(٣) $د(س) = ٣س - ٤س^٣$

(٤) $د(س) = س^٢ - ٣س + ٤$

(٥) $د(س) = س^٣(س^٢ - ١)$

(٦) $د(س) = (س - ٣)^٢ - ٧$

(٧) $د(س) = \frac{س^٢ + ٢}{س - ٣}$

(٨) $د(س) = \frac{٢س^٣ - س^٥}{س}$

(٩) $د(س) = \sqrt{س + ٣}$

(١٠) $د(س) = (س^٢ + ١)^٣$

(١١) $د(س) = \sqrt{س^٢ + ٦}$

(١٢) $د(س) = \sqrt[٣]{س^٣ + س}$

(١٣) $د(س) = س^٣ - \frac{١}{س}$

(١٤) $د(س) = \left(س - \frac{٢}{س}\right)^٣$

(١٥) $د(س) = \left(\frac{س^٢}{٣} - \frac{٥}{س^٤}\right)^٥$

(١٦) $د(س) = \left(\frac{١ - س}{١ + س}\right)^٢ - \left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)^٢$

(١٧) $د(س) = \left(\frac{س - ١}{س + ١}\right)^٥ + \left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^٥$

(١٨) $د(س) = (س^٣ + ١)^٤ - (س^٣ - ١)^٤$

(١٩) $د(س) = س \, جتا \, س$

(٢٠) $د(س) = \frac{٣س}{ظا \, س}$

(٢١) $د(س) = \frac{س^٢ \, جا \, ٣س}{١ + س^٤}$

(٢٢) $د(س) = \frac{٣س^٢ - جتا \, س}{س^٣ - ٦س}$

(٢٣) $د(س) = س^٢ \, جا^٢ \, س$

(٢٤) $د(س) = س \, جا \, س^٣$

(٢٥) $د(س) = \frac{س^٢ + ظا \, س}{س^٤ + جا \, س}$

(٢٦) $د(س) = جا \, س^٢ - جا^٢ \, س$

(٢٧) $د(س) = س^٤ + جا^٦ \, س$

(٢٨) $د(س) = س^٧ + ظا^٥ \, س$

(٢٩) $د(س) = \frac{جا \, ٣س \, جتا \, ٢س}{قا \, س}$

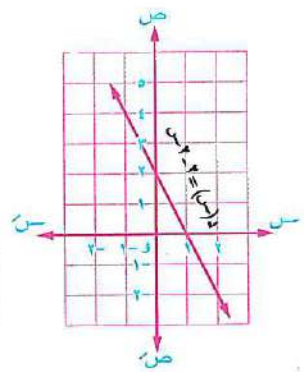
(٣٠) $د(س) = ٤^{س} + جتا \, س + ٢^{-٢س}$

(٣١) د (س) = (جتا س + جا س − ١) (جتا س + جا س + ١)

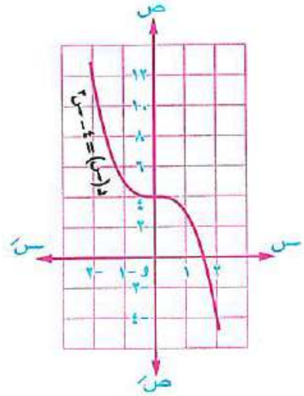
(٣٢) د (س) = $\begin{cases} ٢ س & ، س \geq ٠ \\ -٢ س & ، س < ٠ \end{cases}$

(٣٣) د (س) = $\begin{cases} ٢ س + س^٢ & ، س \leq ٠ \\ ٢ س - س^٢ & ، س > ٠ \end{cases}$

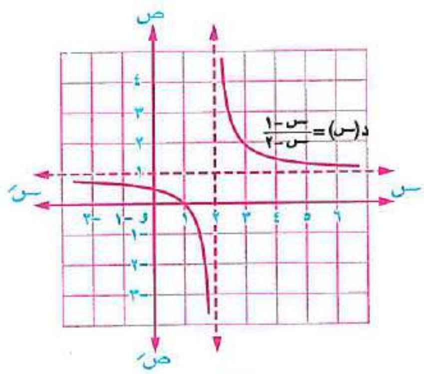
٦ **يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د ، بين من الرسم أن الدالة د أحادية وحقق ذلك جبريًا.**



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

٧ **أثبت أن الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دوال أحادية :**

(١) د (س) = ٢ س − ٣

(٢) د (س) = ٤ − $س^٣$

(٣) د (س) = $\frac{٣}{٢ س + ٥}$

(٤) د (س) = $\frac{٣ س - ٥}{٤ س + ٣}$

٨ **أثبت أن الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دوال ليست أحادية :**

(١) د (س) = ٣

(٢) د (س) = $(س + ٣)^٢$

(٣) د (س) = $س^٢$ − ٥ س + ٦

(٤) د (س) = $\frac{١}{س^٢ - ٤}$

٩ **في كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية حدد ما إذا كانت الدالة أحادية أم لا مع توضيح السبب :**

(١) د (س) = ٢ $س^٢$ − س − ٣

(٢) د (س) = $س^٤$ + ٢ $س^٢$ + ١

١٠ **اذكر نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :**

(١) د : ح ⟵ ح ، د (س) = س + ٢

(٢) د : [−٣ ، ٣] ⟵ ح ، د (س) = ٣ $س^٢$

(٣) د : $ح^+$ ⟵ $ح^+$ حيث د (س) = $س^٢$

(٤) د : د (س) = $س^٢$ حيث س ∈ ح − {٣}

١١ **إذا كانت د دالة مجالها ح أوجد قيمة :** $\frac{٧ د(-٥) + ٣ د(٥)}{٢ د(-٥)}$ إذا كان :

(١) د دالة فردية.

(٢) د دالة زوجية.

«٢ ، ٥»

١٢ إذا كانت د$_{١}$ ، د$_{٢}$ ، ر$_{١}$ ، ر$_{٢}$ دوال حقيقية حيث د$_{١}$ (س) = س^{٤}

، د$_{٢}$ (س) = جا^{٥} س ، ر$_{١}$ (س) = ٢ س^{٣} ، ر$_{٢}$ (س) = جا^{٢} س

فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك :

(١) د$_{١}$ + ر$_{٢}$	(٢) د$_{١}$ − د$_{٢}$	(٣) ر$_{١}$ + ر$_{٢}$
(٤) د$_{١}$ × ر$_{٢}$	(٥) ر$_{١}$ × ر$_{٢}$	(٦) $\frac{د_{٢}}{د_{١}}$

---

١٣ **مثل بيانيًا منحنى يحقق الشروط الآتية :**

(١) يمر بالنقط (٠ ، −٢) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٧) ويمثل دالة زوجية.

(٢) يمر بالنقط (٠ ، ٠) ، (−٢ ، ١) ، (−٣ ، ٥) ويمثل دالة فردية.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطة (٢ ، ٣) تنتمى لبيان الدالة د
فأى النقط الآتية يمكن أن تنتمى لبيان د ؟

(أ) (٥ ، ٣) (ب) (٢ ، −١) (جـ) (٣ ، ٢) (د) كل ما سبق.

(٢) إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطتان (٢ ، أ) ، (٣ ، ب) تنتميان للدالة د
فأى مما يأتى صحيح دائمًا ؟

(أ) أ > ب (ب) أ = ب (جـ) أ ≠ ب (د) أ + ب = ٥

(٣) إذا كانت د دالة فردية وكان د (١) = ك وكانت د (س + ٢) = د (س) + د (٢) فإن : د (٣) = ...

(أ) صفر (ب) ٣ ك (جـ) ٦ ك (د) ٩ ك

(٤) إذا كانت : د (س) = $\frac{١ + س}{١ − س}$ وكانت ر (س) = $\frac{١ − س}{١ + س}$ فإن كل من مجموع الدالتين وحاصل ضربهما يكون دالة ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) أحادية. (د) ليست زوجية وليست فردية.

(٥) إذا كانت د دالة حقيقية وكانت س ، − س ∈ مجال الدالة
فإن الدالة ر (س) = د (س) + د (− س) تكون دائمًا ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) ليست زوجية وليست فردية. (د) أحادية.

(٦) إذا كانت : د معرفة على ح وكانت ٣ د (س) + ٢ د (− س) = س^{٣} − جا س فإن : د تكون ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) ليست زوجية وليست فردية. (د) ليست أحادية.

(٧) إذا كانت : د (س) = س^{٣} ، ر (س) = س^{٢} + ١ فأى مما يأتى يكون دالة فردية ؟

(١) (د × ر) (٢) (د ∘ ر) (٣) (ر ∘ د)

(أ) (١) فقط. (ب) (٢) ، (٣) (جـ) (١) ، (٢) (د) (١) ، (٣)



الدرس

4

التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال

تمثيل الدالة الخطية

* نعلم أن الدالة الخطية د : ح ⟵ ح حيث د (س) = أ س + ب يمثلها بيانيًا خط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ب) وميله = أ

مثال ١

مثل بيانيًا الدالة د فى كل مما يأتى واستنتج من الرسم مدى الدالة :

١ د : ح ⟵ ح ، د (س) = − $\frac{١}{٣}$ س

٢ د : [−١ ، ٢[⟵ ح ، د (س) = ٢ س − ١

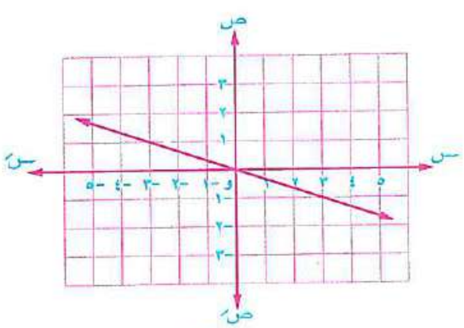
٣ د :]− ∞ ، ١[⟵ ح ، د (س) = ٢ س − ١

الحل

١ ∵ المجال = ح

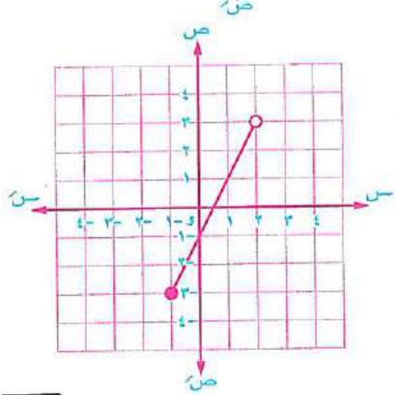
∴ الدالة يمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

وميله = $\frac{-١}{٣}$ ، المدى = ح



٢ ∵ المجال = [−١ ، ٢[، د (س) = ٢ س − ١

س	−١	٠	②
د (س)	−٣	−١	③

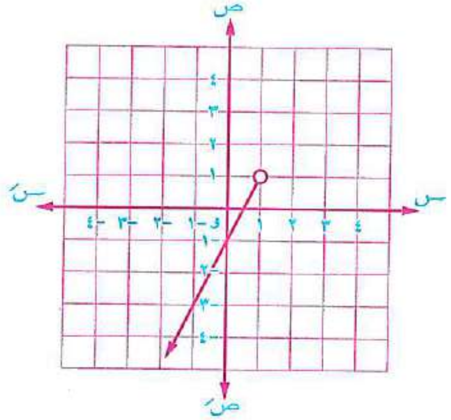


لاحظ أن : النقطة (٢ ، ٣) ∉ بيان الدالة لذلك

استبعدنا هذه النقطة من الشكل البيانى بوضع دائرة مفرغة عندها .

، من الرسم : المدى = [−٣ ، ٣[

٣ ∵ المجال =]- ∞ ، ١[، د (س) = ٢ س - ١



س	①	٠	-١
د (س)	①	-١	-٣

لاحظ أن : النقطة (١ ، ١) ∉ بيان الدالة لذلك استبعدناها من الشعاع الممثل للدالة بوضع دائرة مفرغة عندها .

من الرسم : المدى =]- ∞ ، ١[

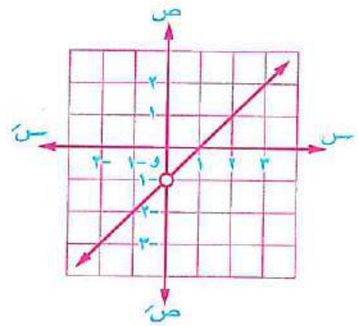
مثال ٢

مثل بيانيًا الدالة د : ح - {٠} ⟵ ح ، د (س) = $\frac{س^٢ - س}{س}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

الحـــل

∵ مجال الدالة د = ح - {٠}

، د (س) = $\frac{س^٢ - س}{س}$ = $\frac{س (س - ١)}{س}$ = س - ١ يمثلها خط مستقيم



س	-١	⓪	١
د (س)	-٢	(-١)	٠

، المدى = ح - {-١}

لاحـــظ أنه

تم وضع دائرة مفرغة عند النقطة التى إحداثيها السينى س = ٠ لأنها لا تنتمى للمجال.

مثال ٣

إذا كانت $د_١$:]- ∞ ، ٢] ⟵ ح حيث $د_١$ (س) = ٣ س - ١ ، $د_٢$: [-١ ، ٥] ⟵ ح

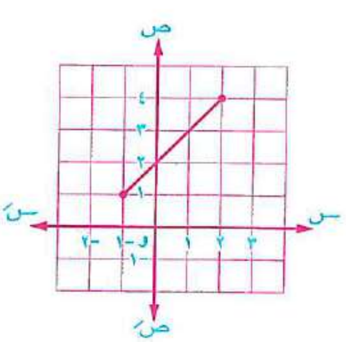
حيث $د_٢$ (س) = ٣ - ٢ س فارسم الدالة $د_١$ + $د_٢$ ومن الرسم استنتج مداها.

الحـــل

∵ مجال $د_١$ =]- ∞ ، ٢] ، مجال $د_٢$ = [-١ ، ٥]

∴ مجال ($د_١$ + $د_٢$) =]- ∞ ، ٢] ∩ [-١ ، ٥] = [-١ ، ٢]

، ∵ ($د_١$ + $د_٢$) (س) = ٣ س - ١ + ٣ - ٢ س = س + ٢



س	-١	٠	٢
($د_١$ + $د_٢$) (س)	١	٢	٤

مدى ($د_١$ + $د_٢$) = [١ ، ٤]

تمثيل الدالة التربيعية

مثال ٤

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = س^{٢} − س حيث س ∈ [−١ ، ٣]

الحل

∵ د (س) = س^{٢} − س ، المجال = [−١ ، ٣]

∴ الإحداثى السينى لرأس المنحنى = $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{١}{٢}$

، ∵ د $\left(\frac{١}{٢}\right) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٤}$

∴ رأس المنحنى هو $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٤}\right)$

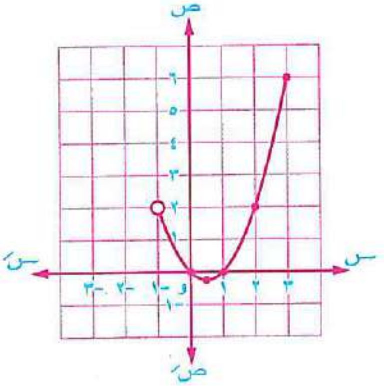
تذكر أن

نقطة رأس منحنى الدالة التربيعية

د : د (س) = أس^{٢} + ب س + حـ

هو $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

س	(−١)	٠	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٣
د (س)	(٢)	٠	$\frac{-١}{٤}$	٠	٢	٦



من الرسم :

* المدى = [$-\frac{١}{٤}$ ، ٦]

* الدالة تناقصية فى]−١ ، $\frac{١}{٢}$[وتزايدية فى]$\frac{١}{٢}$ ، ٣[

تمثيل الدالة مجزأة المجال (ذات المقاطع)

مثال ٥

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢ - س & ، −١ \le س < ٢ \\ س - ٢ & ، ٢ \le س < ٥ \end{cases}$ ومن الرسم :

[١] عين مجال ومدى الدالة د

[٢] ابحث اطراد الدالة د

[٣] اذكر نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك مع بيان السبب.

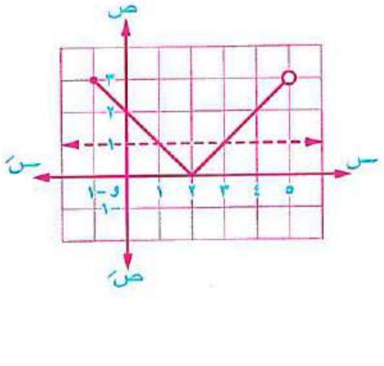
[٤] اذكر هل الدالة د أحادية أم لا مع بيان السبب.

الحل

الدالة د معرفة بقاعدتين

• $د_{١}$ (س) = ٢ − س حيث س ∈ [−١ ، ٢[

س	−١	٠	(٢)
$د_{١}$ (س)	٣	٢	(٠)



• د$_{٢}$ (س) = س − ٢ حيث س ∈ [٢ ، ٥[

س	٢	٣	⑤
د$_{٢}$ (س)	٠	١	③

لاحظ أن

٢ ∌ [−١ ، ٢[بينما ٢ ∈ [٢ ، ٥[
لذلك ٢ ∈ مجال د
وبالتالى (٢ ، ٠) ∈ بيان د
أى لا نضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢ ، ٠) فى الرسم

١ مجال د = [−١ ، ٢[∪ [٢ ، ٥[= [−١ ، ٥[، مدى د = [٠ ، ٣]

٢ الدالة د تناقصية فى الفترة]−١ ، ٢[وتزايدية فى الفترة]٢ ، ٥[

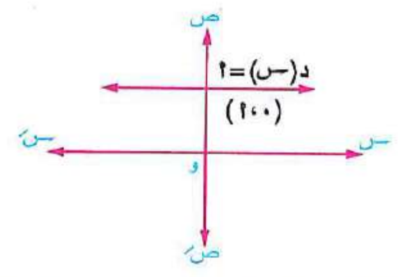
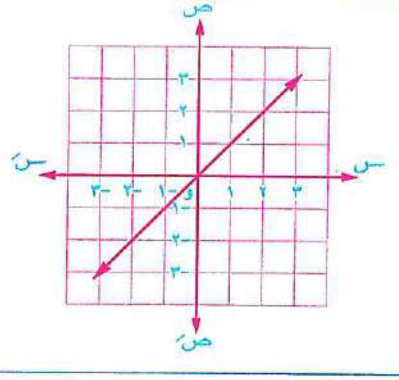
٣ الدالة ليست زوجية وليست فردية لأنها غير متماثلة حول محور الصادات وغير متماثلة حول نقطة الأصل

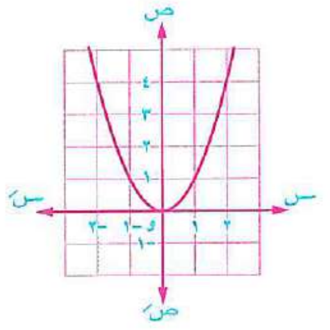
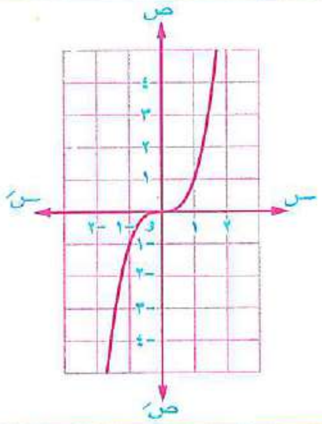
٤ الدالة د ليست أحادية لوجود خط أفقى يقطع الشكل البيانى للدالة د فى نقطتين.

الصور الأساسية لبعض الدوال

سوف نتعرف الآن على التمثيل البيانى للصور البسيطة (الصور الأساسية) لبعض الدوال الحقيقية وذلك تمهيدًا لاستخدامها فى تمثيل الدوال الحقيقية بصورها المختلفة فى الدرس القادم.

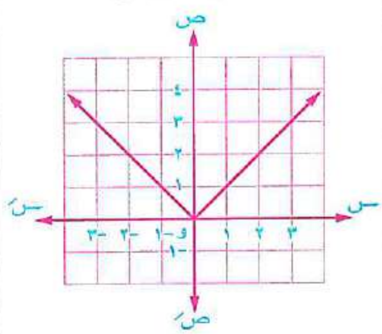
١ الصور الأساسية لبعض دوال كثيرات الحدود

	الدالة الثابتة	دالة الدرجة الأولى (الخطية)
الصورة الأساسية	د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ حيث أ ∈ ح	د : ح ⟵ ح ، د (س) = س
التمثيل البيانى		
المدى والاطراد والخواص	* مدى الدالة = {أ} * الدالة ثابتة على مجالها. * الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات). * الدالة ليست أحادية.	* مدى الدالة = ح * الدالة تزايدية على مجالها ح * الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل). * الدالة أحادية.

	دالة الدرجة الثانية (التربيعية)	دالة الدرجة الثالثة (التكعيبية)
الصورة الأساسية	د : ح ⟵ ح ، د (س) = $س^{٢}$	د : ح ⟵ ح ، د (س) = $س^{٣}$
التمثيل البيانى		
المدى والاطراد والخواص	* مدى الدالة = [٠ ، ∞[* الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٠[، وتزايدية فى]٠ ، ∞[* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات). * الدالة ليست أحادية.	* مدى الدالة = ح * الدالة تزايدية على مجالها ح * الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل). * الدالة أحادية.

٢ الصورة الأساسية لدالة المقياس (دالة القيمة المطلقة)

التمثيل البيانى



- الصورة الأساسية :

د : ح ⟵ ح ، د (س) = |س|

ويعاد تعريفها كالتالى : د (س) = { س ، س ≥ ٠ ؛ -س ، س < ٠ }

- المدى والاطراد والخواص :

* مدى الدالة = [٠ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[

* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات).

* الدالة ليست أحادية.

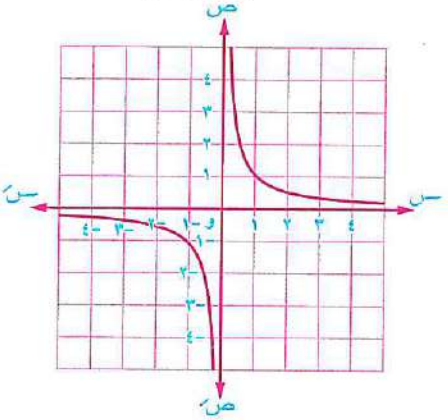
٣ الصورة الأساسية للدالة الكسرية

• الصورة الأساسية :

د : ح − {٠} ⟵ ح ، د (س) = ١/س

نظرًا لاقتراب كل من جزئى المنحنى من المحورين دون أن يقطعهما يقال إن المحورين $\overleftrightarrow{س س'}$ ، $\overleftrightarrow{ص ص'}$ هما خطا التقارب للمنحنى.

التمثيل البيانى



• المدى والاطراد والخواص :

* مدى الدالة = ح − {٠}

* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[وتناقصية أيضًا فى]٠ ، ∞[

* الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل) * الدالة أحادية.

مثال ٦

مثل بيانيًا كلًا من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (س) = { ١/س ، س < ٠ ؛ |س| ، س ≥ ٠ }

٢ د (س) = { س³ ، س < ٠ ؛ س ، س > ٠ }

الحل

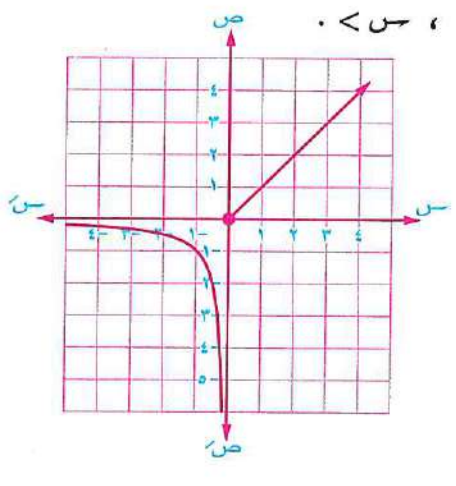
١ * المجال = ح

* المدى = ح

* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[

وتزايدية فى]٠ ، ∞[

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

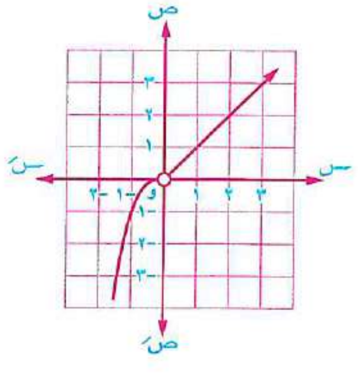


٢ * المجال = ح − {٠}

* المدى = ح − {٠}

* الدالة تزايدية على مجالها.

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.



تمـارين 4

على التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = ٥ فإن مجال الدالة د هو ....

(أ) ح (ب) ح⁺ (جـ) {٥} (د) ح − {٥}

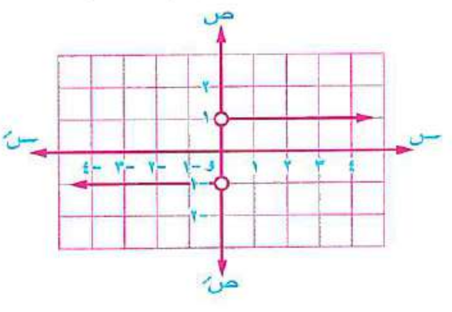
(٢) إذا كانت : د (س) = ٧ فإن مدى الدالة د هو ....

(أ) ح (ب) ح⁺ (جـ) {٧} (د) ح − {٧}

(٣) مدى الدالة د : د (س) = { ٠ ، س ≤ ٠ ؛ ١ ، س > ٠ } هو ....

(أ) {١} (ب) {٠} (جـ) ح (د) {٠ ، ١}

(٤) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



(أ) {١} (ب) {١ ، −١}

(جـ) {−١} (د) ح

(٥) مدى الدالة د : د (س) = $\frac{٣ س^{٢} - ٣}{س^{٢} - ١}$ هو ....

(أ) ح − {١ ، −١} (ب) ح − {٣ ، −٣} (جـ) {٣ ، −٣} (د) {٣}

(٦) مدى الدالة د (س) = $\frac{س^{٢} - ٣ س}{س}$ حيث س ≠ ٠ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٠} (جـ) {٠} (د) ح − {−٣}

(٧) مدى الدالة د : د (س) = $\frac{٢ س^{٣} - ٢ س}{س^{٢} - ١}$ هو ....

(أ) ح − {١ ، −١} (ب) ح − {٢ ، −٢} (جـ) ح⁺ (د) ح⁺ − {٢}

(٨) مدى الدالة د : [−٢ ، ٣[⟵ ح ، د (س) = $س^{٢}$ هو ....

(أ) [٤ ، ٩[(ب) ح⁺ (جـ) [٠ ، ٩[(د) [٠ ، ٤]

(٩) مدى الدالة د : $د(س) = \begin{cases} س & ، س > ٠ \\ -٢ & ، س \leq ٠ \end{cases}$ هو ....

(أ) $ح^+$ (ب) $ح^+ - \{-٢\}$ (ج) $ح^+ \cup \{-٢\}$ (د) ح

(١٠) الدالة د حيث $د(س) = \begin{cases} ٢ & ، س > ٠ \\ -٢ & ، س < ٠ \end{cases}$ متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (−٢ ، ٠) (ج) (٠ ، ٠) (د) (٢ ، −٢)

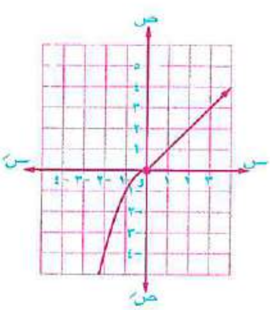
(١١) محور تماثل الدالة د : $د(س) = س^٢$ هو المستقيم ....

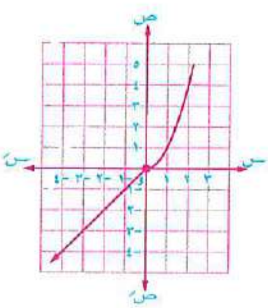
(أ) ص = صفر (ب) ص = س (ج) ص = − س (د) س = صفر

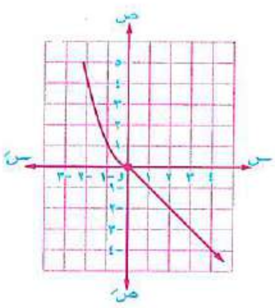
(١٢) الدالة د : $د(س) = \begin{cases} س^٣ & ، س < ٠ \\ \frac{١}{س} & ، س > ٠ \end{cases}$ تكون تزايدية فى ....

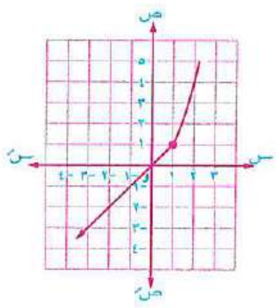
(أ) ح (ب) $ح^-$ (ج) $ح^+$ (د) $ح - \{٠\}$

(١٣) منحنى الدالة د : $د(س) = \begin{cases} س^٢ & ، س > ٠ \\ س & ، س \leq ٠ \end{cases}$ هو ....

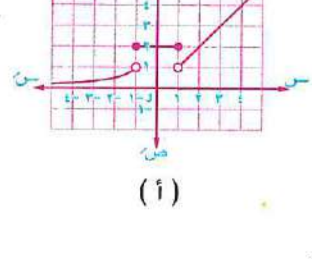

(أ)

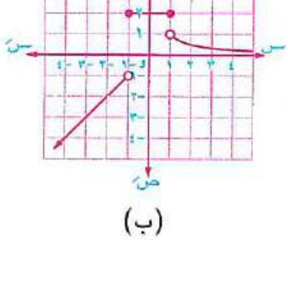

(ب)

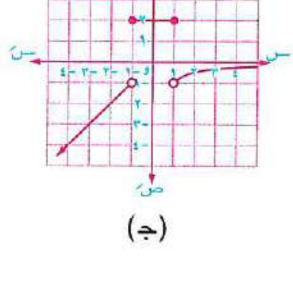

(جـ)

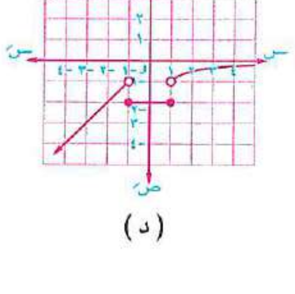

(د)

(١٤) منحنى الدالة د : $د(س) = \begin{cases} س & ، س < -١ \\ ٢ & ، -١ \leq س \leq ١ \\ \frac{١}{س} & ، س > ١ \end{cases}$ هو ....

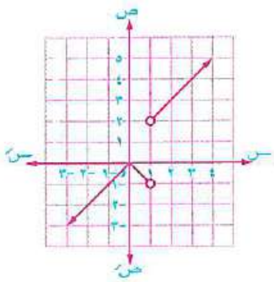

(أ)

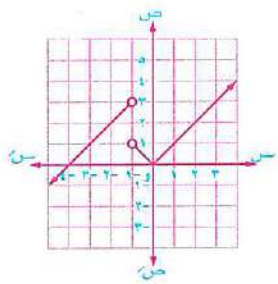

(ب)

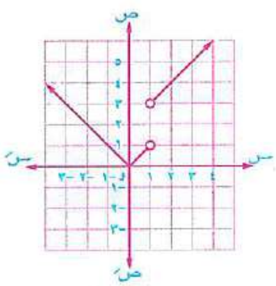

(جـ)

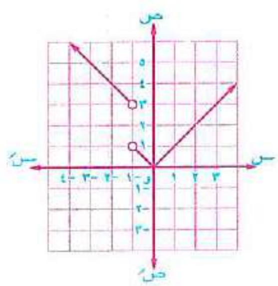

(د)

(١٥) منحنى الدالة د : د (س) = { |س| ، س < ١ ؛ س + ٢ ، س > ١ } هو ....

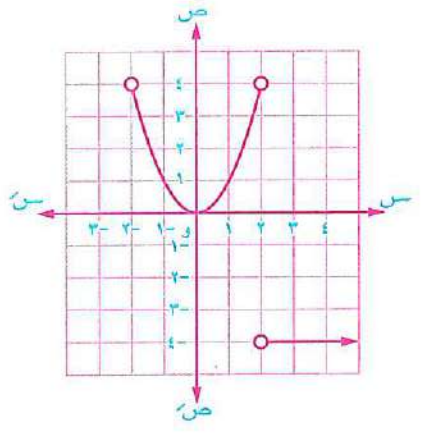

(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

(١٦) في الشكل المقابل :



منحنى الدالة د المعرفة بالقاعدة د (س) = ...

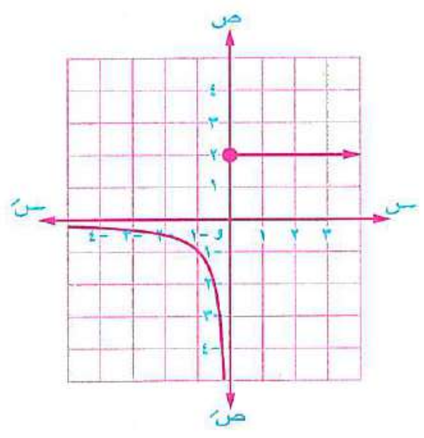
(أ) { س^٢ ، −٢ < س < ٢ ؛ −٤ ، س < −٢ }

(ب) { س^٢ ، −٢ < س < ٢ ؛ −٤ ، س > ٢ }

(جـ) { س^٢ ، −٢ ≤ س ≤ ٢ ؛ −٤ ، س < ٢ }

(د) { س^٢ ، −٢ < س < ٢ ؛ −٤ ، س < ٢ }

(١٧) في الشكل المقابل :



منحنى الدالة د المعرفة بالقاعدة د (س) = ...

(أ) { ٢ ، س > ٠ ؛ ١/س ، س < ٠ }

(ب) { ٢ ، س ≥ ٠ ؛ ١/س ، س < ٠ }

(جـ) { ٢ ، س < ٠ ؛ ١/س ، س ≥ ٠ }

(د) { ٢ ، س ≥ ٢ ؛ ١/س ، س < ٢ }

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ مثل كلاً من الدوال الآتية بيانيًا ، وعين مداها :

(١) د : {-٣ ، -١ ، ١ ، ٢} ⟵ [-٣ ، ٧] ، د (س) = ٢ س + ٣

(٢) د : [١ ، ٥[⟵ ح ، د (س) = س + ١

(٣) ر :]-∞ ، -١[⟵ ح ، ر (س) = ١ - س

(٤) د : د (س) = -٣ س + ٧ لكل س ∈ ح

(٥) د : ح^{-} ⟵ ح ، د (س) = $\text{س}^{٢}$

(٦) د : د (س) = $\text{س}^{٢}$ - ٥ ، س ≥ ٠

(٧) د : د (س) = $\text{س}^{٢}$ - ٣ س ، س ∈ [-٣ ، ٢]

---

٢ إذا كانت د : [-٢ ، ٦] ⟵ ح ، د (س) = $\begin{cases} \text{٤ - س} & \text{عندما } -٢ \le \text{س} < ١ \\ \text{س} & \text{عندما } ١ \le \text{س} \le ٦ \end{cases}$

(١) ارسم الشكل البيانى للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

(٢) هل د دالة أحادية ؟ فسر إجابتك.

---

٣ مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وابحث تماثلها :

(١) د (س) = $\frac{\text{٣ س}^{٢} - ٣}{\text{س}^{٢} - ١}$

(٢) د (س) = $\frac{٤ - \text{س}^{٢}}{\text{س} + ٢}$

(٣) د (س) = $\frac{\text{س}^{٣} - \text{س}}{\text{س}^{٢} - ١}$

(٤) د (س) = $\frac{\text{س}^{٤} - \text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} - ١}$

---

٤ مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وابحث تماثلها :

(١) د :]-∞ ، ٣[⟵ ح حيث د (س) = ٢

(٢) د (س) = $\begin{cases} ٢ & \text{، س} \le ٠ \\ -٣ & \text{، س} > ٠ \end{cases}$

(٣) د (س) = $\begin{cases} ٢ & \text{، س} > ١ \\ \text{س - ٢} & \text{، س} \le ١ \end{cases}$

(٤) د (س) = $\begin{cases} \text{س + ٢} & \text{، س} \in [-٢ ، ١] \\ \text{-س + ٤} & \text{، س} \in]١ ، ٤] \end{cases}$

(٥) د (س) = $\begin{cases} ٤ & \text{، س} < -٢ \\ \text{س}^{٢} & \text{، س} \ge -٢ \end{cases}$

(٦) د (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{، س} < ٠ \\ \text{س} & \text{، س} \ge ٠ \end{cases}$

⑦ د(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣} & ، \text{س} < ١ \\ ١ & ، \text{س} > ١ \end{cases}$

⑧ د(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣} & ، \text{س} < ١ \\ ٢ - \text{س} & ، \text{س} \geq ١ \end{cases}$

⑨ د(س) = $\begin{cases} |\text{س}| & ، \text{س} \leq ٠ \\ \frac{١}{\text{س}} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$

⑩ د(س) = $\begin{cases} |\text{س}| & ، \text{س} \leq ٠ \\ \text{س}^{٢} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$

⑪ د(س) = $\begin{cases} ٣ & ، \text{س} \leq -٣ \\ |\text{س}| & ، -٣ < \text{س} < ٣ \\ ٣ & ، \text{س} \geq ٣ \end{cases}$

⑫ د(س) = $\begin{cases} \frac{٣\text{س} - ٦}{٢ - \text{س}} & ، \text{س} > ٢ \\ ٢ & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$

⑬ د(س) = $\begin{cases} ٢ & ، -٣ \leq \text{س} \leq -١ \\ ٠ & ، -١ < \text{س} < ١ \\ ٢ & ، ١ \leq \text{س} \leq ٣ \end{cases}$

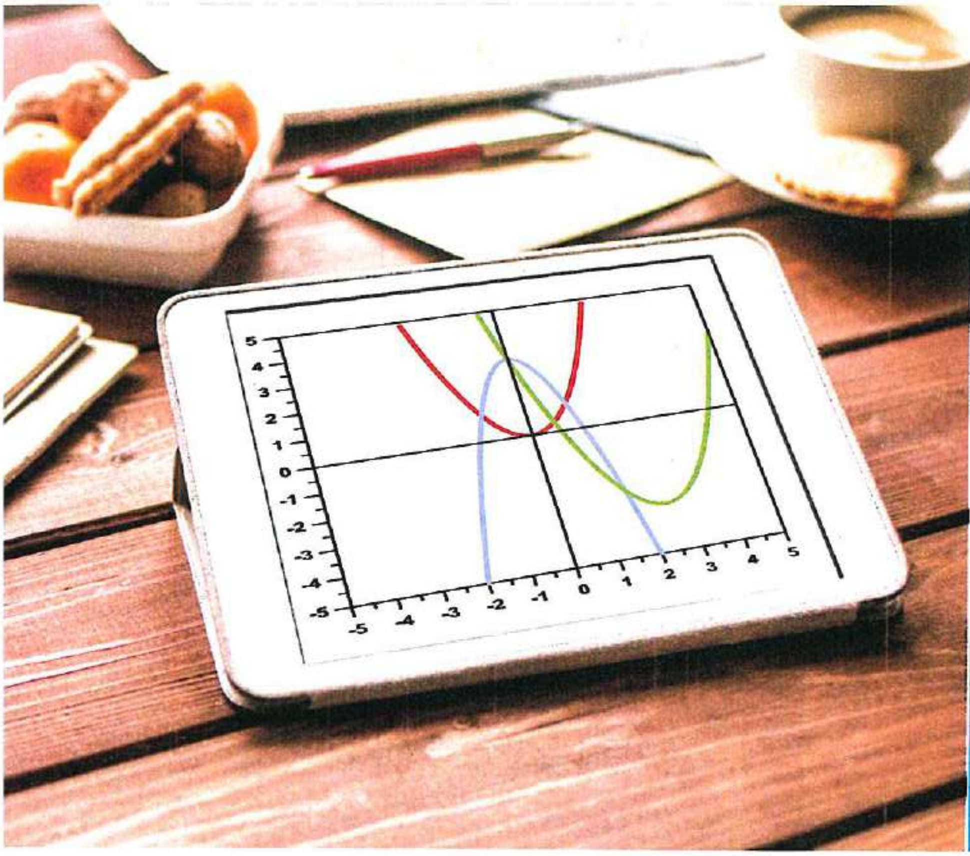
⑭ د(س) = $\begin{cases} -\text{س} - ١ & ، -٤ \leq \text{س} < -٢ \\ ١ & ، -٢ \leq \text{س} \leq ٢ \\ \text{س} - ١ & ، ٢ < \text{س} \leq ٤ \end{cases}$

---

٥ إذا كان $د_{١}$: ح ⟵ ح حيث $د_{١}$(س) = ٣س − ١ ، $د_{٢}$: [−٢ ، ٣] ⟵ ح
حيث $د_{٢}$(س) = ٣ − ٢س فارسم الدالة ($د_{١}$ + $د_{٢}$)(س) محددًا مجالها
ثم استنتج اطراد الدالة.

---

٦ إذا كانت د(س) = $\text{س}^{٣}$ − ٤س ، ر(س) = $\text{س}^{٢}$ − ٤ فعين مجال الدالة $\frac{د}{ر}$ ومثلها بيانيًا ومن الرسم عين مداها وعين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وابحث اطرادها واذكر هل هى دالة أحادية أم لا.



الدرس

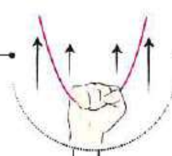
5

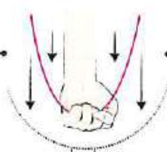
التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية

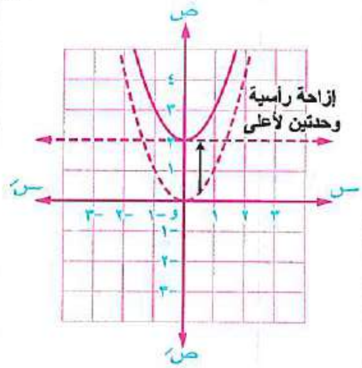
أولًا الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة

الدالة الأساسية

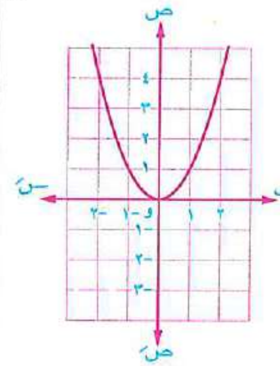
$ص = س^{٢} + ٢$ ← إزاحة رأسية وحدتين لأعلى ← $ص = س^{٢}$ → إزاحة رأسية ٣ وحدات لأسفل → $ص = س^{٢} - ٣$



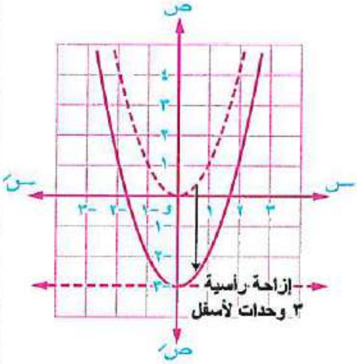




رأس المنحنى (٠ ، ٢)



رأس المنحنى (٠ ، ٠)



رأس المنحنى (٠ ، −٣)

بصفة عامة

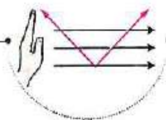
لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (س) + أ ، أ ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د (س)

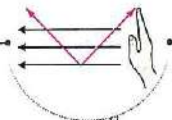
بإزاحة رأسية قدرها |أ| وحدة طول فى اتجاه :
- $\overrightarrow{وص}$ (أى لأعلى) عندما أ > ٠ .
- $\overrightarrow{وص َ}$ (أى لأسفل) عندما أ < ٠ .

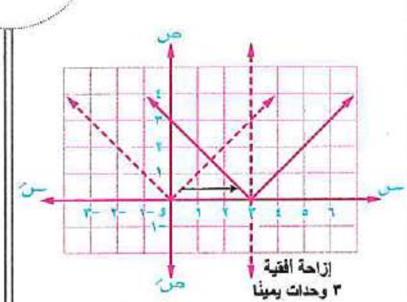
ثانيًا الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة

الدالـــة الأساسيـــة

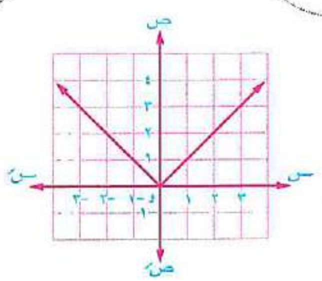
ص = | س – ٣ | ← (إزاحة أفقيـة ٣ وحدات يمينًا) ← ص = | س | → (إزاحة أفقيـة وحدتـان يسـارًا) → ص = | س + ٢ |







رأس المنحنى (٣ ، ٠)



رأس المنحنى (٠ ، ٠)



رأس المنحنى (–٢ ، ٠)

بصفة عامة

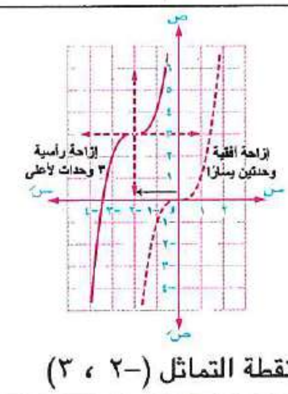
لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (س + أ) ، أ ∈ ح – {٠} هو نفس المنحنى ص = د (س)

بإزاحة أفقية قدرها | أ | وحدة طول فى اتجاه :
- و س (يمينًا) عندما أ < ٠
- و س′ (يسارًا) عندما أ > ٠

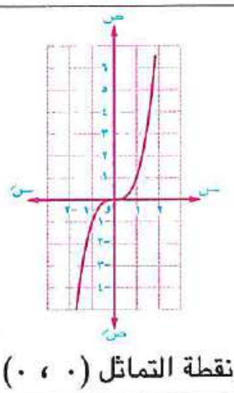
ثالثًا الإزاحة الأفقية متبوعة بالإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة

الدالـــة الأساسيـــة

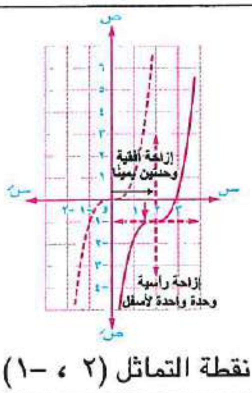
ص = (س + ٢)^{٣} + ٣ ← (إزاحة أفقية وحدتين يسارًا ثم إزاحة رأسيه ٣ وحدات لأعلى) ← ص = س^{٣} → (إزاحة أفقية وحدتين يمينًا ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة لأسفل) → ص = (س – ٢)^{٣} – ١



نقطة التماثل (–٢ ، ٣)



نقطة التماثل (٠ ، ٠)



نقطة التماثل (٢ ، –١)

بصفة عامة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (س + أ) + ب حيث أ ، ب ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د (س) بإزاحة أفقية مقدارها | أ | وحدة طول فى اتجاه و س← إذا كان أ < ٠ أو فى اتجاه و س′ إذا كان أ > ٠ ثم إزاحة رأسية مقدارها | ب | وحدة طول فى اتجاه و ص← إذا كان ب > ٠ أو فى اتجاه و ص′ إذا كان ب < ٠

مثال ١

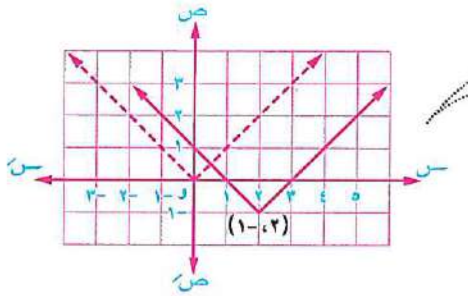
استخدم منحنيات الدوال الأساسية لرسم منحنيى الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ومن الرسم عين مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك :

[١] ر (س) = | س − ٢ | − ١

[٢] ر (س) = (٢ − س)^{٢} + ١

الحل

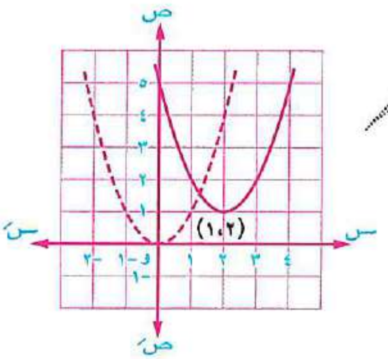
[١] منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = | س | بإزاحة أفقية ٢ وحدة فى اتجاه و س← ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة فى اتجاه و ص′



* مجال ر = ح ، مدى ر = [−١ ، ∞[
* الدالة ر تناقصية فى]− ∞ ، ٢[وتزايدية فى]٢ ، ∞[
* الدالة ر ليست زوجية وليست فردية.

[٢] ∵ (٢ − س)^{٢} = (س − ٢)^{٢} ∴ ر (س) = (س − ٢)^{٢} + ١

منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} بإزاحة أفقية ٢ وحدة فى اتجاه و س← ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة فى اتجاه و ص←



* مجال ر = ح ، مدى ر = [١ ، ∞[
* الدالة ر تناقصية فى]− ∞ ، ٢[وتزايدية فى]٢ ، ∞[
* الدالة ر ليست زوجية وليست فردية.

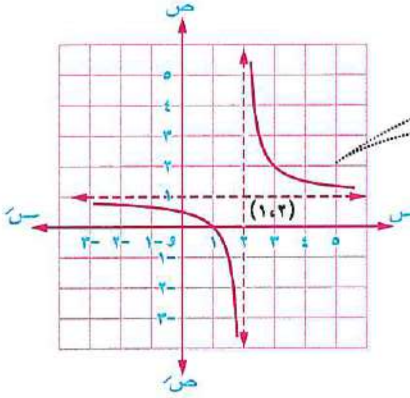
مثال ٢

استخدم منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ لتمثيل الدوال ر ، ع ، هـ حيث :

[١] ر (س) = $\frac{١}{س − ٢}$ + ١ [٢] ع (س) = $\frac{١}{س}$ + ٣ [٣] هـ (س) = $\frac{٢س − ١}{س − ١}$

ومن الرسم حدد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها.

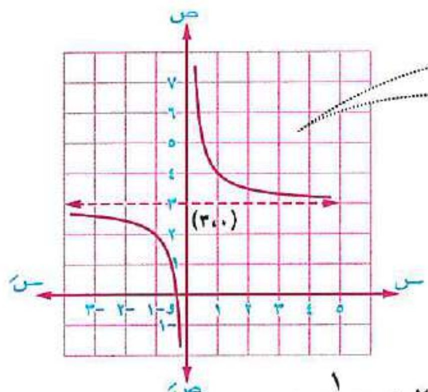
الحـــل



١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها ٢ وحدة فى اتجاه و$\overleftarrow{\text{س}}$ ثم إزاحة رأسية قدرها وحدة واحدة فى اتجاه و$\overleftarrow{\text{ص}}$

* مجال ر = ح − {٢}   * مدى ر = ح − {١}

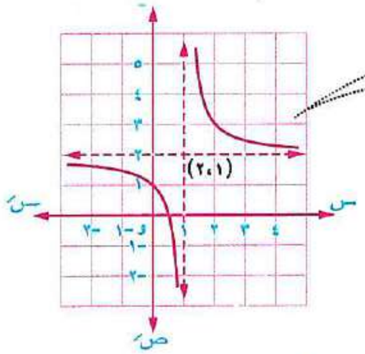
* الدالة تناقصية فى الفترة]− ∞ ، ٢[وتناقصية أيضًا فى الفترة]٢ ، ∞[



٢ منحنى الدالة ع هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة رأسية مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه و$\overleftarrow{\text{ص}}$

* مجال ع = ح − {٠}
* مدى ع = ح − {٣}
* الدالة تناقصية فى الفترة]− ∞ ، ٠[وتناقصية أيضًا فى الفترة]٠ ، ∞[

٣ $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{٢س} - \text{١}}{\text{س} - \text{١}} = \frac{\text{٢س} - \text{٢} + \text{١}}{\text{س} - \text{١}} = \frac{\text{٢}(\text{س} - \text{١}) + \text{١}}{(\text{س} - \text{١})} = \text{٢} + \frac{\text{١}}{\text{س} - \text{١}}$



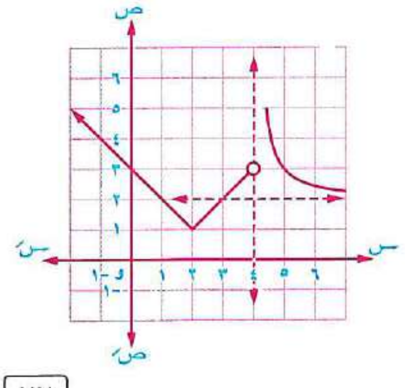
منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه و$\overleftarrow{\text{س}}$ ثم إزاحة رأسية ٢ وحدة فى اتجاه و$\overleftarrow{\text{ص}}$

* مجال هـ = ح − {١}
* مدى هـ = ح − {٢}
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ١[وتناقصية أيضًا فى]١ ، ∞[

مثال ٣

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = $\begin{cases} |\text{س} - \text{٢}| + \text{١} & \text{،} \quad \text{س} < \text{٤} \\ \frac{\text{١}}{\text{س} - \text{٤}} + \text{٢} & \text{،} \quad \text{س} > \text{٤} \end{cases}$ ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة

واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

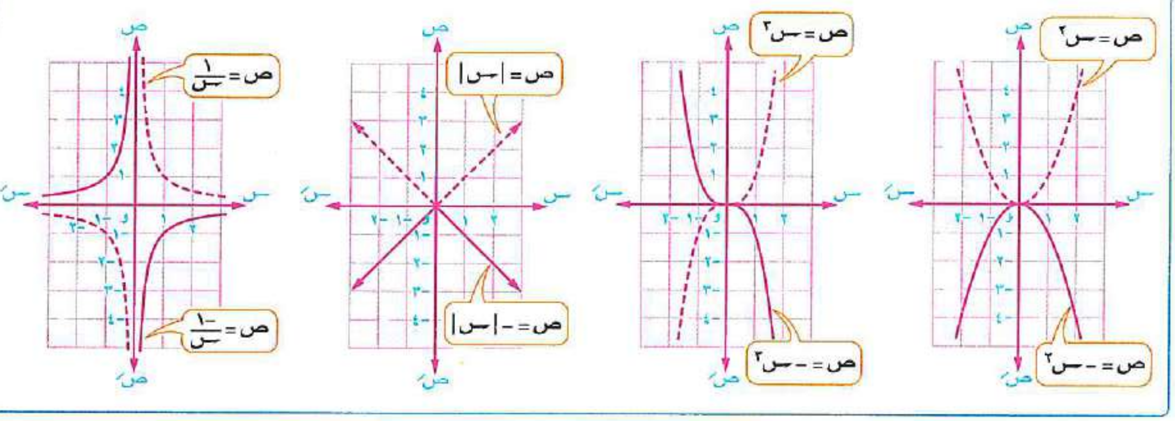


الحـــل

* المجال = ح − {٤}
* المدى =]١ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى كل من]− ∞ ، ٢[،]٤ ، ∞[وتزايدية فى]٢ ، ٤[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

رابعًا انعكاس منحنى الدالة فى محور السينات

لأى دالة د يكون المنحنى ص = − د (س) هو نفس المنحنى ص = د (س) بالانعكاس فى محور السينات.



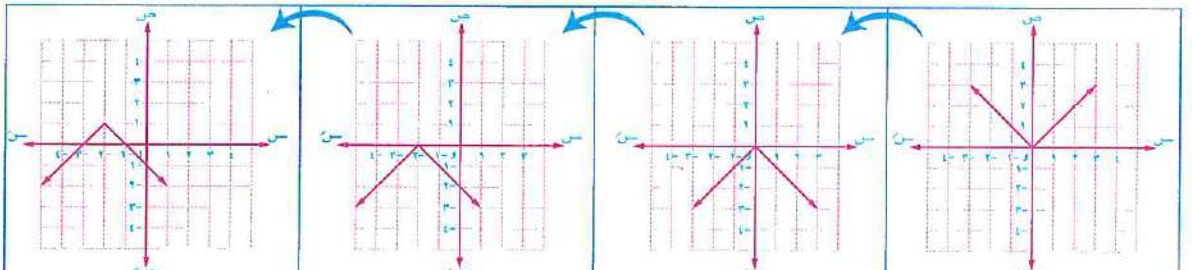
ملاحظة هامة

من المهم ترتيب إجراء التحويلات على المنحنى ص = د (س) للحصول منه على المنحنى ص = − د (س + أ) + ب كالتالى :

[١] انعكاس فى محور السينات. [٢] إزاحة أفقية. [٣] إزاحة رأسية.

فإذا عكس الترتيب بإجراء الإزاحة الرأسية قبل إجراء الانعكاس فى محور السينات فإننا نحصل على منحنى آخر غير المنحنى المطلوب.

فمثلًا : من منحنى الدالة الأساسية ص = |س| نحصل على منحنى الدالة ص = − |س + ٢| + ١ كالتالى :



ص = |س|	ثم ص = − |س|	ثم ص = − |س + ٢|	ثم ص = − |س + ٢| + ١
الدالة الأساسية	الانعكاس فى محور السينات	إزاحة أفقية وحدتان يسارًا	إزاحة رأسية وحدة واحدة لأعلى

مثال ٤

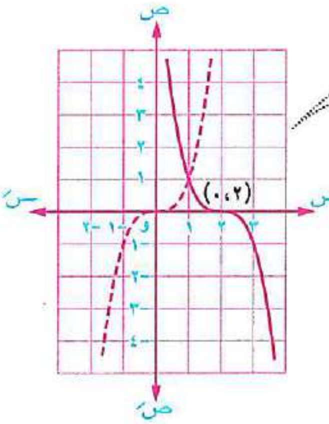
باستخدام منحنيات الدوال الأساسية ارسم منحنيات الدوال ر ، ع ، هـ حيث :

[١] ر (س) = − $(س - ٢)^3$ [٢] ع (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣ [٣] هـ (س) = ٤ س − $س^2$ − ٣

ومن الرسم بين مدى كل دالة وابحث اطرادها وتماثلها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

الحـــل

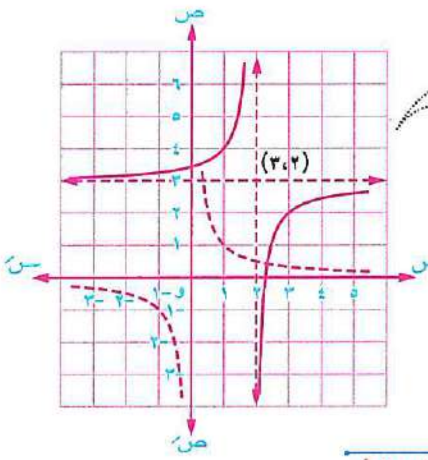
١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = س^٣ بالانعكاس في محور السينات ثم إزاحة أفقية ٢ وحدة في اتجاه و س→



* مدى ر = ح
* الدالة ر تناقصية على مجالها ح
* الدالة ر متماثلة حول النقطة (٢ ، ٠)
* الدالة ر ليست زوجية وليست فردية.

٢ ع (س) = $\frac{١}{-س + ٢}$ + ٣ = $\frac{١}{-(س - ٢)}$ + ٣ = $\frac{-١}{س - ٢}$ + ٣

منحنى الدالة ع هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ بالانعكاس في محور السينات متبوعًا بإزاحة أفقية وحدتين في اتجاه و س→ ثم إزاحة رأسية ٣ وحدات في اتجاه و ص→



* مدى ع = ح - {٣}
* الدالة ع تزايدية في الفترة]- ∞ ، ٢[

وتزايدية أيضًا في الفترة]٢ ، ∞[
* الدالة ع متماثلة حول النقطة (٢ ، ٣)
* الدالة ع ليست زوجية وليست فردية.

لاحظ أن

نقطة رأس المنحنى في الدالة هـ هي (٢ ، ١)

ويمكن الحصول عليها من القانون :

رأس المنحنى = $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

وذلك للدوال التي قاعدتها على الصورة :

د (س) = أ س^٢ + ب س + حـ

٣ ∵ هـ (س) = - س^٢ + ٤ س - ٣

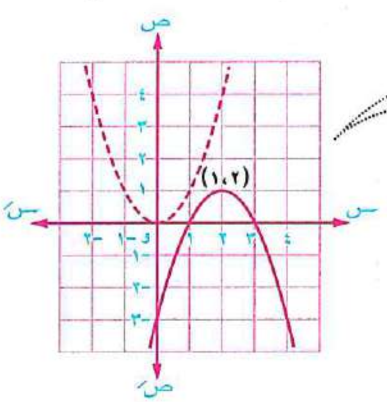
= - (س^٢ - ٤ س + ٣)

= - (س^٢ - ٤ س + ٤ - ١)

= - [(س - ٢)^٢ - ١]

= - (س - ٢)^٢ + ١

منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = س^٢ بالانعكاس في محور السينات متبوعًا بإزاحة أفقية وحدتين في اتجاه و س→ ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة في اتجاه و ص→

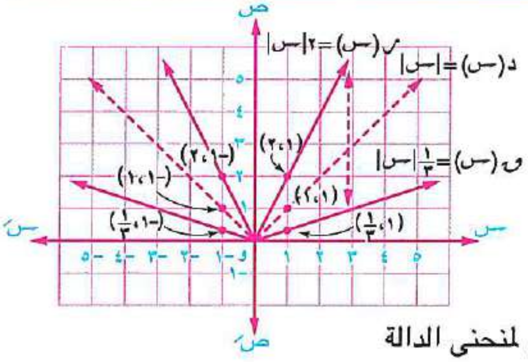


* مدى هـ =]- ∞ ، ١]
* الدالة هـ متزايدة في الفترة]- ∞ ، ٢[ومتناقصة في]٢ ، ∞[
* الدالة هـ متماثلة حول المستقيم س = ٢
* الدالة هـ ليست زوجية وليست فردية.

خامسًا تمدد منحنى الدالة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = أ د (س) حيث أ ∈ ح*
- تمدد رأسى للمنحنى ص = د (س) إذا كان أ > ١
- انكماش رأسى للمنحنى ص = د (س) إذا كان ٠ < أ < ١

فمثلًا : فى الشكل المقابل :



* منحنى الدالة ر : ر (س) = ٢ | س |
هو تمدد رأسى لمنحنى الدالة د : د (س) = | س |
لأن : أ > ١

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ بيان د
يكون (س ، ٢ ص) ∈ بيان ر

* منحنى الدالة ى : ى (س) = $\frac{1}{2}$ | س | هو انكماش رأسى لمنحنى الدالة
د : د (س) = | س |
لأن : ٠ < أ < ١

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ بيان د يكون (س ، $\frac{1}{2}$ ص) ∈ بيان ى

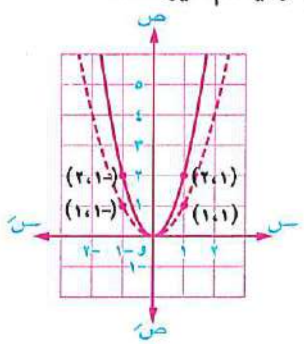
مثال ٥

استخدم منحنى الدالة د : د (س) = س^2 فى رسم كل من المنحنيات الآتية :

[١] ر (س) = ٢ د (س) [٢] ى (س) = $-\frac{1}{2}$ د (س) [٣] هـ (س) = ٢ د (س − ١) − ٣

ومن الرسم عين مدى كل منها وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

الحل

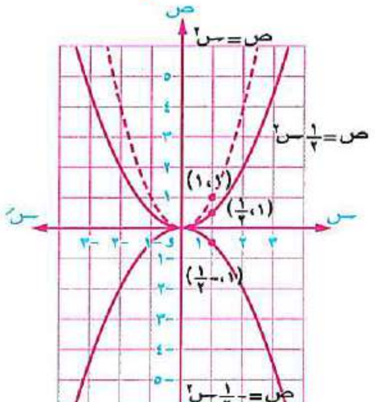


[١] ر (س) = ٢ د (س) = ٢ س^2

∴ منحنى الدالة ر هو تمدد رأسى لمنحنى الدالة د فيه أ = ٢ > ١

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ بيان د يكون (س ، ٢ ص) ∈ بيان ر

* مدى ر = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى الفترة]− ∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة ر زوجية.



[٢] ى (س) = $-\frac{1}{2}$ د (س) = $-\frac{1}{2}$ س^2

∴ منحنى الدالة ى هو انكماش رأسى لمنحنى الدالة د فيه
أ = $\frac{1}{2}$ < ١ ثم انعكاس فى محور السينات.

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ د يكون (س ، $-\frac{1}{2}$ ص) ∈ ى

* مدى ى =]− ∞ ، ٠]
* الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠[وتناقصية فى]٠ ، ∞[
* الدالة ى زوجية.

٣ هـ (س) = ٢ د (س − ١) − ٣ = ٢ (س − ١)^{٢} − ٣

∴ منحنى الدالة هـ هو تمدد رأسى للدالة د فيه أ = ٢ > ١

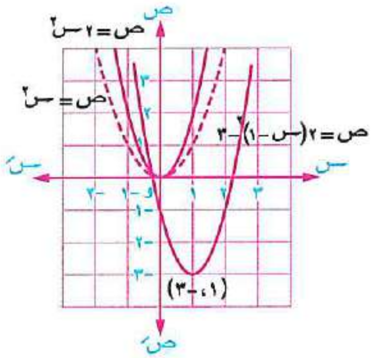
ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه و س

يليها إزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص َ

* مدى هـ = [−٣ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ١[وتزايدية فى]١ ، ∞[

* الدالة هـ ليست زوجية وليست فردية.



ملاحظتان

لأى دالة د كثيرة حدود :

١ المنحنى ص = | د (س) | أى ص = { د (س) ، د (س) ≥ ٠ ؛ − د (س) ، د (س) < ٠ }

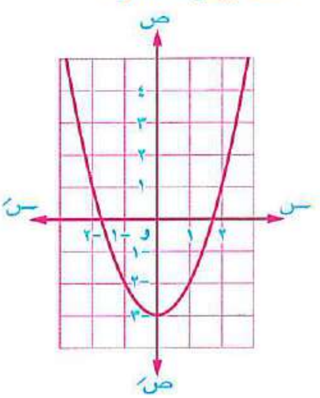
يمثله بيانيًا المنحنى ص = د (س) مع استبدال الجزء من المنحنى أسفل محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات.

٢ المنحنى ص = − | د (س) | أى ص = { − د (س) ، د (س) ≥ ٠ ؛ د (س) ، د (س) < ٠ }

يمثله بيانيًا المنحنى ص = د (س) مع استبدال الجزء من المنحنى أعلى محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات.

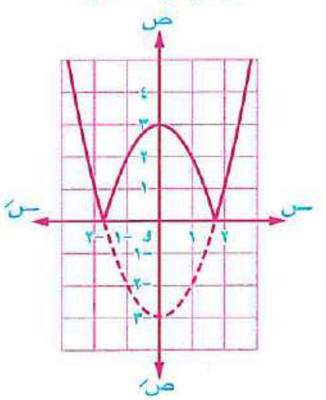
فمثلًا : ص = س^{٢} − ٣

تمثل بيانيًا كالتالى :



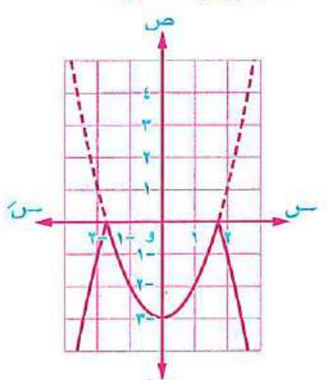
ص = | س^{٢} − ٣ |

تمثل بيانيًا كالتالى :



ص = − | س^{٢} − ٣ |

تمثل بيانيًا كالتالى :



مثال ٦

مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مداها وعين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك :

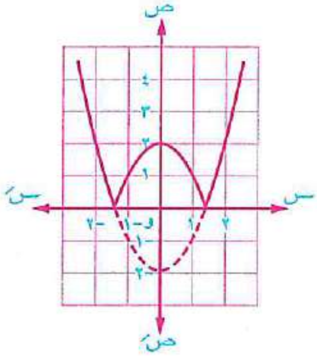
[١] د (س) = $|س^{٢} - ٢|$ [٢] د (س) = $- |س^{٣}|$ [٣] د (س) = $|س^{٣}| + ١$

الحــل

[١] بفرض أن : ر (س) = $س^{٢} - ٢$

منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة ر مع استبدال الجزء من المنحنى أسفل محور السينات بصورته بالانعكاس في محور السينات.

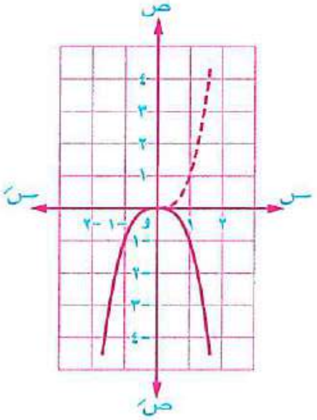
* مدى د = [٠ ، ∞[* الدالة د زوجية.



[٢] بفرض أن : ر (س) = $س^{٣}$

منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة ر مع استبدال الجزء من المنحنى أعلى محور السينات بصورته بالانعكاس في محور السينات.

* مدى د =]- ∞ ، ٠]
* الدالة د زوجية.

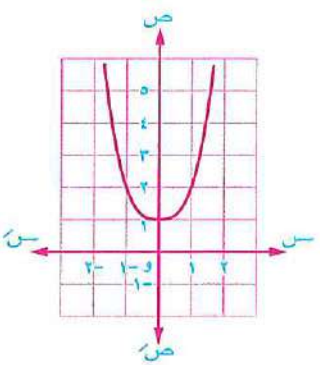


[٣] بفرض أن : ر (س) = $س^{٣}$

∴ د (س) = | ر (س) | + ١

منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة ر مع استبدال الجزء من المنحنى أسفل محور السينات بصورته بالانعكاس في محور السينات ثم إزاحته رأسيًا في اتجاه $\overrightarrow{وص}$ وحدة واحدة.

* مدى د = [١ ، ∞[* الدالة د زوجية.



مثال ٧

مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها وتماثلها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

[١] د (س) = س | س | + ٢ [٢] د (س) = $س^{٢} - |س| - ٣$

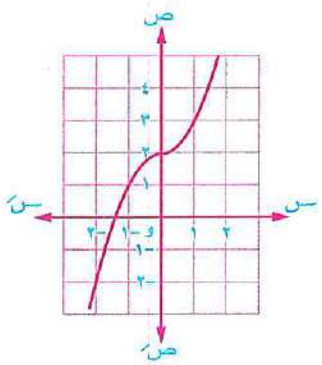
[٣] د (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٦ س + ٩}$

الحل

١ د (س) = { س (س) + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ س (− س) + ٢ ، س < ٠ }

= { س^{٢} + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ − س^{٢} + ٢ ، س < ٠ }

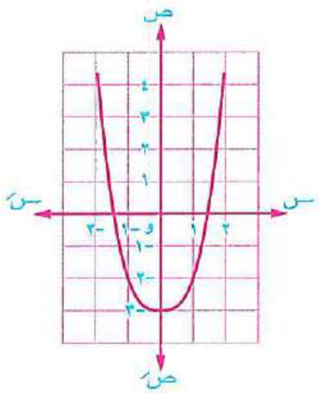
* مجال د = ح ، مدى د = ح
* الدالة تزايدية على مجالها ح
* الدالة متماثلة حول النقطة (٠ ، ٢)
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.



٢ د (س) = { س^{٢} (س) − ٣ ، س ≥ ٠ ؛ س^{٢} (− س) − ٣ ، س < ٠ }

= { س^{٣} − ٣ ، س ≥ ٠ ؛ − س^{٣} − ٣ ، س < ٠ }

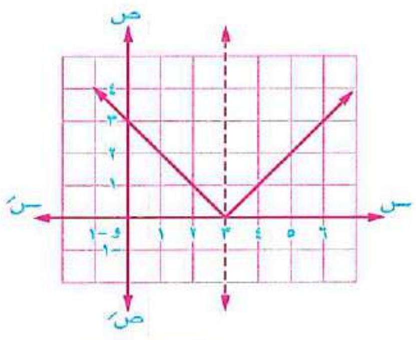
* مجال د = ح ، مدى د = [−٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة متماثلة حول محور الصادات * الدالة زوجية.



٣ د (س) = $\sqrt{(س − ٣)^{٢}}$ = | س − ٣ |

∴ الدالة د يمثلها بيانيًا المنحنى ص = | س |
بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و س→

* مجال د = ح ، مدى د = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٣[وتزايدية فى]٣ ، ∞[
* الدالة متماثلة حول المستقيم س = ٣
* الدالة ليست فردية وليست زوجية.



لاحظ أن

$\sqrt{س^{٢}}$ = | س |

معلومة إثرائية

إذا كانت : د (س) دالة حقيقية فإن :

صورة منحنى الدالة د (س) بالانعكاس
- فى محور الصادات — **تكون منحنى الدالة** — ص = د (− س)
- فى محور السينات — **تكون منحنى الدالة** — ص = − د (س)
- فى نقطة الأصل — **تكون منحنى الدالة** — ص = − د (− س)

تمارين 5 على التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية

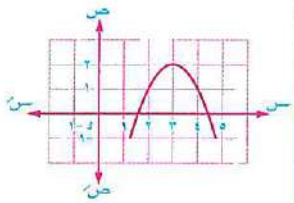
اختبر نفسك

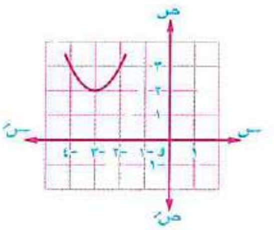
من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

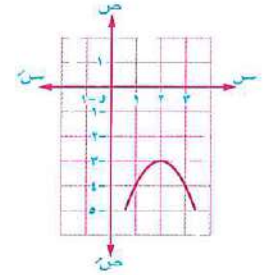
أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

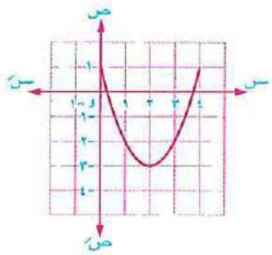
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = – (س – ٣)^{٢} + ٢ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....

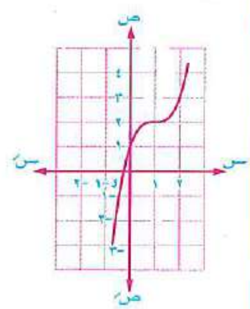

(أ)

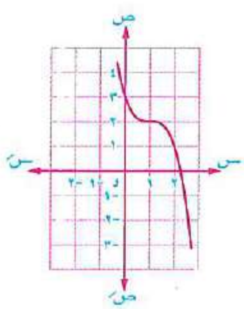

(ب)

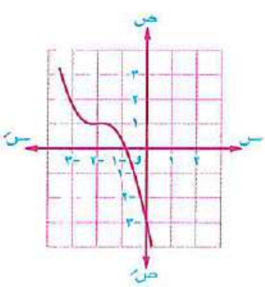

(جـ)

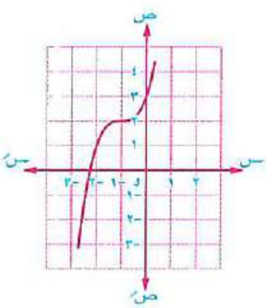

(د)

(٢) إذا كانت : د (س) = ٢ – (س – ١)^{٣} فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....

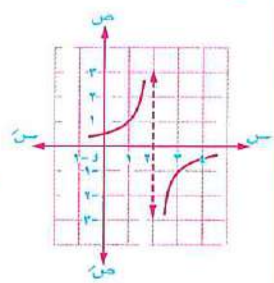

(أ)

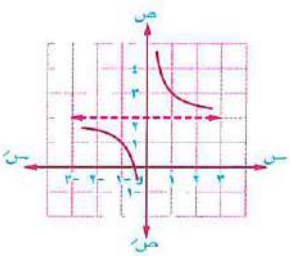

(ب)

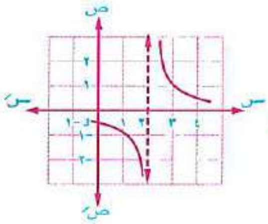

(جـ)

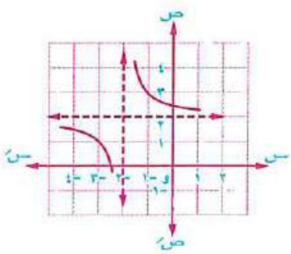

(د)

(٣) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س – ٢}$ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....

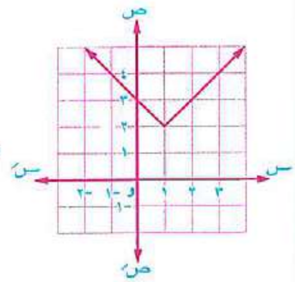

(أ)


(ب)

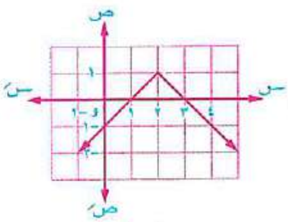

(جـ)


(د)

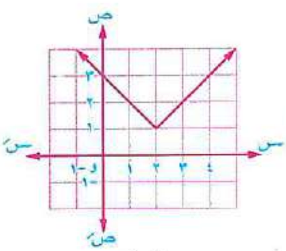
(٤) إذا كانت د : د (س) = ١ − | س − ٢ | فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



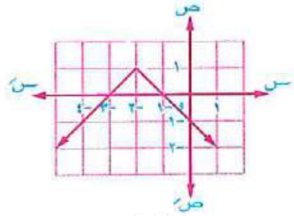
(أ)



(ب)



(جـ)



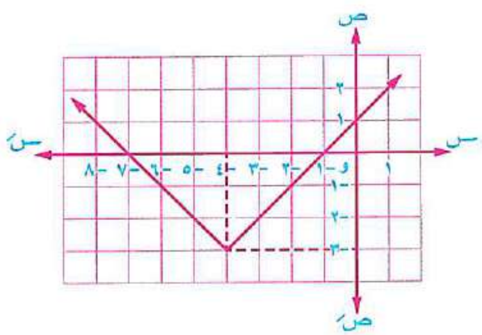
(د)

(٥) إذا أُزيح منحنى الدالة ر : ر (س) = س^{٢} بمقدار وحدتين موجبتين فى اتجاه كل من المحورين فإنه يمثله الدالة د : ....

(أ) د (س) = (س + ٢)^{٢} + ٢　　(ب) د (س) = (س + ٢)^{٢} − ٢

(جـ) د (س) = (س − ٢)^{٢} − ٢　　(د) د (س) = (س − ٢)^{٢} + ٢

(٦) أى من قواعد الدوال الآتية تمثل المنحنى المرسوم فى الشكل المقابل ؟



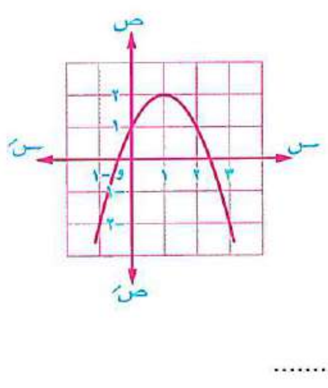
(أ) د (س) = | س − ٤ | − ٣

(ب) د (س) = | س − ٤ | + ٣

(جـ) د (س) = | س + ٤ | − ٣

(د) د (س) = | س + ٤ | + ٣

(٧) أى من قواعد الدوال الآتية تمثل المنحنى المرسوم فى الشكل المقابل ؟



(أ) د (س) = (س − ١)^{٢} + ٢

(ب) د (س) = ١ − (س − ٢)^{٢}

(جـ) د (س) = ٢ − (س − ١)^{٢}

(د) د (س) = (س + ١)^{٢} − ٢

(٨) نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = (٢ − س)^{٢} + ٣ هى ....

(أ) (٢ ، ٣)　　(ب) (٢ ، −٣)　　(جـ) (−٢ ، ٣)　　(د) (−٢ ، −٣)

(٩) نقطة تماثل الدالة د : د (س) = س^{٣} − ٢ هى ....

(أ) (٠ ، ٢)　　(ب) (٠ ، −٢)　　(جـ) (٢ ، ٠)　　(د) (−٢ ، ٠)

(١٠) نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = ٣ − (س + ٢)^٢ هو ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (٢ ، ٣) (جـ) (−٢ ، ٣) (د) (−٢ ، −٣)

(١١) نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د (س) = ١ / (س − ٣) + ٤ هى ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (−٣ ، −٤) (جـ) (٣ ، ٤) (د) (−٣ ، ٤)

(١٢) نقطة تماثل الدالة د : د (س) = (س + ١) / س هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (١ ، −١)

(١٣) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = ١ / س فإن نقطة التماثل للدالة ر : ر (س) = د (س + ١) هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (−١ ، ٠) (د) (−١ ، ١)

(١٤) إذا كانت د (س) = أ / (ب − س) + جـ حيث أ ، ب ، جـ ∈ ح نقطة تماثلها هى (٣ ، ٣) فإن : أ^(ب+جـ) = ...

(أ) أ^٩ (ب) ١ (جـ) أ^٦ (د) −١

(١٥) نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = |س + ٣| − ٢ هى ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (−٣ ، −٢) (جـ) (−٣ ، ٢) (د) (٣ ، −٢)

(١٦) منحنى الدالة د : د (س) = |س − ٢| متماثل حول المستقيم ....

(أ) س = ٢ (ب) س = −٢ (جـ) ص = ٢ (د) ص = −٢

(١٧) محور تماثل الدالة د : د (س) = س^٢ − ١ هو المستقيم ....

(أ) س = ١ (ب) س = ٠ (جـ) ص = ١ (د) ص = ٠

(١٨) إذا كانت د (س) = ١ / |س| فإن معادلة محور تماثل منحنى الدالة د هو ....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = −س

(١٩) الدالة د : د (س) = (س − ١)^٢ + ٢ تكون متزايدة فى الفترة ....

(أ) ح (ب)]١ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ١[(د)]−١ ، ١[

(٢٠) الدالة د حيث د (س) = (٢س − ١) / (س − ١) تناقصية فى الفترة ....

(أ)]−∞ ، ١] (ب)]−∞ ، ١[،]١ ، ∞[
(جـ) [١ ، ∞[(د)]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

(٢١) المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د : د (س) = |س + ٢| − ٢ ، محور السينات تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٤

(٢٢) مدى الدالة د : د (س) = ١ / |س| هو ....

(أ) ح − {٠} (ب)]٠ ، ∞[(جـ) [٠ ، ∞[(د) {٠}

(٢٣) مدى الدالة د (س) = ٣ − (٢ − س)^٢ هو ....

(أ)]−∞ ، ٢]　　(ب) [٢ ، ∞[　　(ج)]−∞ ، ٣]　　(د) [٣ ، ∞[

(٢٤) مدى الدالة د : د (س) = (٢ س^٢ − ٢ س) / (س − ١) يساوى ....

(أ) ح − {١}　　(ب) ح − {٢}

(ج) ح − {١ ، ٢}　　(د) ح − {٠ ، ١}

(٢٥) مدى الدالة د : د (س) = ٢ − ٣ / (س − ١) هو ....

(أ) ح　　(ب) ح − {١}　　(ج) ح − {٢}　　(د) ح − {٣}

(٢٦) مدى الدالة د : د (س) = ٢ − | ٣ − ٢ س | هو ....

(أ)]−∞ ، ٢]　　(ب) [−٢ ، ∞[　　(ج)]٣/٢ ، ∞[　　(د)]−∞ ، −٢]

(٢٧) مدى الدالة د حيث : د (س) = − | س^٣ | هى ....

(أ) ح　　(ب) [٠ ، ∞[　　(ج)]−∞ ، ٠]　　(د) ح − {٠}

(٢٨) مدى الدالة د : د (س) = س | س | هى ....

(أ) ح^+　　(ب) ح^−　　(ج) ح　　(د) [٠ ، ∞[

(٢٩) مدى الدالة د : د (س) = | س | / س هو ....

(أ)]٠ ، ∞[　　(ب)]−∞ ، ٠[　　(ج) ح − {٠}　　(د) {١ ، −١}

(٣٠) مدى الدالة د : د (س) =
- −١/س ، س < −١
- | س | ، −١ ≤ س ≤ ١
- ١/س ، س > ١

هو ....

(أ)]٠ ، ١]　　(ب) [٠ ، ١]　　(ج)]٠ ، ∞[　　(د) ح − {٠}

(٣١) مدى الدالة د : د (س) =
- س − ١ ، س < ١
- ٣ ، س > ١

هو ....

(أ) ح − [٠ ، ١]　　(ب) ح − {١}

(ج)]−∞ ، ٠[∪ {٣}　　(د)]−∞ ، ٠[∩ {٣}

(٣٢) منحنى الدالة د : د (س) = ١ / (س − ٣) + ٤ لا يقطع الخط المستقيم الذى معادلته ....

(أ) س = −٣　　(ب) س = ٣　　(ج) ص = −٤　　(د) ص = ٣

(٣٣) إذا كان المنحنى ص = د (س) يمثل دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها ٣ وحدات رأسيًا لأعلى هو المنحنى ر (س) = ...

(أ) د (س − ٣)　　(ب) د (س + ٣)　　(ج) د (س) + ٣　　(د) د (س) − ٣

(٣٤) إذا كان المنحنى ص = د (س) يمثل دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها ٥ وحدات رأسيا لأسفل هو المنحنى ر (س) = ...

(أ) د (س − ٥) (ب) د (س + ٥) (جـ) د (س) + ٥ (د) د (س) − ٥

(٣٥) منحنى ر (س) = $س^٢$ + ٤ هو نفس منحنى د (س) = $س^٢$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{وس}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{وس}'}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{وص}}$ (د) $\overleftarrow{\text{وص}'}$

(٣٦) منحنى الدالة ر حيث : ر (س) = |س| − ٢ هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = |س| بإزاحة مقدارها وحدتان في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{وس}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{وس}'}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{وص}}$ (د) $\overleftarrow{\text{وص}'}$

(٣٧) إذا كانت : د دالة حقيقية مجالها [−٣ ، ٤] فإن مجال الدالة ر : ر (س) = د (س) + ٢ هو ....

(أ) [−٣ ، ٤] (ب) [−١ ، ٦] (جـ) [−٥ ، ٢] (د) ح

(٣٨) منحنى الدالة ر : ر (س) = $\frac{١}{|س|}$ + ٢ هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س|}$ بإزاحة مقدارها وحدتين في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{وس}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{وس}'}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{وص}}$ (د) $\overleftarrow{\text{وص}'}$

(٣٩) منحنى ر (س) = |س + ٣| هو نفس منحنى د (س) = |س| بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{وس}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{وس}'}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{وص}}$ (د) $\overleftarrow{\text{وص}'}$

(٤٠) إذا كانت : ص = د (س) دالة حقيقية فإن صورتها بإزاحة قدرها ٤ وحدات جهة اليسار هي ر (س) = ...

(أ) د (س − ٤) (ب) د (س + ٤) (جـ) د (س) + ٤ (د) د (س) − ٤

(٤١) إذا كانت : د دالة حقيقية مجالها [−٢ ، ٣] فإن مجال الدالة ر : ر (س) = د (س − ٢) هو ....

(أ) [−٢ ، ٣] (ب) [−٤ ، ١] (جـ) [٠ ، ٥] (د) ح

(٤٢) بفرض أن د (س) = − $س^٢$ ينتقل ٣ وحدات لليمين ووحدتان لأسفل وكان المنحنى الناتج هو ر (س) فإن : ر (٤) = ...

(أ) −٣ (ب) −١٦ (جـ) ١٦ (د) −٧

(٤٣) نفرض أن المنحنى : د (س) = − $س^٣$ ينتقل ٤ وحدات لليسار ووحدتان لأعلى وكان المنحنى الناتج هو ر (س) فإن : ر (−٢) = ...

(أ) −٢١٨ (ب) ٢١٤ (جـ) ٦ (د) −٦

(٤٤) منحنى الدالة ر : ر (س) = س هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = ... بالانعكاس على محور السينات.

(أ) س　　(ب) − س　　(جـ) س + ١　　(د) − س + ١

(٤٥) إذا كانت د دالة كثيرة حدود مداها]− ∞ ، ٢] فإن مدى الدالة ر حيث ر (س) = |د (س)| هو ....

(أ)]− ∞ ، ٢]　　(ب) [٢ ، ∞[　　(جـ)]٠ ، ∞[　　(د) [٠ ، ∞[

(٤٦) المنحنى ر (س) = ١ − |س| هو نفس المنحنى د (س) = |س| بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة مقدارها وحدة واحدة فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$　　(ب) $\overleftarrow{\text{و س}}$َ　　(جـ) $\overleftarrow{\text{و ص}}$　　(د) $\overleftarrow{\text{و ص}}$َ

ثانيًا / الأسئلة المقالية

١ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب معادلة محور تماثلها :

(١) ر (س) = س^{٢} − ٣
(٢) ر (س) = ٢ − س^{٢}
(٣) ر (س) = − (س − ٣)^{٢}
(٤) ر (س) = (س + ٢)^{٢} − ٤
(٥) ر (س) = (س + $\frac{٣}{٢}$)^{٢} − $\frac{١}{٢}$
(٦) ر (س) = $\frac{-١}{٢}$ س^{٢}
(٧) ر (س) = س^{٢} + ٤ س + ٤
(٨) ر (س) = س^{٢} + ٤ س + ١

٢ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٣} لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب نقطة تماثلها :

(١) ر (س) = س^{٣} + ٤
(٢) ر (س) = (س − ٣)^{٣}
(٣) ر (س) = (٢ − س)^{٣}
(٤) ر (س) = ٢ − (س − ١)^{٣}
(٥) ر (س) = (٣ − س)^{٣} + ١
(٦) ر (س) = ٢ س^{٣} − ١

٣ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = |س| لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك و اكتب معادلة محور تماثلها :

(١) ر (س) = |س| − ٣
(٢) ر (س) = ٢ − |س|
(٣) ر (س) = − |س + ٥|
(٤) ر (س) = |٢ − س| + ١
(٥) ر (س) = ٤ − |س − ٢|
(٦) ر (س) = ٢ |س|
(٧) ر (س) = ٢ |س − ٧| + ٢
(٨) ر (س) = ٥ − ٢ |س + ٢|
(٩) ر (س) = ١ − | $\frac{١}{٢}$ س − ١ |
(١٠) ر (س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٦}$

٤ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب نقطة تماثلها :

① ر (س) = $\frac{١}{س}$ + ٢

② ر (س) = $\frac{-١}{س + ٢}$

③ ر (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣

④ ر (س) = $\frac{١}{٤ - س}$ - ٣

⑤ ر (س) = $\frac{س - ٣}{س - ٢}$

⑥ ر (س) = $\frac{٢ س}{س + ١}$

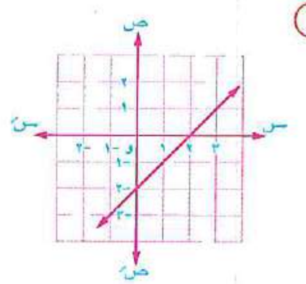
⑦ ر (س) = $\frac{٣ س - ٥}{س - ٢}$

⑧ ر (س) = $\frac{س - ١}{س^٢ - ١}$

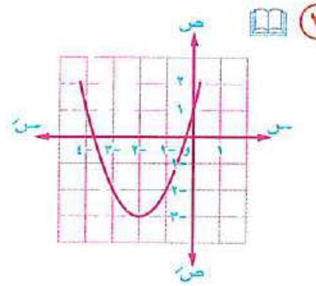
---

٥ اكتب قاعدة الدالة د الممثلة بيانيًا بكل من الأشكال الآتية :

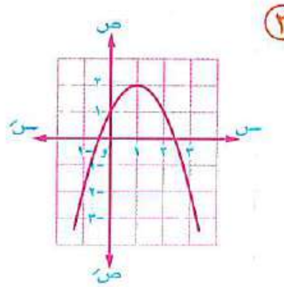
①



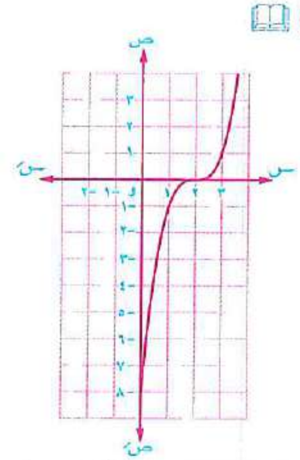
②



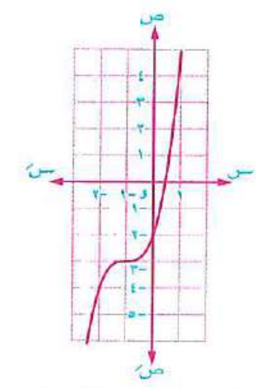
③



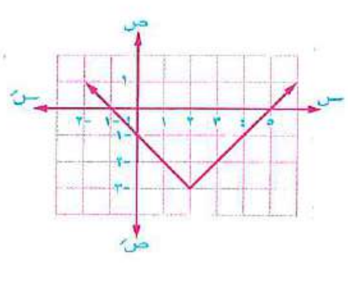
④



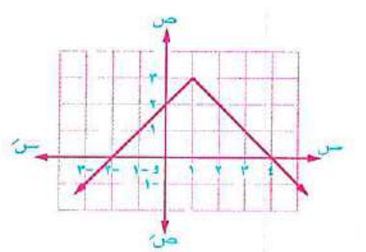
⑤



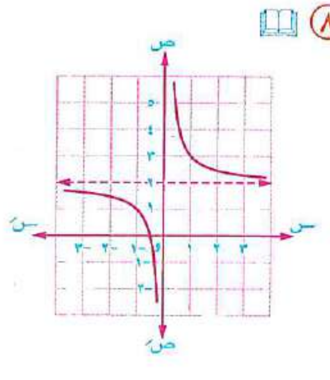
⑥



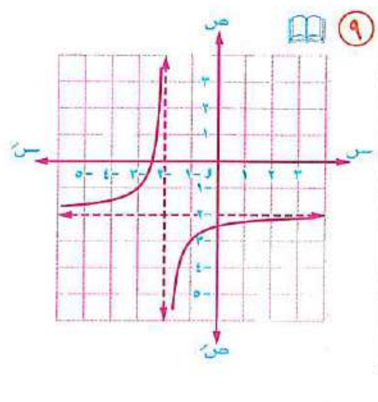
⑦



⑧



⑨



٦ إذا كانت د ، ر ، ه ، ن دوال حقيقية حيث د (س) = $س^{٢}$ ، ر (س) = $س^{٣}$
، ه (س) = | س | ، ن (س) = $\frac{١}{س}$ فمثل كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية موضحًا مجالها ومداها :

① $د_{١}$ (س) = د (س + ١)
② $د_{٢}$ (س) = د (س) − ١
③ $د_{٣}$ (س) = ٢ − د (س − ١)
④ $ر_{١}$ (س) = ر (س − ١)
⑤ $ر_{٢}$ (س) = ر (س) − $\frac{١}{٢}$
⑥ $ر_{٣}$ (س) = ر (س − ١) + ٢
⑦ $ه_{١}$ (س) = ٢ ه (س)
⑧ $ه_{٢}$ (س) = $\frac{١}{٢}$ ه (س) − ٣
⑨ $ه_{٣}$ (س) = ٢ ه (س − ١)
⑩ $ن_{١}$ (س) = ن (س − ٢)
⑪ $ن_{٢}$ (س) = ن (س) − ١
⑫ $ن_{٣}$ (س) = ٢ − ن (س + ١)

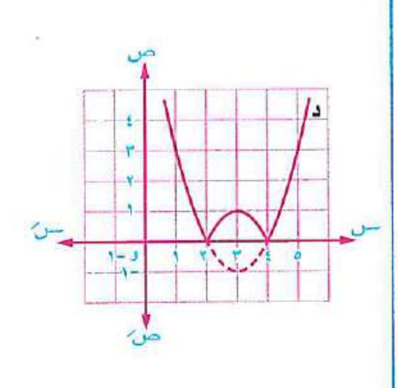
٧ ارسم منحنى الدالة د فى كل مما يأتى وعين مداها وابحث اطرادها :

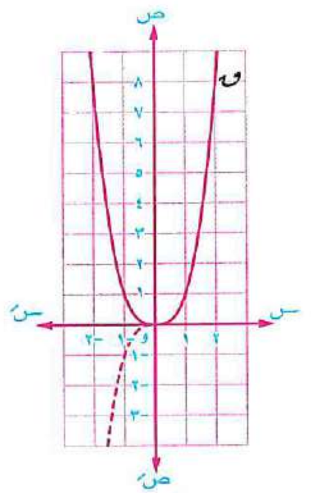
① د (س) = { $س^{٢}$ + ١ ، −٤ ≤ س < ٠ ؛ −$س^{٢}$ − ١ ، ٠ ≤ س ≤ ٤ }

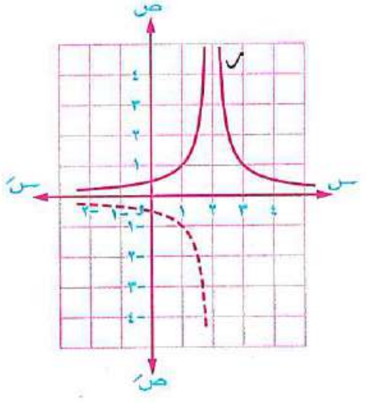
② د (س) = { $(س − ١)^{٣}$ ، س ≥ ٠ ؛ −١ ، س < ٠ }

③ د (س) = { $(س + ١)^{٣}$ + ٢ ، س ≤ −١ ؛ $\frac{١}{س + ١}$ + ١ ، س > −١ }

٨ تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د ، ه ، ر على الترتيب. اكتب قاعدة الدالة فى كل شكل :


شكل (١)


شكل (٢)


شكل (٣)

٩ إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ر فى كل من الحالات الآتية :

(١) ر (س) = | د (س) |
(٢) ر (س) = − | د (س) |
(٣) ر (س) = ٢ + | د (س) |
(٤) ر (س) = | د (س − ٢) |
(٥) ر (س) = | د (س + ١) | − ٢

---

١٠ ارسم منحنى الدالة د فى كل مما يأتى :

(١) د (س) = س | س |
(٢) د (س) = س | س | − ١
(٣) د (س) = | $س^٣$ |
(٤) د (س) = − | $س^٣$ |
(٥) د (س) = $\frac{س^٤}{|س|}$
(٦) د (س) = $س^٢$ | س | + ٢
(٧) د (س) = $\frac{س^٢}{|س|}$ − ٣
(٨) د (س) = (س − ٢) | س |

---

١١ ارسم منحنى الدالة د وحدد مداها وابحث اطرادها إذا كانت :

(١) د (س) = | ٤ − $س^٢$ |
(٢) د (س) = | $س^٢$ − ٢ س − ٣ | ، س ∈ [−١ ، ٤]

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د دالة كثيرة حدود وكانت د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ١ ، ٠}
فإن المنحنى ر (س) = د (س − ٣) يقطع محور السينات عندما س ∈ ....

(أ) {−٣ ، ١ ، ٠}   (ب) {٣ ، ٠ ، −٢}   (جـ) {٠ ، ٣ ، ٤}   (د) {−٦ ، ٢ ، ٠}

(٢) إذا كانت د : د (س) = (س − أ + ١)^٢ + ب − ٢ دالة تربيعية مداها = [١ ، ∞[، ومنحنى د يمر بالنقطة (٣ ، ٢)   فإن : أ = ...

(أ) ± ٤   (ب) ٣ أ، ٥   (جـ) ٣ أ، −٥   (د) −٣ أ، ٥

(٣) إذا كانت : ر (س) تناقصية فى]− ∞ ، ٠[، وتزايدية فى]٠ ، ∞[
فإن : د (س) = ر (س + ١) تكون متزايدة فى ....

(أ)]−١ ، ∞[(ب)]− ∞ ، −١[(جـ)]٠ ، ∞[(د)]− ∞ ، ٠[

(٤) المنحنى : ص = ٣ (س − ٥)^٢ + ٧ تحت تأثير انتقال ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب للمحور السينى ووحدة فى الاتجاه السالب للمحور الصادى هو ....

(أ) ص = ٣ (س + ٨)^٢ + ٦
(ب) ص = ٣ (س − ٨)^٢ − ٦
(جـ) ص = ٣ (س − ٨)^٢ + ٦
(د) ص = ٣ (س + ٨)^٢ − ٦

(٥) إذا كانت : د (س) = | س | + ٢ فإن مدى الدالة (د ο د) = ...

(أ)]− ∞ ، ٤[(ب) [٤ ، ∞[(جـ) [−٤ ، ٤]   (د) [٠ ، ٤]

(٦) إذا كانت : ر (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − ٨ ، د (س) = |س| فإن مدى الدالة (د ∘ ر) = ...

(أ) [−٨ ، ∞[(ب) [٠ ، ∞[(ج) [٨ ، ∞[(د) ح

(٧) إذا كانت : د دالة فردية فإن : | د (س) | تكون ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) زوجية وفردية معًا. (د) ليست زوجية وليست فردية.

(٨) إذا كانت د : د (س) = { س^{٣} + ٢ ، س > ٠ ؛ ر (س) ، س < ٠ } متماثلة حول نقطة الأصل فإن : ر ....

(أ) تناقصية. (ب) تزايدية. (جـ) ليست أحادية. (د) زوجية.

(٩) إذا كانت د : د (س) = { س^{٣} + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ ر (س) ، س < ٠ } متماثلة حول محور الصادات

فإن : ر (س) = ...

(أ) س^{٣} − ٢ (ب) س^{٣} + ٢ (جـ) − س^{٣} + ٢ (د) − س^{٣} − ٢

---

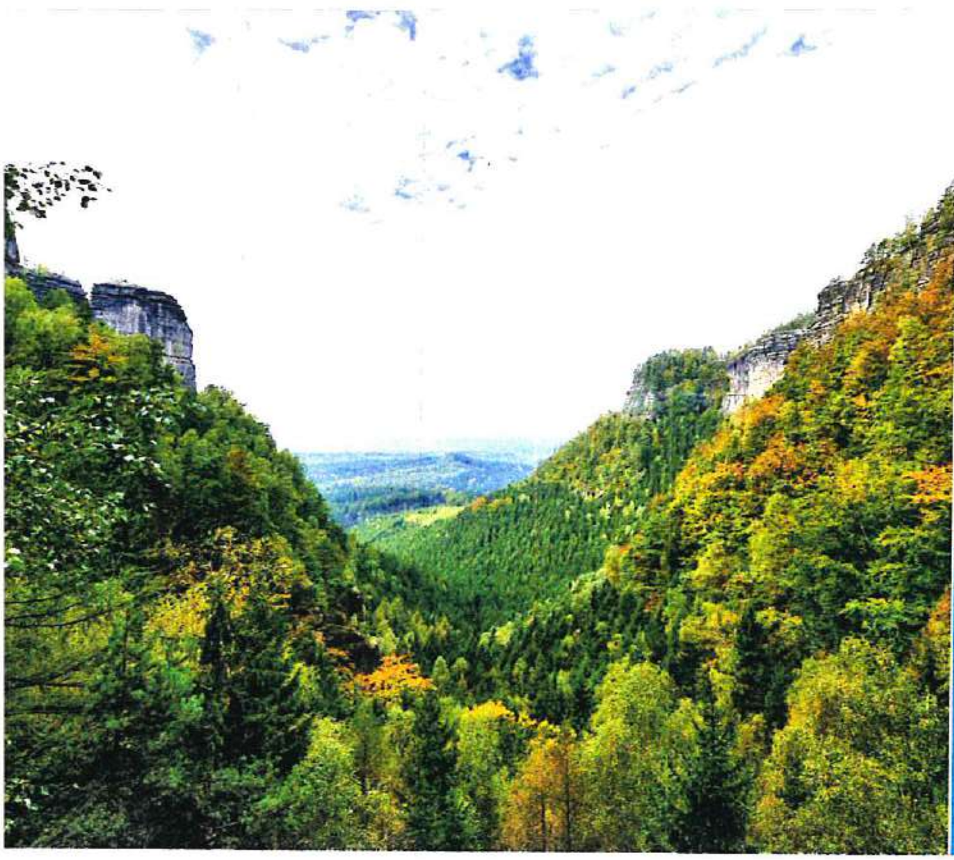
٢ ارسم منحنى الدالة د فى كل مما يأتى ومن الرسم حدد المجال والمدى وابحث الاطراد وبيِّن هل الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك :

(١) د (س) = س^{٣} + س^{٢} | س | + ٢

(٢) د (س) = (| س | − ١)^{٣}

(٣) د (س) = $\frac{| س + ١ |}{س^{٢} + ٣ س + ٢}$

(٤) د (س) = | س + ١ | − | س − ١ |



الدرس

6

حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

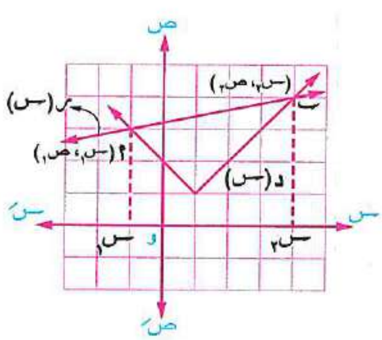
أولاً حـــل معادلات القيمة المطلقة

توجد طريقتان لحل معادلات القيمة المطلقة (المقياس).

١ الطريقة البيانية :

وفيها نستخدم التمثيل البيانى للدوال الحقيقية فى حل المعادلات مع ملاحظة أنه : لأى دالتين د ، ر تكون مجموعة حل المعادلة : د (س) = ر (س) هـى مجموعـة الإحداثيـات السينيـة لنقط تقاطع منحنيى الدالتين د ، ر

ففى الشكل المقابل :



إذا كان منحنيا الدالتين د ، ر يتقاطعان فى النقطتين

أ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$)

فإن مجموعة حل المعادلة :

د (س) = ر (س) فى ح هى {س$_1$ ، س$_2$}

٢ الطريقة الجبرية :

وفيها نستخدم تعريف المقياس وبعض خواص مقياس العدد الحقيقى فى حل المعادلات كما يلى.

تعريف المقياس

إذا كانت : س ∈ ح ، أ ، ب عددين حقيقيين فإن : |س| = { س ، س ≥ ٠   -س ، س < ٠

ومنها |س + أ| = { س + أ ، س ≥ -أ   -س - أ ، س < -أ ، |أس + ب| = { أس + ب ، س ≥ $-\frac{ب}{أ}$ -أس - ب ، س < $-\frac{ب}{أ}$

خواص مقياس العدد الحقيقى

١ |أ| ≥ ٠

٢ |أ ب| = |أ| × |ب|

٣ |أ + ب| ≤ |أ| + |ب|

أى أن مقياس مجموع عددين أصغر من أو يساوى مجموع مقياسيهما ويحدث التساوى إذا كان أ ، ب سالبين معًا أو موجبين معًا أو كليهما يساوى الصفر

فمثلًا : |٤ + (−٧)| < |٤| + |−٧| ، |−٤ + (−٧)| = |−٤| + |−٧|

ملاحظات

1. لأى عدد حقيقى أ يكون |أ| = |−أ| **فمثلًا :** |٣| = |−٣|
2. |أ − س| = |س − أ| **فمثلًا :** |٢ − س| = |س − ٢|
3. |س| = ح ، ح > ٠ ⟺ س = ± ح

   فمثلًا : إذا كان : |س| = ٣ فإن : س = ± ٣

   وإذا كان : أ = ± ٥ فإن : |أ| = ٥
4. إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين فإن : |أ| = |ب| ⟺ أ = ± ب
5. لأى عدد حقيقى أ يكون (|أ|)² = أ² **فمثلًا :** (|−٢|)² = ٤ ، (|−½|)² = ¼
6. لأى عدد حقيقى أ يكون √(أ²) = |أ| **فمثلًا :** √((٥)²) = |٥| = ٥ ، √((−٣)²) = |−٣| = ٣
7. إذا كان : |س| = س فإن : س ∈ [٠ ، ∞[
8. إذا كان : |س| = −س فإن : س ∈]−∞ ، ٠]

١ حل المعادلة على الصورة : |أ س + ب| = ح ، ح ∈ [٠ ، ∞[

«أى مقياس مقدار من الدرجة الأولى = عدد حقيقى غير سالب»

الحل البيانى

الاحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين

د (س) = |أ س + ب|

، ر (س) = ح

الحل الجبرى

1. باستخدام تعريف المقياس.
2. ما بداخل المقياس = ± العدد الحقيقى

ملاحظـة

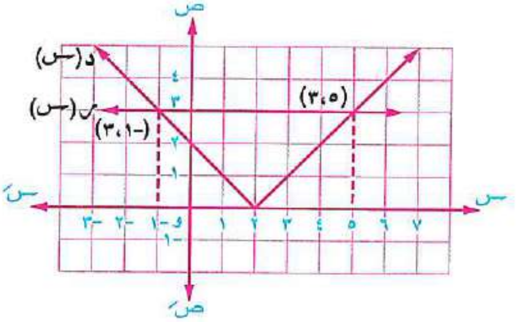
إذا كان | أ س + ب | = حـ ، حـ ∈]-∞ ، ٠[فإن مجموعة الحل فى ح = ∅

فمثلًا : مجموعة حل المعادلة : | ٣ س - ٤ | = -٥ فى ح هى ∅

مثال ١

أوجد بيانيًا ثم جبريًا مجموعة حل المعادلة : | س - ٢ | = ٣

الحـــل



الحل البيانى : بوضع د (س) = | س - ٢ | ، ر (س) = ٣

- نرسم منحنى الدالة

د : د (س) = | س - ٢ |

وهو نفس المنحنى ص = | س |

بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س →

- نرسم منحنى الدالة ر : ر (س) = ٣

وهى دالة ثابتة يمثلها بيانيًا خط مستقيم يوازى محور السينات ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٣)

- نوجد نقطتى تقاطع المنحنيين وهما (-١ ، ٣) ، (٥ ، ٣)

∴ مجموعة الحل فى ح = {-١ ، ٥}

الحل الجبرى : **أولًا : باستخدام تعريف دالة المقياس :**

د (س) = | س - ٢ | = { س - ٢ ، س - ٢ ≥ ٠ ؛ -س + ٢ ، س - ٢ < ٠ } ∴ د (س) = { س - ٢ ، س ≥ ٢ ؛ -س + ٢ ، س < ٢ }

عندما س ≥ ٢ : س - ٢ = ٣ ومنها س = ٥ ∈ [٢ ، ∞[

عندما س < ٢ : -س + ٢ = ٣ ومنها س = -١ ∈]-∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل فى ح = {-١ ، ٥}

ثانيًا : باستخدام الخاصية «ما بداخل المقياس = ± العدد الحقيقى»

∵ | س - ٢ | = ٣ ∴ س - ٢ = ± ٣

∴ س - ٢ = ٣ ومنها س = ٥ أ، س - ٢ = -٣ ومنها س = -١

∴ مجموعة الحل = {٥ ، -١}

٢ حل المعادلة على الصورة : | أ س + ب | = | حـ س + ء |

«أى أن : مقياس مقدار من الدرجة الأولى فى س = مقياس مقدار آخر من الدرجة الأولى فى س»

الحــل البيانــى

الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين

د (س) = | أ س + ب |

، ر (س) = | حـ س + ء |

الحــل الجبــرى

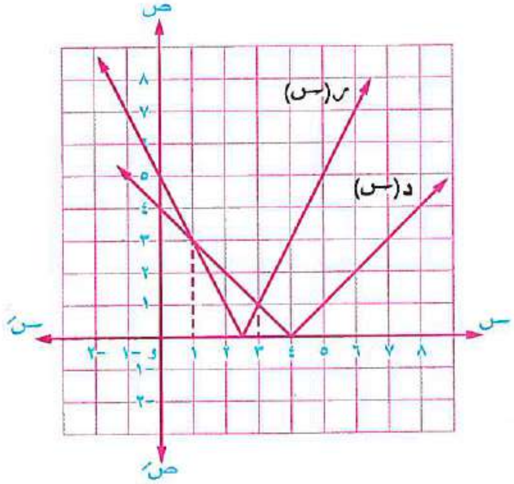
(١) أحد المقدارين = ± المقدار الآخر.

(٢) بتربيع طرفى المعادلة.

مثال ٢

أوجد بيانيًا ثم جبريًا مجموعة حل المعادلة : | س − ٤ | = | ٢ س − ٥ | فى ح

الحـــل



بوضع د (س) = | س − ٤ |

، ر (س) = | ٢ س − ٥ | = ٢ | س − $٢\frac{١}{٢}$ |

الحل البيانى : الدالة د يمثلها بيانيًا المنحنى : ص = | س |

بإزاحة أفقية ٤ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

، الدالة ر يمثلها بيانيًا المنحنى : ص = ٢ | س |

بإزاحة أفقية $٢\frac{١}{٢}$ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

، ∵ المنحنيين يتقاطعان فى النقطتين (١ ، ٣) ، (٣ ، ١)

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٣}

الحل الجبرى : **أولاً : باستخدام الخاصية** : أحد المقدارين = ± المقدار الآخر

∵ | س − ٤ | = | ٢ س − ٥ | ∴ س − ٤ = ± (٢ س − ٥) (من خواص المقياس)

∴ س − ٤ = ٢ س − ٥ ومنها س = ١

أ، س − ٤ = −٢ س + ٥   ∴ ٣ س = ٩ ومنها س = ٣

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٣}

ثانيًا : بتربيع طرفى المعادلة :

∵ $(\text{س} - ٤)^٢ = (٢\text{س} - ٥)^٢$ ∴ $\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ١٦ = ٤\text{س}^٢ - ٢٠\text{س} + ٢٥$

∴ $٣\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٩ = ٠$ ∴ $\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٣ = ٠$

∴ (س − ٣) (س − ١) = ٠   ∴ س = ٣ أ، س = ١

∴ مجموعة الحل = {٣ ، ١}

٣ حل المعادلة على الصورة : | أ س + ب | = حـ س + ء

«أى أن : مقياس مقدار من الدرجة الأولى فى س = مقدار من الدرجة الأولى فى س»

الحل البيانى

الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين

د (س) = | أ س + ب |

، ر (س) = حـ س + ء

الحل الجبرى

نستخدم إعادة تعريف المقياس فنحصل على المعادلتين

أ س + ب = حـ س + ء عند س ≥ -ب/أ

، - أ س - ب = حـ س + ء عند س < -ب/أ

مثال ٣

أوجد بيانيًا ثم جبريًا مجموعة الحل فى ح لكل من المعادلات الآتية :

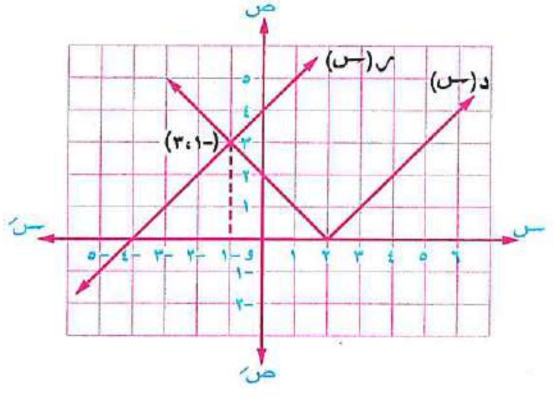
١ | س - ٢ | = س + ٤

٢ | س + ٣ | - ½ س = ٣

٣ | س - ٣ | = ٣ - س

الحل

١ بوضع د (س) = | س - ٢ | ، ر (س) = س + ٤



الحل البيانى :

∵ الدالة د يمثلها بيانيًا المنحنى ص = | س | بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س←

، الدالة ر يمثلها بيانيًا المنحنى ص = س بإزاحة رأسية ٤ وحدات فى اتجاه و ص←

∴ المنحنيان يتقاطعان فى نقطة واحدة (-١ ، ٣)

∴ مجموعة الحل = {-١}

الحل الجبرى : د (س) = | س - ٢ | = { س - ٢ ، س ≥ ٢ ؛ - س + ٢ ، س < ٢ }

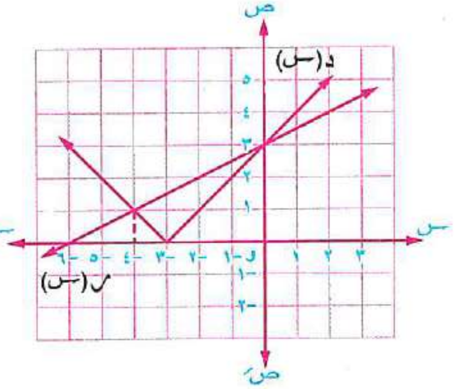
• عندما س ≥ ٢ : س - ٢ = س + ٤ ومنها -٢ = ٤ (غير ممكن) ∴ لا يوجد حل

• عندما س < ٢ : - س + ٢ = س + ٤ ومنها س = -١ ∈]-∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل = {-١}

٢ |س + ٣| = $\frac{١}{٢}$ س + ٣ بوضع د (س) = |س + ٣| ، ر (س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٣

الحل البيانى :



د يمثلها المنحنى ص = |س| بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و س َ ، ر يمثلها

المنحنى ص = س مع انكماش رأسى فيه : أ = $\frac{١}{٢}$

وإزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص

(أى مستقيم ميله = $\frac{١}{٢}$ ويمر بالنقطة (٠ ، ٣))

∴ المنحنيان يتقاطعان فى (٠ ، ٣) ، (-٤ ، ١)

∴ مجموعة الحل = {٠ ، -٤}

الحل الجبرى : د (س) = |س + ٣| = { س + ٣ ، س ≥ -٣ ؛ - س - ٣ ، س < -٣ }

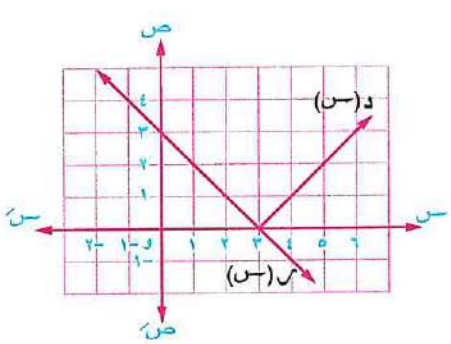
عندما س ≥ - ٣ : س + ٣ = $\frac{١}{٢}$ س + ٣ ومنها س = ٠ ∈ [-٣ ، ∞[

عندما س < - ٣ : - س - ٣ = $\frac{١}{٢}$ س + ٣ ومنها س = -٤ ∈]- ∞ ، -٣[

∴ مجموعة الحل = {٠ ، -٤}

٣ بفرض أن : د (س) = |س - ٣| ، ر (س) = ٣ - س = - س + ٣

الحل البيانى :



د يمثلها بيانيًا المنحنى ص = |س| بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و س ، ر يمثلها بيانيًا

المنحنى ص = س بالانعكاس فى محور السينات

ثم إزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص

∴ المنحنيان يتقاطعان فى عدد لا نهائى من النقط

(س ، ص) بحيث إن : س ∈]- ∞ ، ٣]

∴ مجموعة الحل =]- ∞ ، ٣]

الحل الجبرى : د (س) = |س - ٣| = { س - ٣ ، س ≥ ٣ ؛ - س + ٣ ، س < ٣ }

عندما س ≥ ٣ : ∴ س - ٣ = ٣ - س ∴ ٢ س = ٦

∴ س = ٣ ∈ [٣ ، ∞[

عندما س < ٣ : ∴ - س + ٣ = ٣ - س

وهذه العلاقة تتحقق لجميع قيم س ∈]- ∞ ، ٣[

∴ مجموعة الحل = {٣} ∪]- ∞ ، ٣[=]- ∞ ، ٣]

مثال ٤

أوجد جبريًا مجموعة الحل في ح لكل من المعادلات الآتية :

[١] $|٣س - ٩| - |٣ - س| = ١٠$ [٢] $\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤} + س = ١٠$

[٣] $س^٢ - ٣|س| - ٢٨ = ٠$

الحل

[١] ∵ $|٣س - ٩| - |٣ - س| = ١٠$ ∴ $٣|س - ٣| - |س - ٣| = ١٠$

(لاحظ أن : $|س - ٣| = |٣ - س|$)

∴ $٢|س - ٣| = ١٠$ ∴ $|س - ٣| = ٥$ ∴ $س - ٣ = \pm ٥$

∴ $س - ٣ = ٥$ ومنها $س = ٨$

أ، $س - ٣ = -٥$ ومنها $س = -٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{٨ ، -٢\}$

[٢] ∵ $\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤} + س = ١٠$ ∴ $\sqrt{(س-٢)^٢} = ١٠ - س$

∴ $|س - ٢| = ١٠ - س$

، ∵ $|س - ٢| = \begin{cases} س - ٢ & ، س \geq ٢ \\ -س + ٢ & ، س < ٢ \end{cases}$

عندما $س \geq ٢$: $س - ٢ = ١٠ - س$ ومنها $س = ٦ \in [٢ ، \infty[$

، عندما $س < ٢$: $-س + ٢ = ١٠ - س$

∴ $٢ = ١٠$ (وهذا مستحيل)   ∴ مجموعة الحل = $\{٦\}$

[٣] ∵ $|س| = \begin{cases} س & ، س \geq ٠ \\ -س & ، س < ٠ \end{cases}$

∴ $س^٢ - ٣|س| - ٢٨ = \begin{cases} س^٢ - ٣س - ٢٨ & ، س \geq ٠ \\ س^٢ + ٣س - ٢٨ & ، س < ٠ \end{cases}$

، عندما $س \geq ٠$: $س^٢ - ٣س - ٢٨ = ٠$

∴ $(س - ٧)(س + ٤) = ٠$ ومنها $س = ٧ \in [٠ ، \infty[$ أ، $س = -٤ \notin [٠ ، \infty[$

، عندما $س < ٠$: $س^٢ + ٣س - ٢٨ = ٠$

∴ $(س + ٧)(س - ٤) = ٠$ ومنها $س = -٧ \in]-\infty ، ٠[$

أ، $س = ٤ \notin]-\infty ، ٠[$ ∴ مجموعة الحل = $\{٧ ، -٧\}$

حل آخر : ∵ |س|٢ = |س٢| = س٢

∴ |س|٢ − ٣ |س| − ٢٨ = ٠ ∴ (|س| − ٧) (|س| + ٤) = ٠

∴ |س| = ٧ ومنها س = ± ٧ أ، |س| = −٤ (مرفوض)

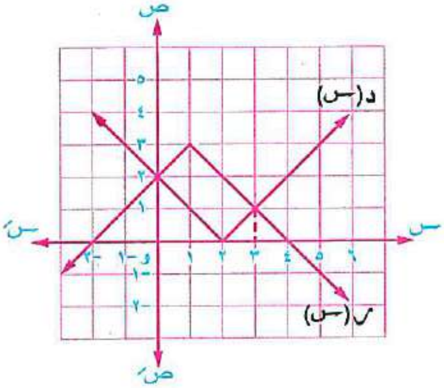
∴ مجموعة الحل = {٧ ، −٧}

مثال ٥

أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين بيانيًا فى ح :

١ |س − ٢| + |س − ١| = ٣ ٢ |س − ٣| = ٣ − |س|

الحـــل



١ |س − ٢| = − |س − ١| + ٣

بوضع د (س) = |س − ٢|

، ر (س) = − |س − ١| + ٣

∵ د يمثلها المنحنى ص = |س|

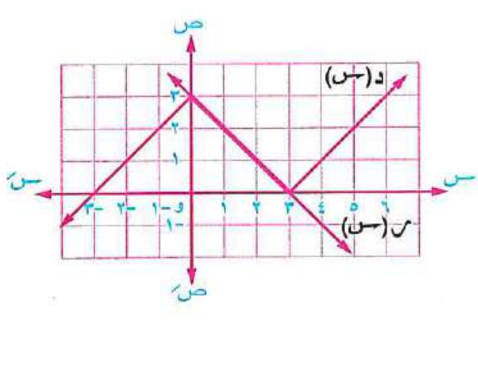
بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س→

، ر يمثلها المنحنى ص = |س|

بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه و س→ وإزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص→

∴ المنحنيان يتقاطعان فى (٠ ، ٢) ، (٣ ، ١) ∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٣}

٢ بوضع د (س) = |س − ٣| ، ر (س) = ٣ − |س|



∴ د يمثلها المنحنى ص = |س|

بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و س→

، ر يمثلها صورة المنحنى ص = |س|

بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص→

∴ المنحنيان يتقاطعان فى عدد لا نهائى من النقط (س ، ص) بحيث س ∈ [٠ ، ٣]

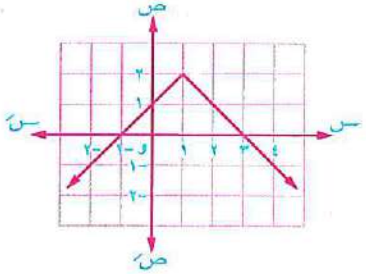
∴ مجموعة الحل = [٠ ، ٣]

مثال ٦

ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = ٢ - | س - ١ |

ومن الرسم استنتج مجموعة الحل للمعادلة : د (س) = ٠

الحل



∵ د (س) = - | س - ١ | + ٢

∴ د يمثلها بيانيًا صورة المنحنى ص = | س | بالانعكاس

فى محور السينات ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه

و س ثم إزاحة رأسية وحدتان فى اتجاه و ص

∴ مجموعة الحل للمعادلة : د (س) = ٠

هى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع الخط البيانى للدالة د مع محور السينات

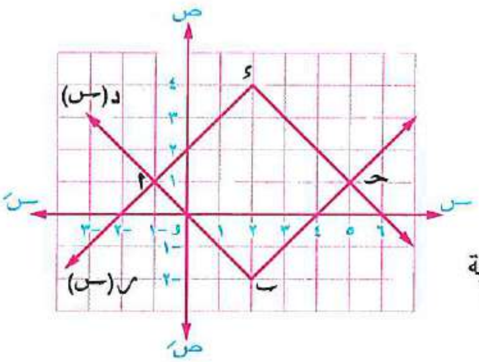
أى مع المستقيم ص = ٠ فنجدها ٣ ، -١ ∴ مجموعة الحل للمعادلة = {٣ ، -١}

مثال ٧

أوجد بالوحدات المربعة المساحة المحصورة بين المنحنيين د ، ر حيث :

د (س) = | س - ٢ | - ٢ ، ر (س) = ٤ - | س - ٢ |

الحل



د يمثلها المنحنى ص = | س | بإزاحة أفقية

وحدتين فى اتجاه و س وإزاحة رأسية

وحدتين فى اتجاه و ص ، ر يمثلها صورة

المنحنى ص = | س | بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة أفقية

وحدتين فى اتجاه و س وإزاحة رأسية ٤ وحدات فى اتجاه و ص

من الرسم :

المساحة المحصورة بين منحنيى الدالتين د ، ر

هى سطح مربع رؤوسه النقط أ (-١ ، ١) ، ب (٢ ، -٢)

، حـ (٥ ، ١) ، ء (٢ ، ٤)

وطول قطره أ حـ = ٥ - (-١) = ٦ وحدة طول

∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المربع أ ب حـ ء = $\frac{١}{٢}$ (أ حـ)^{٢}

= $\frac{١}{٢}$ × ٣٦ = ١٨ وحدة مربعة.

لاحظ أن

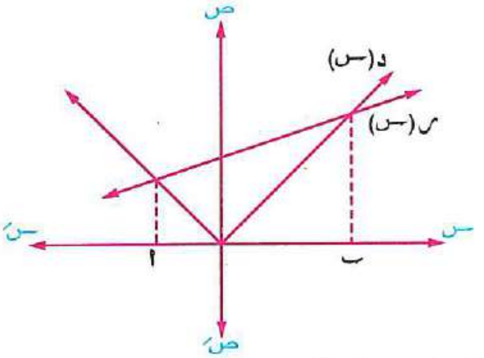
القطرين $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ينصف كل منهما الآخر

ومتعامدان ومتساويان فى الطول

∴ الشكل يمثل مربعًا.

ثانيًا / حـل متباينات القيمة المطلقة

١ الحل البيانى لمتباينات القيمة المطلقة



فى الشكل المقابل : لأى دالتين د ، ر :

• مجموعة حل المتباينة : د (س) < ر (س) هى]أ ، ب[

وهى مجموعة قيم س التى يكون عندها منحنى الدالة د أسفل منحنى الدالة ر

• مجموعة حل المتباينة : د (س) > ر (س) هى]− ∞ ، أ[∪]ب ، ∞[= ح − [أ ، ب]

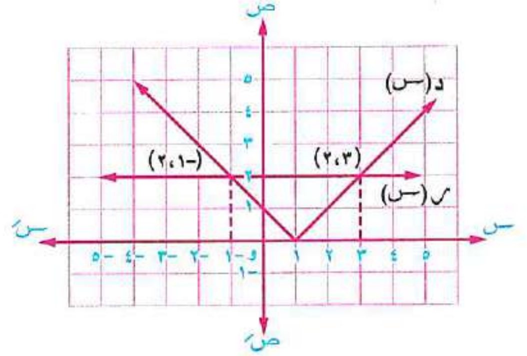
وهى مجموعة قيم س التى يكون عندها منحنى الدالة د أعلى منحنى الدالة ر

لاحظ من الشكل أن : مجموعة حل المعادلة د (س) = ر (س) هى {أ ، ب} ولذلك فإن :

• مجموعة حل المتباينة : د (س) ≤ ر (س) هى [أ ، ب]

• مجموعة حل المتباينة : د (س) ≥ ر (س) هى]− ∞ ، أ] ∪ [ب ، ∞[= ح −]أ ، ب[

فمثلًا فى : الشكل (١)



مجموعة حل المتباينة :

د (س) < ر (س) هى]−١ ، ٣[

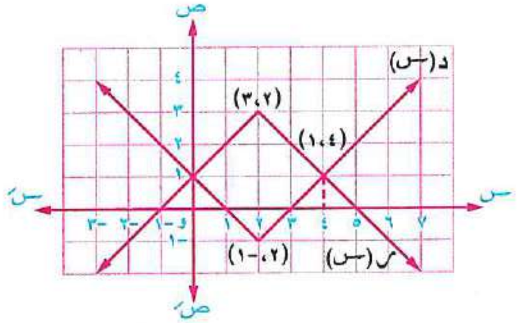
مجموعة حل المتباينة :

د (س) > ر (س) هى ح − [−١ ، ٣]

مجموعة حل المعادلة :

د (س) = ر (س) هى {−١ ، ٣}

الشكل (٢)



مجموعة حل المتباينة :

د (س) < ر (س) هى]٠ ، ٤[

مجموعة حل المتباينة :

د (س) > ر (س) هى ح − [٠ ، ٤]

مجموعة حل المعادلة :

د (س) = ر (س) هى {٠ ، ٤}

مثال ٨

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

١ |س + ٣| < ٢ ‏ ‏ ‏ ٢ |٢ س − ٨| ≤ ٦

٣ |س − ٣| < ½ س ‏ ‏ ‏ ٤ |س − ٢| ≤ ٣ − |س − ٣|

الحـــل

١ بوضع د (س) = |س + ٣| ، ر (س) = ٢

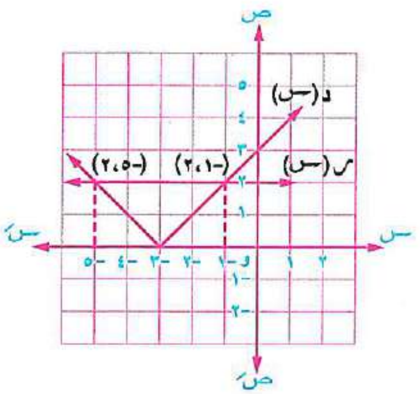
من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر

فى الشكل المقابل ينتج أن :

د (س) < ر (س) أى |س + ٣| < ٢

فى الفترة]−٥ ، −١[

∴ مجموعة حل المتباينة =]−٥ ، −١[



٢ ∵ |٢ (س − ٤)| ≤ ٦

∴ ٢ |س − ٤| ≤ ٦

∴ |س − ٤| ≤ ٣

بوضع د (س) = |س − ٤| ، ر (س) = ٣

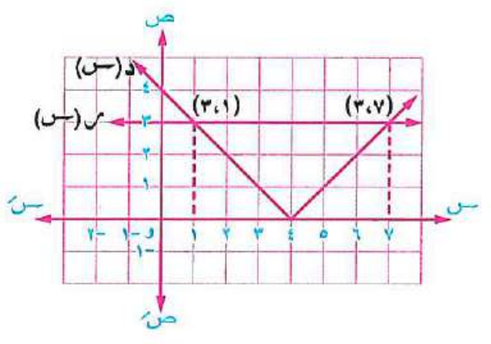
من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر

فى الشكل المقابل ينتج أن :

د (س) ≤ ر (س)

أى |س − ٤| ≤ ٣ فى الفترة [١ ، ٧]

∴ مجموعة حل المتباينة = [١ ، ٧]



٣ بوضع د (س) = |س − ٣| ، ر (س) = ½ س

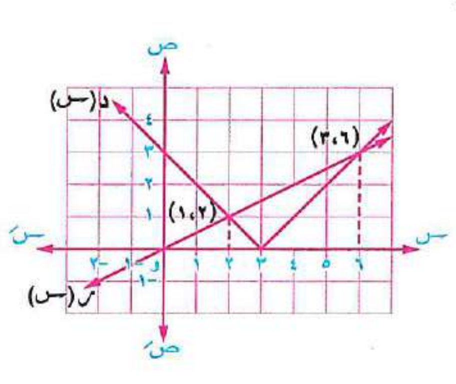
من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر

فى الشكل المقابل ينتج أن : د (س) > ر (س)

أى |س − ٣| > ½ س فى الفترة

]−∞ ، ٢[∪]٦ ، ∞[= ح − [٢ ، ٦]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − [٢ ، ٦]



[٤] بوضع د (س) = | س − ٢ | ، ر (س) = ٣ − | س − ٣ | = − | س − ٣ | + ٣

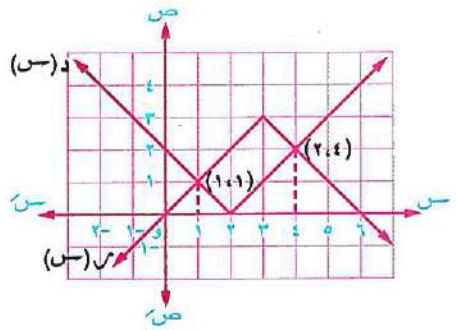
من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر

في الشكل المقابل ينتج أن : د (س) ≤ ر (س) أى :

| س − ٢ | ≤ ٣ − | س − ٣ | في الفترة

]− ∞ ، ١] ∪ [٤ ، ∞[= ح −]١ ، ٤[

∴ مجموعة حل المتباينة = ح −]١ ، ٤[



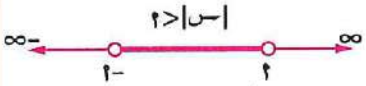
٢ الحل الجبرى لمتباينات القيمة المطلقة

نتائج

* **لكل ٩ ∈ ح⁺**

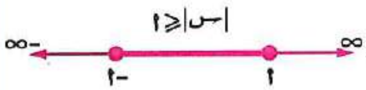
[١] إذا كان : | س | < ٩ فإن : − ٩ < س < ٩

أى أن س ∈]− ٩ ، ٩[



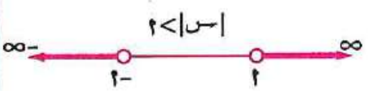
[٢] إذا كان : | س | ≤ ٩ فإن : − ٩ ≤ س ≤ ٩

أى أن س ∈ [− ٩ ، ٩]



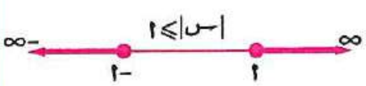
[٣] إذا كان : | س | > ٩ فإن : س > ٩ أو س < − ٩

أى أن س ∈ ح − [− ٩ ، ٩]



[٤] إذا كان : | س | ≥ ٩ فإن : س ≥ ٩ أو س ≤ − ٩

أى أن س ∈ ح −]− ٩ ، ٩[



* **لكل ٩ ∈ ح⁻**

[١] مجموعة حل المتباينة : | س | < ٩ أ، | س | ≤ ٩ في ح تساوى ∅

[٢] مجموعة حل المتباينة : | س | > ٩ أ، | س | ≥ ٩ في ح تساوى ح

مثال ٩

أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

[١] | ٢ س − ٥ | < ١

[٢] | س + ٢ | > ٣

[٣] $\sqrt{\text{٤ س}^{٢} + \text{١٢ س} + ٩}$ ≤ ١

[٤] $\frac{١}{|\text{٣ س} - ١|}$ ≥ ٥

[٥] | ٢ س − ٥ | + | ٥ − ٢ س | < ١٤

الحل

١ ∵ |٢ س − ٥| < ١ ∴ −١ < ٢ س − ٥ < ١

∴ −١ + ٥ < ٢ س < ١ + ٥ ∴ ٤ < ٢ س < ٦ بالقسمة على ٢

∴ ٢ < س < ٣ ∴ مجموعة الحل =]٢ ، ٣[

٢ ∵ |س + ٢| > ٣

∴ س + ٢ > ٣ أو س + ٢ < −٣

∴ س > ١ | ∴ س < −٥

∴ مجموعة الحل = ح − [−٥ ، ١]

> **لاحظ أنه**
>
> عند حل المتباينة : |س + ٢| > ٣
> يمكن أن نحل أولًا المتباينة
> |س + ٢| ≤ ٣ كالتالى
> ∴ −٣ ≤ س + ٢ ≤ ٣
> ∴ −٥ ≤ س ≤ ١ ∴ م.ح = [−٥ ، ١]
> ∴ م.ح المتباينة المطلوبة |س + ٢| > ٣
> هى ح − [−٥ ، ١]

٣ ∵ $\sqrt{٤ س^{٢} + ١٢ س + ٩}$ ≤ ١

∴ $\sqrt{(٢ س + ٣)^{٢}}$ ≤ ١

∴ |٢ س + ٣| ≤ ١ ∴ −١ ≤ ٢ س + ٣ ≤ ١

∴ −٤ ≤ ٢ س ≤ −٢ ∴ −٢ ≤ س ≤ −١

∴ مجموعة الحل = [−٢ ، −١]

٤ ∵ $\frac{١}{|٣ س - ١|}$ ≥ ٥

∴ |٣ س − ١| ≤ $\frac{١}{٥}$

∴ −$\frac{١}{٥}$ ≤ ٣ س − ١ ≤ $\frac{١}{٥}$

∴ $\frac{٤}{٥}$ ≤ ٣ س ≤ $\frac{٦}{٥}$

∴ $\frac{٤}{١٥}$ ≤ س ≤ $\frac{٢}{٥}$

، ∵ |٣ س − ١| = ٠ عندما س = $\frac{١}{٣}$

∴ مجموعة الحل = [$\frac{٤}{١٥}$ ، $\frac{٢}{٥}$] − {$\frac{١}{٣}$}

> **لاحظ أنه**
>
> - إذا كان أ ، ب ∈ $ح^{+}$
>   ، أ > ب فإن $\frac{١}{أ}$ < $\frac{١}{ب}$
> - عند إيجاد مجموعة حل المتباينة يجب استبعاد مجموعة أصفار المقام من مجموعة الحل.

٥ ∵ |٢ س − ٥| + |٥ − ٢ س| < ١٤ ∴ |٢ س − ٥| + |٢ س − ٥| < ١٤

∴ ٢ |٢ س − ٥| < ١٤ وبالقسمة على ٢

∴ |٢ س − ٥| < ٧ ∴ −٧ < ٢ س − ٥ < ٧

∴ −٢ < ٢ س < ١٢ ∴ −١ < س < ٦

∴ مجموعة الحل =]−١ ، ٦[

ثالثًا تطبيقات على خواص معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

مثال ١٠

عين مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = $\frac{٢ س}{|س| - ٣}$

٢ د (س) = $\frac{س^{٢}}{|س - ١| + ٢}$

٣ د (س) = $\sqrt{٤ - |س|}$

٤ د (س) = $\sqrt{|س| - ٢}$

٥ د (س) = $\frac{٢ س}{\sqrt{|س - ٣| - ٢}}$

٦ د (س) = $\frac{س^{٢}}{\sqrt{٣ - |س + ٢|}}$

الحـــل

١ نوجد أصفار المقام : |س| − ٣ = ٠ ∴ |س| = ٣

∴ س = ± ٣ ∴ المجال = ح − {٣ ، −٣}

٢ نوجد أصفار المقام : |س − ١| + ٢ = ٠ ∴ |س − ١| = −٢

، ∵ −٢ < صفر وهذا يتعارض مع تعريف القيمة المطلقة

∴ لا يوجد أصفار للمقام ∴ المجال = ح

٣ تكون الدالة د معرفة بشرط : ٤ − |س| ≥ ٠ ∴ |س| ≤ ٤

∴ −٤ ≤ س ≤ ٤ ∴ المجال = [−٤ ، ٤]

٤ تكون الدالة د معرفة بشرط : |س| − ٢ ≥ ٠ ∴ |س| ≥ ٢

∴ س ≥ ٢ أ، س ≤ −٢

∴ المجال = ح −]−٢ ، ٢[

٥ تكون الدالة د معرفة بشرط : |س − ٣| − ٢ > ٠ ∴ |س − ٣| > ٢

∴ س − ٣ > ٢ أ، س − ٣ < −٢

∴ س > ٥ | س < ١

∴ المجال = ح − [١ ، ٥]

٦ تكون الدالة د معرفة بشرط : ٣ − |س + ٢| > ٠ ∴ |س + ٢| < ٣

∴ −٣ < س + ٢ < ٣ ∴ −٥ < س < ١

∴ المجال =]−٥ ، ١[

مثال ١١

اكتب متباينة القيمة المطلقة التى تعبر عن :

١ درجة طالب فى أحد الاختبارات تتراوح من ٧٠ إلى ٩٠ درجة

٢ العمق الذى تعيش فيه بعض الأسماك تحت سطح الماء فى حوض سمك ارتفاعه الداخلى ٤٠ سم

الحـــل

١ بفرض أن درجة الطالب = سـ درجة

∴ ٧٠ ≤ سـ ≤ ٩٠

(بإضافة −٨٠ إلى أطراف المتباينة)

∴ ٧٠ − ٨٠ ≤ سـ − ٨٠ ≤ ٩٠ − ٨٠

∴ −١٠ ≤ سـ − ٨٠ ≤ ١٠

∴ متباينة القيمة المطلقة هى |سـ − ٨٠| ≤ ١٠

> **لاحظ أن**
> ٨٠ هو الوسط الحسابى للعددين ٧٠ ، ٩٠

٢ بفرض أن العمق الذى تعيش فيه هذه الأسماك = سـ سم

∴ ٠ < سـ < ٤٠ (بإضافة −٢٠ إلى أطراف المتباينة)

∴ ٠ − ٢٠ < سـ − ٢٠ < ٤٠ − ٢٠

∴ −٢٠ < سـ − ٢٠ < ٢٠

∴ متباينة القيمة المطلقة هى |سـ − ٢٠| < ٢٠

> **لاحظ أن**
> ٢٠ هو الوسط الحسابى للعددين ٠ ، ٤٠

مثال ١٢

ابحث نوع كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (سـ) = جتا سـ ÷ (|سـ| − ٣) ٢ د (سـ) = (|٢ + سـ| − |٢ − سـ|) ÷ (|٢ + سـ| + |٢ − سـ|)

الحـــل

١ ∵ د (−سـ) = جتا (−سـ) ÷ (|−سـ| − ٣) = جتا سـ ÷ (|سـ| − ٣) = د (سـ)

∴ الدالة د زوجية.

> **لاحظ أن**
> |سـ| = |−سـ|

٢ ∵ د (−سـ) = (|٢ − سـ| − |٢ + سـ|) ÷ (|٢ − سـ| + |٢ + سـ|)

= −(|٢ + سـ| − |٢ − سـ|) ÷ (|٢ + سـ| + |٢ − سـ|) = − د (سـ)

∴ الدالة د فردية.

تمارين 6

على حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المعادلة : | س − ٢ | = ٣ هى ....

(أ) {٢ ، ٣} (ب) {−١ ، ٥} (جـ) [−١ ، ٥] (د) {٥ ، −٥}

(٢) مجموعة حل المعادلة | ٥ س − ١ | + ٤ = ١ فى ح هى ....

(أ) { $\frac{-٤}{٥}$ } (ب) { $\frac{-٤}{٥}$ ، $\frac{٦}{٥}$ } (جـ) ∅ (د) { $\frac{٦}{٥}$ }

(٣) مجموعة حل المعادلة : | س − ٣ | = | ٣ − س | فى ح هى ....

(أ) {٣} (ب) {٣ ، −٣} (جـ) ح (د) ∅

(٤) مجموعة حل المعادلة : | ٢ س − ٤ | = | س + ١ | هى ....

(أ) {١ ، ٥} (ب) {٥ ، −١} (جـ) {١ ، −٥} (د) {−٥ ، −١}

(٥) مجموعة حل المعادلة : | ٢ س − ١ | = س + ٢ هى ....

(أ) {٣} (ب) {٣ ، $\frac{١}{٣}$ } (جـ) {٣ ، $\frac{-١}{٣}$ } (د) ∅

(٦) مجموعة حل المعادلة : | س − ٢ | = س − ٢ هى ....

(أ) ∅ (ب) {٢} (جـ) [٢ ، ∞[(د) ح

(٧) مجموعة حل المعادلة : $\frac{١}{|س - ٣|}$ = $\frac{١}{٢}$ هى .... حيث س ≠ ٣

(أ) {٥} (ب) {١} (جـ) {٥ ، ١} (د) ∅

(٨) مجموعة حل المعادلة : | س | + س = ٠ هى ....

(أ) {٠} (ب)]−∞ ، ٠] (جـ)]−∞ ، ٠[(د) ∅

(٩) مجموعة حل المعادلة : $\frac{|س|}{س}$ = ١ فى ح هى ....

(أ) {٠} (ب) $ح^+$ (جـ) $ح^-$ (د)]٠ ، ∞[

(١٠) مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{س^٢}$ − ٣ س = ٨ هى ....

(أ) ∅ (ب) {−٢ ، −٤} (جـ) {−٤} (د) {−٢}

(١١) مجموعة حل المعادلة : $س^٢$ = ٢ − | س | هى ....

(أ) {١ ، −١}　(ب) {٢ ، −٢}　(جـ) {١ ، −٢}　(د) {−١ ، ٢}

(١٢) إذا كانت مجموعة حل المعادلة : | س − أ | = ب هى {٥ ، ٩} فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (−٢ ، ٧)　(ب) (٧ ، ٢)　(جـ) (٢ ، ٧)　(د) (−٧ ، ٢)

(١٣) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س^٢}$ + | س | فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٢ فى ح ....

(أ) {٢ ، −٢}　(ب) {١ ، −١}　(جـ) {٢ ، ٠}　(د) {−١ ، ٠}

(١٤) إذا كان : د (س) = | س − ٢ | + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س + ٢) = ٣ هى ....

(أ) {١ ، ٣}　(ب) ح　(جـ) ∅　(د) {−١ ، −٣}

(١٥) إذا كان : د (س) = | س − ٢ | + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س + ٢) = ٦ هى ....

(أ) {٠ ، ٤}　(ب) {٢ ، −٢}　(جـ) {٢ ، ٤}　(د) {−٢ ، −٤}

(١٦) مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{٤ س^٢ − ١٢ س + ٩}$ = ٥ هى ....

(أ) {٤}　(ب) {−١}　(جـ) {٤ ، −١}　(د) ح

(١٧) أى مما يأتى لا ينتمى لمجموعة حل المعادلة | س + ٢ | + | س − ١ | = ٣

(أ) −٢　(ب) صفر　(جـ) −٣　(د) ١

(١٨) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٢}{|س| − ٢}$ هو ....

(أ) ح − {٢}　(ب) ح − {−٢}　(جـ) ح　(د) ح − {٢ ، −٢}

(١٩) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س| + ٣}$ هو ....

(أ) ح　(ب) {٣ ، −٣}　(جـ) ح − {٣ ، −٣}　(د) ح − {٣}

(٢٠) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س}{|س| + أ}$ هو ح − {−٢ ، ٢} فإن : أ = ...

(أ) ٢　(ب) −٢　(جـ) ± ٢　(د) صفر

(٢١) الدالة د : د (س) = $\frac{س\ طا\ س}{|س|}$ من حيث نوعها تكون ....

(أ) فردية.　(ب) زوجية.

(جـ) ليست فردية وليست زوجية.　(د) أحادية.

(٢٢) العبارة الخطأ فيما يلى هى ....

(أ) | س ص | = | س | × | ص |　(ب) | س | = | − س |

(جـ) | س + ص | = | س | + | ص |　(د) $\sqrt{س^٢}$ = | س |

(٢٣) إذا كان : أ > ٠ ، ب < ٠ فإن أى مما يأتى يكون دائمًا سالبًا ؟

(أ) |أ ب|　　(ب) أ |ب|　　(جـ) |أ| ب　　(د) أ + |ب|

(٢٤) إذا كان : $\frac{\text{أ}}{|\text{أ}|}$ = −١ ، $\frac{\text{ب}}{|\text{ب}|}$ = ١ فإن كل العبارات الآتية خطأ ما عدا ....

(أ) أ × ب > ٠　　(ب) أ − ب > ٠　　(جـ) أ − ب = ٠　　(د) أ² + ب > ٠

(٢٥) إذا كان : أ < ٠ < ب فإن : |أ| + |ب| + |ب − أ| − |أ − ب| = ...

(أ) ٢ أ　　(ب) ٢ ب　　(جـ) أ − ب　　(د) ب − أ

(٢٦) عدد نقط تقاطع المنحنيين : ص = |س + ٢| ، ص = ٢ − |س| هو ....

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) عدد لا نهائى.

(٢٧) مجموعة حل المتباينة : |س| > −١ هى ....

(أ)]٠ ، ∞[　　(ب) ح　　(جـ) ∅　　(د) ح − {٠}

(٢٨) مجموعة حل المتباينة : $\frac{١}{|\text{س}|}$ ≥ ١ هى ....

(أ) [−١ ، ١]　　(ب)]−١ ، ١[

(جـ) [−١ ، ١] − {٠}　　(د)]−١ ، ١[− {٠}

(٢٩) مجموعة حل المتباينة : |٣ − س| > ٠ هى ....

(أ)]−٣ ، ٣[　　(ب) ح − [−٣ ، ٣]　　(جـ) ح − {٣}　　(د) ح

(٣٠) مجموعة حل المتباينة : $\frac{١}{|\text{س} - ٢|}$ ≥ $\frac{١}{٢}$ هى ....

(أ)]٠ ، ٤[− {٢}　　(ب) [٠ ، ٤] − {٢}　　(جـ) [٠ ، ٤]　　(د)]٠ ، ٤]

(٣١) مجموعة حل المتباينة : |س + ٣| ≤ ٠ هى ....

(أ) ∅　　(ب)]−∞ ، −٣]　　(جـ) [−٣ ، ∞[　　(د) {−٣}

(٣٢) إذا كان : |س| < أ ، أ ∈ ح⁺ فإن : س ∈ ....

(أ) ح − [−أ ، أ]　　(ب) [−أ ، أ]　　(جـ) ح −]−أ ، أ[　　(د)]−أ ، أ[

(٣٣) مجموعة حل المتباينة : |س − ٢| ≥ −٤ فى ح هى ....

(أ)]−٢ ، ٦[　　(ب) [−٢ ، ٦]　　(جـ) ح　　(د) ∅

(٣٤) مجموعة حل المتباينة : |٢ س − ٥| ≥ ٩ فى ح هى ....

(أ)]−∞ ، ٧[　　(ب) [−٢ ، ٧]　　(جـ) ح −]−٢ ، ٧[　　(د) ح − [−٢ ، ٧]

(٣٥) مجموعة حل المتباينة : |٤ − ٦ س| ≤ ١٤ فى ح هى ....

(أ)]−$\frac{٥}{٣}$ ، ٣[　　(ب) [−$\frac{٥}{٣}$ ، ٣]

(جـ) ح −]−$\frac{٥}{٣}$ ، ٣[　　(د) ح − [−$\frac{٥}{٣}$ ، ٣]

(٣٦) إذا كانت مجموعة حل المتباينة : | س − أ | ≤ ب هى الفترة [−٢ ، ٨] فإن (أ ، ب) = ...

(أ) (٥ ، ٣) (ب) (٣ ، ٥) (جـ) (−٣ ، ٥) (د) (−٥ ، ٣)

(٣٧) إذا كانت : س ∈ [−١ ، ٤] فإن : | ٢ س − ٣ | ≤ ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) −٥

(٣٨) مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^٢ - ٢س + ١}$ ≤ ٤ هى ....

(أ) [−٣ ، ٥] (ب) ح −]−٣ ، ٥[(جـ)]−٣ ، ٥[(د) ح − [−٣ ، ٥]

(٣٩) مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{٤س^٢ - ١٢س + ٩}$ ≥ ٩ هى ....

(أ) [−٦ ، ١٢] (ب) [−٣ ، ٦] (جـ) ح − [−٣ ، ٦] (د) ح −]−٣ ، ٦[

(٤٠) مجموعة حل المتباينة : | ٢ س − ٣ | + | ٦ − ٤ س | ≤ ٢١ هى ....

(أ) [−٢ ، ٥] (ب) ح −]−٢ ، ٥[(جـ)]−٢ ، ٥[(د) {−٢ ، ٥}

(٤١) مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{(س + ٢)^٢}$ + | ٢ س + ٤ | > ٦ فى ح هى ....

(أ) [−٤ ، ٠] (ب) ح − [−٤ ، ٠] (جـ)]−٤ ، ٠[(د) ح −]−٤ ، ٠[

(٤٢) إذا كان : ١ < س < ٢ فإن : $\sqrt{س^٢ - ٢س + ١}$ + $\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}$ = ...

(أ) ٢ س − ٣ (ب) ٢ س − ١ (جـ) ١ (د) ٣

(٤٣) متباينة القيمة المطلقة التى تعبر عن أن درجة الطالب فى أحد الاختبارات (س) تتراوح من ٧٠ إلى ٩٠ درجة هى ....

(أ) | س | ≤ ٩٠ (ب) | س | ≥ ٧٠ (جـ) | س − ٨٠ | ≤ ١٠ (د) | س − ٧٠ | ≤ ٩٠

(٤٤) عدد الحلول التى تنتمى لمجموعة الأعداد الصحيحة للمتباينة | س − ٢ | ≤ ٥ هى ....

(أ) صفر (ب) ٧ (جـ) ٩ (د) ١١

(٤٥) مجموعة حل المتباينة : ٠ < | س − ٢ | < ٥ هى ....

(أ)]٢ ، ٧[(ب)]−٣ ، ٧[(جـ)]−٣ ، ٧[− {٢} (د)]−٥ ، ٥[

(٤٦) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{\sqrt{س^٢} - ١}$ هو ....

(أ) [−١ ، ١] (ب)]−١ ، ١[(جـ) ح − [−١ ، ١] (د) ح −]−١ ، ١[

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على حل معادلات القيمة المطلقة

١ أوجد جبريًا فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) ٤ | س | − ٢٠ = ٠ «{٥ ، −٥}»

(٢) | ٣ − ٢ س | = ٧ «{٥ ، −٢}»

(٣) ٣ − | س + ٢ | = ٢ «{−١ ، −٣}»

(٤) ٢ | س | = ٣ − | س | «{١ ، −١}»

(٥) | س − ٢ | = ٣ س − ٤ «{$\frac{٣}{٢}$}»

(٦) | س + ٢ | − س + ١ = ٠ «∅»

(٧) $|س + ٢| + س - ٢ = ٠$ «{٠}»

(٨) $٥ س - ٢ |س| = ٢١$ «{٧}»

(٩) $|س + ٥| = |س - ٣|$ «{−١}»

(١٠) $|٢ س - ٦| = |س - ٣|$ «{٣}»

(١١) $|س - ١| - ٢ |٢ - س| = ٠$ «{٣ ، $\frac{٥}{٣}$}»

(١٢) $س^٢ - ٥ |س| + ٦ = ٠$ «{٢ ، −٢ ، ٣ ، −٣}»

(١٣) $\sqrt{س^٢} - ٢ س = ٦$ «{−٢}»

(١٤) $\sqrt{س^٢ - ٤ س + ٤} = ٤$ «{−٢ ، ٦}»

(١٥) $|س| + س = ٠$ «$]-\infty ، ٠]$»

(١٦) $|س + ٣| + ٢ س = ٠$ «{−١}»

(١٧) $\sqrt{س^٢ - ٦ س + ٩} + ٢ س = ٩$ «{٤}»

(١٨) $|س - ٣|^٢ - |س - ٣| =$ صفر «{٣ ، ٢ ، ٤}»

(١٩) $٥ |٣ - س| - ٢ \sqrt{س^٢ - ٦ س + ٩} = ١٢$ «{٧ ، −١}»

(٢٠) $|س^٢ - ١| = |س - ١|$ «{١ ، ٠ ، −٢}»

(٢١) $|س + ١| |س - ١| = ٢٦$ «{$٣\sqrt{٣}$ ، $-٣\sqrt{٣}$}»

(٢٢) $|س + ١|^٢ - ٣ |س + ١| - ١٠ = ٠$ «{٤ ، −٦}»

(٢٣) $(س - ٥)^٢ = |٢ س - ١٠|$ «{٥ ، ٧ ، ٣}»

(٢٤) $س |س| - س = ٠$ «{٠ ، ١ ، −١}»

(٢٥) $س |٥ - س| = ٦$ «{٢ ، ٣ ، ٦}»

(٢٦) $|س^٢ + س - ١٠| = ١٠$ «{٠ ، −١ ، −٥ ، ٤}»

(٢٧) $\frac{٤ س - ٨}{|س - ٢|} = س$ «{٤ ، −٤}»

(٢٨) $س^٣ |س| = ٨ س$ «{−٢ ، ٠ ، ٢}»

---

٢ أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية ، وحقق الناتج جبريًا :

(١) $|س| - ٤ = ٠$ «{٤ ، −٤}»

(٢) $|س| + ٢ = ٠$ «∅»

(٣) $٢ - |س + ٢| = ٠$ «{٠ ، −٤}»

(٤) $\sqrt{س^٢ - ٤ س + ٤} = ٣$ «{٥ ، −١}»

(٥) $|س + ٣| + س = ٥$ «{١}»

(٦) $|س - ٢| = ٣ س - ٤$ «{$١\frac{١}{٢}$}»

(٧) $|٢ س + ٤| = ١ - س$ «{−١ ، −٥}»

(٨) $|٢ س + ٥| = س - ٤$ «∅»

(٩) $|س + ٢| = |س - ٣|$ «{$\frac{١}{٢}$}»

(١٠) $|س - ٢| + |س - ١| =$ صفر «∅»

(١١) $|س - ٣| = |٢ س + ١|$ «{−٤ ، $\frac{٢}{٣}$}»

(١٢) $|س - ٤| = ٤ - س$ «$]-\infty ، ٤]$»

(١٣) $|س + ٢| = س + ٢$ «$[-٢ ، \infty[$»

(١٤) $|س - ٣| - |س + ٢| = ٥$ «$]-\infty ، -٢]$»

(١٥) $|س - ٣| = ٤ - |س + ١|$ «$[-١ ، ٣]$»

(١٦) $|س + ٢| = س^٢ + ٢$ «{٠ ، ١}»

٣ أثبت أن الدالة د حيث د (س) = ١٢ / (|س| + ٢) زوجية ، ثم أوجد جبريًا مجموعة حل المعادلة د (س) = ٢
«{-٤ ، ٤}»

---

٤ ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث د (س) = | ٢ س + ٥ | − ٣ وعين مدى الدالة وادرس اطرادها ومن الرسم استنتج مجموعة حل المعادلة : | ٢ س + ٥ | − ٣ = ٠ وحقق ذلك جبريًا. «{-١ ، -٤}»

---

٥ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = ١ − | ٢ س | واستنتج من الرسم مدى الدالة واطرادها ، وأثبت أنها زوجية ، ثم من الرسم أو بأى طريقة أخرى أوجد مجموعة حل المعادلة : ١ − | ٢ س | = −٣ «{-٢ ، ٢}»

---

٦ 📖 أثبت أن الدالة د : د (س) = (١ − |س|) / |س| زوجية ثم ارسم منحنى د ثم أوجد بيانيًا أو جبريًا مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ ، وتحقق من صحة الناتج.
«{-١ ، ١}»

---

٧ ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث د (س) = | س − ١ | + س + ١ موضحًا مدى الدالة ودارسًا الاطراد ثم أوجد مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٣
«{٣/٢}»

---

٨ ارسم فى شكل واحد الدالتين د ، ر حيث د (س) = س^{٢} | س | ، ر (س) = ٢ − | س |
ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة د (س) = ر (س)
«{-١ ، ١}»

تمارين على حل متباينات القيمة المطلقة

٩ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية جبريًا :

(١) | س − ٣ | ≤ ٥ «[-٢ ، ٨]»

(٢) | س − ٣ | ≥ ٥ «ح −]-٢ ، ٨[»

(٣) | ٢ س + ٥ | > ٣ «ح − [-٤ ، -١]»

(٤) | ٣ − س | < ٧ «]-٤ ، ١٠[»

(٥) | (س − ٣) / ٤ | ≤ ١ «[-١ ، ٧]»

(٦) 📖 | ٣ س + ٢ | + ٥ < ٤ «∅»

(٧) 📖 ١ / | ٣ س | ≥ ٥ «[-١/١٥ ، ١/١٥] − {٠}»

(٨) 📖 ١ / | ٢ س − ٣ | > ٢ «]٥/٤ ، ٧/٤[− {٣/٢}»

(٩) | ٢ س − ٣ | + ٣ > ٧ «ح − [-١/٢ ، ٧/٢]»

(١٠) 📖 √(س^{٢} − ٢ س + ١) ≥ ٤ «ح −]-٣ ، ٥[»

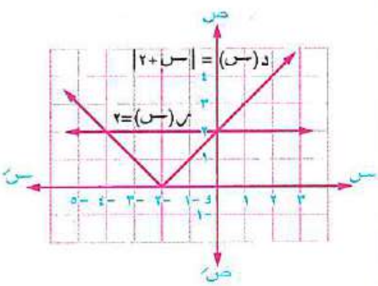
(١١) 📖 √(٤ س^{٢} − ١٢ س + ٩) ≤ ٩ «[-٣ ، ٦]»

(١٢) | س − ٢ | + | ٢ − س | < ٦ «]-١ ، ٥[»

(١٣) √((س + ٢)^{٢}) + | ٢ س + ٤ | ≥ ٦ «ح −]-٤ ، ٠[»

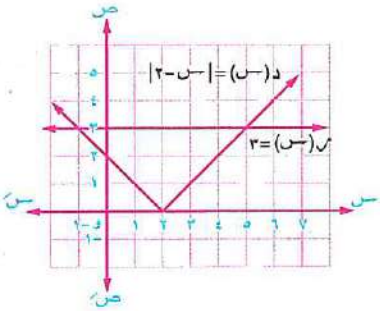
١٠ باستخدام الأشكال البيانية الآتية :

①



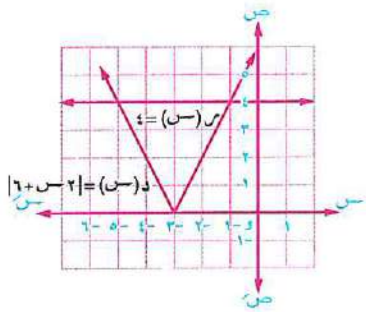
أوجد : مجموعة حل المتباينة $د(س) < ر(س)$ في ح

②



أوجد : مجموعة حل المتباينة $د(س) > ر(س)$ في ح

③



أوجد : مجموعة حل المتباينة $د(س) \leq ر(س)$ في ح

---

١١ أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية بيانيًا ثم حقق الناتج جبريًا :

① $|س - ١| < ٢$

② $|٢س - ٥| \geq ٢$

③ $\sqrt{٤س^٢ - ١٢س + ٩} > ٥$

④ $|س + ٣| < -س$

⑤ $|س - ٢| < -\frac{١}{٣}س + ٦$

⑥ $|س - ٣| + |س - ٤| > ٥$

---

١٢ اكتب على صورة متباينة القيمة المطلقة كلًا مما يأتي :

① $-٤ \leq س \leq ٤$

② $٠ < س < ٦$

③ $س \leq -٢$ أو $س \geq ٢$

④ $س \in ح - [-٢ ، ٦]$

---

١٣ اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تعبر عن :

① درجة طالب في اختبار ما تقع بين ٦٠ إلى ١٠٠ درجة

② درجة حرارة مقيسة بالترمومتر الطبي تقع بين ٣٥° C ، ٤٢° C

③ توجد الطحالب الخضراء في المحيطات على عمق يصل إلى ٣٠ مترًا.

تمارين متنوعة

١٤ أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

① $د(س) = \frac{٢}{|س| - ١}$

② $د(س) = \frac{٣}{|س| + ١}$

③ $د(س) = \frac{٣س}{|س - ٢| - ٥}$

④ $د(س) = \sqrt{٥ - |س|}$

⑤ $د(س) = \sqrt{|س| - ٥}$

⑥ $د(س) = \frac{١}{\sqrt{٥ - |س|}}$

١٥ ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

(١) د (س) = س |س|

(٢) د (س) = س² |س| − ١

(٣) د (س) = $\frac{|١ + س| + |س - ١|}{|١ + س| - |س - ١|}$

(٤) د (س) = $\frac{س^٢ \text{ جا } ٢ س}{٥ + |٢ س|}$

(٥) د (س) = ٢ |س| طاس + ٢ س |طاس|

(٦) د (س) = $\sqrt{|س| + س}$

---

١٦ أوجد بالوحدات المربعة المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين د ، ر حيث :

(١) د (س) = |س + ٣| + ٢ ، ر (س) = ٤

(٢) د (س) = − |س − ٢| + ٣ ، ر (س) = صفر

(٣) د (س) = |س − ٢| − ١ ، ر (س) = ٥ − |س − ٢|

---

١٧ أثبت أن الدالة د حيث د (س) = $\frac{|س| + ١}{|س|}$ زوجية ، وارسم منحنى د ،

ثم أوجد بيانيًا وجبريًا مجموعة حل المعادلة د (س) = ٢ س − ٢ ، وتحقق من صحة الحل.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المعادلة : |س + ١|² + |٢ س + ٣| = ٠ في ح هي ....

(أ) {−١ ، $\frac{-٣}{٢}$} (ب) ح (جـ) {١ ، $\frac{٣}{٢}$} (د) ∅

(٢) مجموعة حل المعادلة : |س² − ٤ س + ٣| = |س − ٣| في ح هي ....

(أ) {٠ ، ٢} (ب) {٢ ، ٣} (جـ) {٠ ، ٣} (د) {٠ ، ٢ ، ٣}

(٣) أصغر قيمة للمقدار : $\frac{|س| + |ص|}{|س + ص|}$ هي ....

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(٤) إذا كان : ٢^س = ٦١ فإن : |س − ٦| + |س − ٥| = ...

(أ) −١١ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ١١

(٥) إذا كان : أ² ب > ٠ ، $\frac{أ}{ب}$ < ٠ فإن : $\sqrt{أ^٢} + \sqrt{ب^٢}$ − (ب − أ) = ...

(أ) ٢ أ (ب) −٢ ب (جـ) −٢ أ + ٢ ب (د) صفر

(٦) إذا كان : −٤ ≤ س ≤ ٦ وكان أ ≤ | ٤ س − ٨ | ≤ ب فإن : أ + ب = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٠ (جـ) ١٨ (د) ١٦

(٧) حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^٢$ − ٣ | س | − ١٠ = ٠ يساوى ....

(أ) −٢٥ (ب) −١٠ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

(٨) عدد قيم س الصحيحة التى تحقق أن : ٣ < | س | < ٨ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٩) إذا كانت د (س) = | ٢ س − ٥ | ، ر (س) = | س + ١ |

فإن مجموعة حل المعادلة : (ر ∘ د) (س) = ٣ فى ح هى ....

(أ) {٢ ، −٤} (ب) $\{\frac{٣}{٢} ، \frac{٧}{٢}\}$ (جـ) {٣ ، ٧} (د) $\{\frac{٣}{٢} ، \frac{٩}{٢}\}$

---

٢ أوجد جبريًا فى ح مجموعة حل كل مما يأتى :

(١) (س + ١) (| س | − ١) + $\frac{١}{٢}$ = صفر «$\{\frac{١}{\sqrt{٢}} ، -١ + \frac{١}{\sqrt{٢}} ، -١ - \frac{١}{\sqrt{٢}}\}$»

(٢) || ٢ س + ٣ | − ٨ | = ٥ «{−٨ ، ٥ ، ٠ ، −٣}»

(٣) $\frac{٢}{| س |}$ + | س | = ٣ «{٢ ، −٢ ، ١ ، −١}»

(٤) $\sqrt{(س - \frac{١}{س})^٢ + ٤}$ = ٢ «{١ ، −١}»

(٥) | $س^٢$ − ٣ | + $\frac{٢}{| س^٢ - ٣ |}$ = ٣ «{± ٢ ، ± $\sqrt{٢}$ ، ± $\sqrt{٥}$ ، ± ١}»

(٦) | ٤ − س | + | س − ٢ | = ١٠ «{٨ ، −٢}»

(٧) (| ٢ س − ٣ | − ٥) (| ٢ س − ٣ | + ٥) > ١١ «ح − $[\frac{-٣}{٢} ، \frac{٩}{٢}]$»

تطبيقات حياتية ؟ على الوحدة الأولى

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

١ 📖 **الربط بالميكانيكا :**

إذا كانت سرعة دراجة بخارية ع (ن) بالسنتيمتر/ثانية تعطى بالدالة ع حيث :

$$\text{ع (ن)} = \begin{cases} \text{٨ ن} & \text{، } \text{٠} \leq \text{ن} \leq \text{١٠} \\ \text{٨٠} & \text{، } \text{١٠} < \text{ن} < \text{٢٠٠} \\ \text{-٤ ن + ٨٨٠} & \text{، } \text{٢٠٠} \leq \text{ن} < \text{٢٢٠} \end{cases}$$

حيث ن الزمن بالثانية

أوجد : (١) ع (١٠) (٢) ع (١٥٠) (٣) ع (٢١٠)

---

٢ 📖 **الربط بالهندسة :** إذا كان ح محيط مربع طول ضلعه ل اكتب محيط المربع كدالة فى طول ضلعه ح (ل)

ثم أوجد : (١) ح (٣) (٢) ح $\left(\frac{\text{١٥}}{\text{٤}}\right)$

---

٣ 📖 **الربط بالهندسة :** إذا كانت م مساحة دائرة طول نصف قطرها نق. اكتب المساحة كدالة فى طول نصف القطر م (نق)

ثم أوجد : (١) م $\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right)$ (٢) م (٥)

---

٤ 📖 **الربط بالصناعة :** يعمل سعيد فى مصنع لإنتاج المصابيح الموفرة للطاقة ، فإذا كان يتقاضى ٨ جنيهات أجرًا عن كل ساعة عمل بالإضافة إلى ٠,٣ جنيهًا عن كل مصباح ينتج يوميًا.

(١) اكتب قاعدة الدالة د التى تعبر عن أجر سعيد إذا كان يعمل ٧ ساعات يوميًا.

(٢) هل الدالة د أحادية ؟ فسر إجابتك.

---

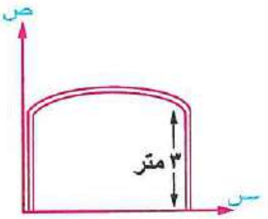
٥ 📖 **الربط بالتجارة :** يدفع تاجر غلال ٥٠ جنيهًا عن كل طن يدخل أو يخرج من مستودعه كأجر تحميل أو تنزيل ، اكتب الدالة التى تمثل تكاليف التحميل أو التنزيل ومثلها بيانيًا.

---

٦ 📖 **الربط بالميكانيكا :** يقطع جسم مسافة ف مترًا فى ٣ دقائق. إذا تحرك الجسم بسرعة ثابتة مقدارها ٣٠ مترًا / دقيقة ، بين أن سرعة الجسم ع تتغير عكسيًا بتغير الزمن (ن) لقطع هذه المسافة ، واكتب الدالة التى تمثل السرعة والزمن ومثلها بيانيًا ثم أوجد زمن قطع هذه المسافة إذا تحرك الجسم بسرعة ٤٥ مترًا / دقيقة.

٧ الربط بالصناعة : صممت بوابة حديدية ارتفاع جانبيها ٣ أمتار وقوسها على شكل جزء من منحنى الدالة د : د (س) = أ (س − ٢)^{٢} + ٤

كما فى الشكل المقابل.



أوجد : (١) قيمة أ

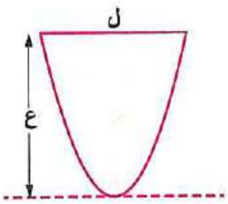
(٢) أقصى ارتفاع للبوابة.

(٣) عرض البوابة.

«$-\frac{١}{٤}$ ، ٤ أمتار ، ٤ أمتار»

---

٨ الربط بالهندسة : إذا علمت أن مساحة الشكل المحصور بين منحنى الدالة التربيعية والقطعة المستقيمة الأفقية المرسومة بين أى نقطتين عليه والموضحة فى الشكل المقابل تعطى بالعلاقة م = $\frac{٢}{٣}$ ل ع



(١) أوجد مساحة الشكل المحصور بين محور السينات ومنحنى الدالة

د : د (س) = س^{٢} − ٦ س + ٥ بالوحدات المربعة.

(٢) ارسم على نفس الشبكة البيانية منحنيى الدالتين د ، ر حيث ر (س) = |س − ٣| − ٢

ثم أوجد مساحة الجزء المحصور بينهما بالوحدات المربعة.

«$\frac{٣٢}{٣}$ ، $\frac{٢٠}{٣}$ وحدة مربعة»

---

٩ تخطيط المدن :

قطعة أرض محصورة بين منحنيى الدالتين د ، ر حيث : د (س) = |س − ٣| − ٢ ، ر (س) = ٣ ،

احسب مساحتها بالوحدات المربعة وإذا كان طول الوحدة ٨ أمتار احسب مساحة الأرض بالأمتار المربعة.

«١٦٠٠ م^{٢}»

---

١٠ شبكات الطرق : طريقان الأول يمثله منحنى الدالة د : د (س) = |س − ٥| ، والثانى يمثله منحنى الدالة ر : ر (س) = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س ، إذا تقاطع الطريقان فى نقطتى أ ، ب أوجد المسافة بين أ ، ب لأقرب كيلو متر إذا كانت وحدة الأطوال تمثل مسافة قدرها ٥ كيلو مترات.

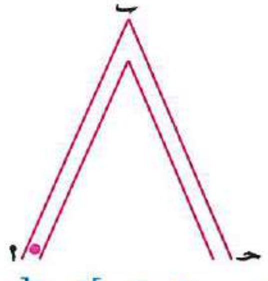
«٣٦ كم»

---

١١ تطبيق حياتى على حل المتباينة : تسمح إحدى شركات الغاز الطبيعى بتوظيف قارئ العداد إذا كان طوله يتراوح بين ١٧٨ سم ، ١٩٢ سم. عبر عن الأطوال الممكنة لمن يتقدم لشغل هذه الوظيفة بمتباينة القيمة المطلقة.

«|س − ١٨٥| ≤ ٧»

١٢ **الربط بالميكانيكا :** يتحرك جسم بسرعة منتظمة مقدارها ٨ سم/ث من الموضع أ إلى الموضع حـ مرورًا بالموضع ب دون توقف ، وكانت المسافة بين الجسم والموضع ب تحسب بالقاعدة ف (ن) = ٨ | ٥ − ن| حيث ن الزمن بالثوانى ، ف المسافة بالسنتيمترات.



(١) احسب المسافة بين الجسم والموضع ب بعد ثانيتين وبعد ٨ ثوان.

ماذا تلاحظ ؟ فسر إجابتك.

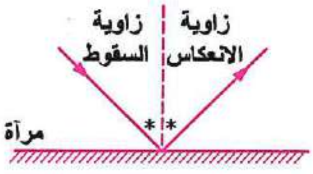
(٢) متى يكون الجسم على بعد ١٦ سم من الموضع ب ؟ فسر إجابتك.

(٣) متى يكون الجسم على بعد يقل عن ٨ سم من الموضع ب ؟

«٢٤ سم ، ٢٤ سم ، ٣ ، ٧ ،]٤ ، ٦[»

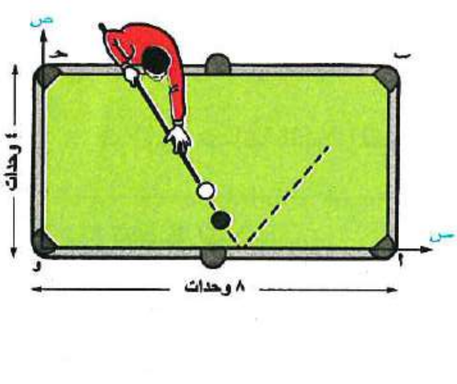
---

١٣ **تطبيق حياتى :** إذا سقط شعاع الضوء على سطح عاكس فإن مساره يخضع لدالة المقياس فيكون قياس زاوية السقوط مساويًا لقياس زاوية الانعكاس ، كذلك مسار كرة البلياردو قبل وبعد تصادمها مع حافة الطاولة فى بعض الحالات.



* **يوضح الشكل المقابل :**

تصويب لاعب البلياردو على الكرة السوداء ، باعتبار $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$ محورى الإحداثيات المتعامدة ، وأن مسار الكرة يتبع منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{٤}{٣}$ | س − ٥ |



هل تسقط الكرة السوداء فى الجيب ب ؟

فسر إجابتك رياضيًا.

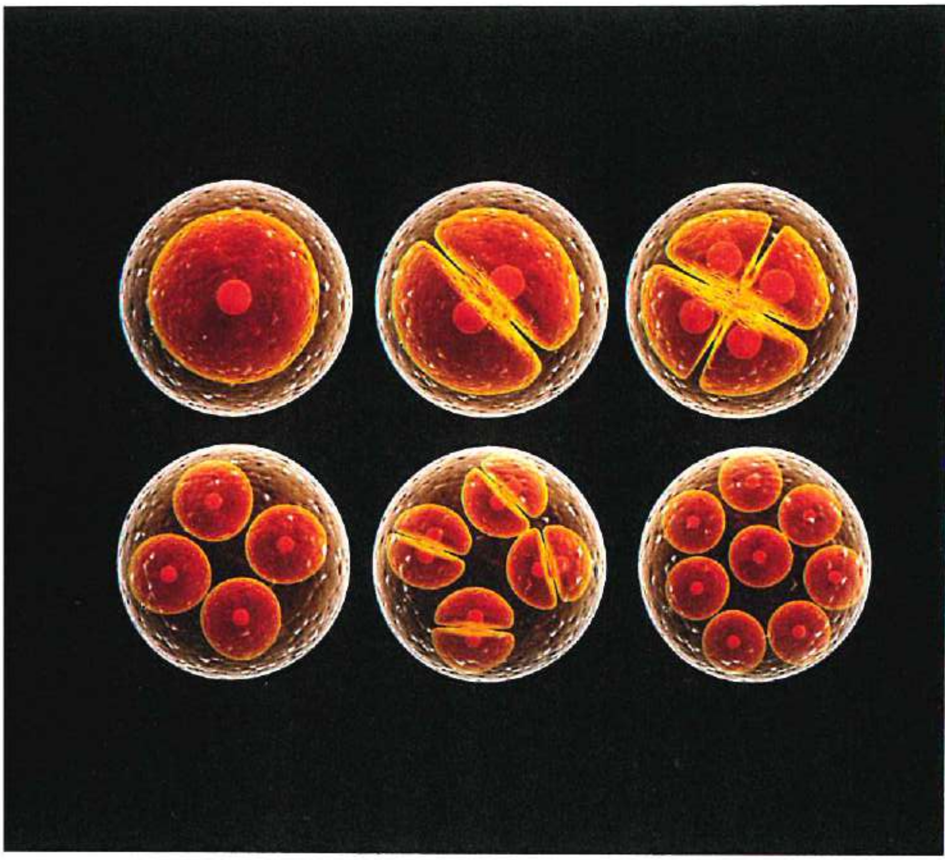
الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها



- الدرس 1 — الأسس الكسرية والمعادلات الأسية.
- الدرس 2 — الدالة الأسية وتطبيقاتها.
- الدرس 3 — الدالة العكسية.
- الدرس 4 — الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى.
- الدرس 5 — بعض خواص اللوغاريتمات.

فى نهاية الوحـــدة : تطبيقات حياتيـة على الوحدة الثانية.



الدرس

1

الأسس الكسرية والمعادلات الأسية

الجذر النونى

المعادلة : $س^{ن} = أ$ حيث $أ \in ح$ ، $ن \in ص^{+}$ لها $ن$ من الجذور

ونستعرض فيما يلى بعض الحالات :

١ إذا كان : $ن$ عددًا زوجيًا ، $أ > ٠$

فإن المعادلة $س^{ن} = أ$ لها جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية (عندما $ن > ٢$) ويرمز للجذرين الحقيقيين بالرمزين $\sqrt[ن]{أ}$ ، $-\sqrt[ن]{أ}$ ويسمى الجذر النونى الذى له نفس إشارة $أ$ بالجذر النونى الأساسى للعدد $أ$

فمثلًا : المعادلة $س^{٦} = ٦٤$ لها جذران حقيقيان هما $\sqrt[٦]{٦٤} = ٢$ ، $-\sqrt[٦]{٦٤} = -٢$

وتوجد أربعة جذور أخرى مركبة غير حقيقية (حاول إيجادهم بالتحليل)

٢ إذا كان : $ن$ عددًا زوجيًا ، $أ < ٠$

فإن المعادلة $س^{ن} = أ$ ليس لها جذور حقيقية (جذورها أعداد مركبة غير حقيقية)

فمثلًا : عند حل المعادلة $س^{٢} = -١٦$

فإن $س = \pm \sqrt{-١٦} = \pm ٤ ت$ (أعداد مركبة غير حقيقية)

٣ إذا كان : $ن$ عددًا فرديًا ، $أ \in ح - \{٠\}$

فإن المعادلة $س^{ن} = أ$ لها جذر حقيقى وحيد هو $\sqrt[ن]{أ}$ وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية

فمثلًا : المعادلة $س^{٣} = -٢٧$ لها جذر حقيقى وحيد هو $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$

ويوجد جذران مركبان غير حقيقيين (حاول إيجادهما بالتحليل)

٤ إذا كان : $ن \in ص^+$ ، ؟ = صفر فإن المعادلة $س^ن$ = صفر لها حل حقيقي وحيد هو س = ٠ .

(عدد جذور المعادلة يساوى ن وكل منها يساوى صفر عندما ن > ١)

فمثلًا : المعادلة $س^٣ = ٠$ لها ثلاثة جذور حقيقية متساوية وكل منها يساوى صفر

ملاحظة

$\sqrt[ن]{أ^ن} = |أ|$ إذا كان ن عددًا زوجيًا ، $\sqrt[ن]{أ^ن} = أ$ إذا كان ن عددًا فرديًا

فمثلًا : $\sqrt[٤]{(-٤)^٤} = |-٤| = ٤$ ، $\sqrt[٣]{(-٣)^٣} = -٣$

خواص الجذور النونية

إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين ، $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ح$ فإن :

١ $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$ ٢ $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ حيث ب ≠ ٠ لاحظ أن : $\sqrt[ن]{أ \pm ب} \neq \sqrt[ن]{أ} \pm \sqrt[ن]{ب}$

فمثلًا : $\sqrt[٣]{٢٧ ب^{١٥}} = \sqrt[٣]{٢٧} \times \sqrt[٣]{ب^{١٥}} = ٣ ب^٥$ ، $\sqrt[٤]{٨١ س^٤ ص^٨} = \sqrt[٤]{٨١} \times \sqrt[٤]{س^٤} \times \sqrt[٤]{ص^٨} = ٣ |س| ص^٢$

الأسس الكسرية

بفرض أن : $أ^م$ تمثل الجذر التربيعي الأساسي للعدد أ

∴ $أ^م = \sqrt{أ}$ وبتربيع الطرفين ∴ $(أ^م)^٢ = أ$ ∴ $أ^{٢م} = أ$

∴ ٢ م = ١ ∴ م = $\frac{١}{٢}$

أي أن : $أ^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{أ}$ **وبالمثل :** $أ^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{أ}$ ، $أ^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{أ}$

تعريف

١ إذا كان : $ن \in ص^+ - \{١\}$ ، $أ \in ح$ فإن : $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

مع ملاحظة أن : إذا كان : ن عدد زوجي ، أ < ٠ فإن : $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ} \notin ح$

فمثلًا : $٩^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٩} = ٣ \in ح$ ، $\left(\frac{-١}{٨}\right)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{\frac{-١}{٨}} = \frac{-١}{٢} \in ح$

بينما : $(-١٦)^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{-١٦} \notin ح$

٢ إذا كان م ، ن عددين صحيحين ليس بينهما عامل مشترك ، ن > ١ ، $\sqrt[ن]{أ} \in ح$

فإن : $أ^{\frac{م}{ن}} = \left(\sqrt[ن]{أ}\right)^م = \sqrt[ن]{أ^م}$

فمثلًا : $(٨)^{\frac{٢}{٣}} = \left(\sqrt[٣]{٨}\right)^٢ = ٢^٢ = ٤$ ، $(٨١)^{-\frac{٣}{٤}} = \left(\sqrt[٤]{٨١}\right)^{-٣} = ٣^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$

قوانين الأسس

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين ، م ، ن عددين نسبيين ومع مراعاة استثناء الحالات التى يكون فيها المقام = صفر ، والحالات التى يكون فيها الأساس = صفر ، الأس = صفر معًا وأن تكون جميع التعبيرات المستخدمة معرفة فإن :

١ $أ^{صفر} = ١$	٢ $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$	٣ $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$
٤ $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$	٥ $(أ^{م})^{ن} = أ^{من}$	٦ $(أب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$
٧ $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{-ن} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{ن} = \frac{ب^{ن}}{أ^{ن}}$		

ملاحظات

١ إذا كان : $أ \in ح^{-}$ فإن :

$أ^{ن} > ٠$ إذا كان ن عددًا صحيحًا زوجيًا

$أ^{ن} < ٠$ إذا كان ن عددًا صحيحًا فرديًا

فمثلًا : $(-٤)^{٢} = ١٦ > ٠$ بينما $(-٤)^{٣} = -٦٤ < ٠$

٢ • إذا كان : $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن : $س = أ^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد فردى

• إذا كان : $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن : $س = \pm أ^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد زوجى

بشرط أن يكون م ، ن عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك (أى $\frac{م}{ن}$ عدد نسبى فى أبسط صورة) وإذا كان أحدهما زوجيًا فيجب أن يكون $أ \geq ٠$.

٣ خطأ شائع : * $(-٣٢)^{\frac{٢}{١٠}} = \sqrt[١٠]{(-٣٢)^{٢}} = ٢$ (حل خطأ)

* $(-٣٢)^{\frac{٢}{١٠}} = \left(\sqrt[١٠]{-٣٢}\right)^{٢} =$ غير معرف فى ح (حل خطأ)

وذلك لأن الأس $\frac{٢}{١٠}$ ليس فى أبسط صورة ويجب اختصاره أولًا $\left[\frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}\right]$

$\therefore (-٣٢)^{\frac{٢}{١٠}} = (-٣٢)^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$ (الحل الصحيح)

مثال ١

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١ $\sqrt[٥]{أ^{٣}} \times \sqrt{أ^{٣}}$ ٢ $\left(\sqrt[٥]{س}\right)^{٢} \times \sqrt[٣]{س^{٢}}$ ٣ $\left(\sqrt[٣]{أ^{-٥}}\right)^{٢} \times \left(\sqrt[٤]{أ^{٣}}\right)^{٣}$

الحل

١ $\sqrt[٥]{أ^{٣}} \times \sqrt{أ^{٣}} = أ^{\frac{٣}{٥}} \times أ^{\frac{٣}{٢}} = أ^{\frac{٣}{٥} + \frac{٣}{٢}} = أ^{\frac{٢١}{١٠}} = أ^{٢} \times أ^{\frac{١}{١٠}} = أ^{٢} \sqrt[١٠]{أ}$

٢ $\left(\sqrt[٥]{س}\right)^{٢} \times \sqrt[٣]{س^{٢}} = س^{\frac{٢}{٥}} \times س^{\frac{٢}{٣}} = س^{\frac{٢}{٥}+\frac{٢}{٣}} = س^{\frac{١٦}{١٥}} = س \times س^{\frac{١}{١٥}} = س\sqrt[١٥]{س}$

٣ $\left(\sqrt[٣]{أ^{-٥}}\right)^{٢} \times \left(\sqrt[٤]{أ^{٣}}\right)^{٣} = \left(أ^{\frac{-٥}{٣}}\right)^{٢} \times \left(أ^{\frac{٣}{٤}}\right)^{٣} = أ^{\frac{-١٠}{٣}} \times أ^{\frac{٩}{٤}} = أ^{\frac{-١٣}{١٢}} = \frac{١}{أ^{\frac{١٣}{١٢}}} = \frac{١}{|أ| \times أ^{\frac{١}{١٢}}} = \frac{١}{|أ|\sqrt[١٢]{أ}}$

مثال ٢

اختصر لأبسط صورة : $\frac{\sqrt[٤]{٨} \times \sqrt[٨]{٠,٠١} \times ١٢٥}{\sqrt[٤]{(١٥)^{٣}} \times \sqrt[٨]{٤^{٥}} \times (٣٦)^{-\frac{٣}{٨}}}$

الحل

المقدار $= \frac{\sqrt[٤]{٢^{٣}} \times \sqrt[٨]{(١٠)^{-٢}} \times ٥^{٣}}{\sqrt[٤]{(١٥)^{٣}} \times \sqrt[٨]{٤^{٥}} \times (٣٦)^{-\frac{٣}{٨}}} = \frac{٢^{\frac{٣}{٤}} \times (١٠)^{-\frac{١}{٤}} \times ٥^{٣}}{(١٥)^{\frac{٣}{٤}} \times ٤^{\frac{٥}{٨}} \times (٣٦)^{-\frac{٣}{٨}}}$

$= \frac{٢^{\frac{٣}{٤}} \times (٢ \times ٥)^{-\frac{١}{٤}} \times ٥^{٣}}{(٣ \times ٥)^{\frac{٣}{٤}} \times (٢^{٢})^{\frac{٥}{٨}} \times (٢^{٢} \times ٣^{٢})^{-\frac{٣}{٨}}} = \frac{٢^{\frac{٣}{٤}} \times ٢^{-\frac{١}{٤}} \times ٥^{-\frac{١}{٤}} \times ٥^{٣}}{٣^{\frac{٣}{٤}} \times ٥^{\frac{٣}{٤}} \times ٢^{\frac{٥}{٤}} \times ٢^{-\frac{٣}{٤}} \times ٣^{-\frac{٣}{٤}}}$

$= ٢^{\frac{٣}{٤}-\frac{١}{٤}-\frac{٥}{٤}+\frac{٣}{٤}} \times ٣^{-\frac{٣}{٤}+\frac{٣}{٤}} \times ٥^{-\frac{١}{٤}+٣-\frac{٣}{٤}} = ٢^{٠} \times ٣^{٠} \times ٥^{٢}$

$= ١ \times ١ \times ٢٥ = ٢٥$

مثال ٣

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

١ $٣ س^{٥} = -٩٦$ | ٢ $س^{٦} = -٦٤$ | ٣ $(س - ٢)^{٤} = ٨١$

٤ $س^{\frac{٣}{٤}} = ٢٧$ | ٥ $\sqrt[٥]{س^{٢}} = ١$ | ٦ $\sqrt[٤]{(٣س + ٢)^{٣}} = ٨$

٧ $س^{\frac{٤}{٣}} - ٥ \times س^{\frac{٢}{٣}} + ٤ = ٠$ | ٨ $(س^{٢} - ٤ س - ١٣)^{\frac{٢}{٥}} = ٨$

الحل

لاحظ أن المطلوب إيجاد مجموعة الحل فى ح أى إيجاد الجذور الحقيقية فقط.

١ ∵ $٣ س^{٥} = -٩٦$ ∴ $س^{٥} = -٣٢$

∴ $س = \sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$ ∴ م.ح = $\{-٢\}$

٢ $س^{٦} = -٦٤$ ∵ $-٦٤ < ٠$ ، ٦ عدد زوجى ∴ م.ح = $\varnothing$

٣ ∵ $(س - ٢)^{٤} = ٨١$ ∴ $س - ٢ = \sqrt[٤]{٨١} = ٣$ أ، $س - ٢ = -\sqrt[٤]{٨١} = -٣$

∴ $س = ٣ + ٢ = ٥$ أ، $س = -٣ + ٢ = -١$ ∴ م.ح = $\{٥ ، -١\}$

٤ ∵ $س^{\frac{٣}{٤}} = ٢٧$ ∴ $س = ٢٧^{\frac{٤}{٣}} = (٣^{٣})^{\frac{٤}{٣}} = ٣^{٤}$

∴ $س = ٨١$ ∴ م.ح = $\{٨١\}$

٥ ∵ $\sqrt[٥]{س^{٢}} = ١$ ∴ $س^{\frac{٢}{٥}} = ١$

∴ $س = \pm ١^{\frac{٥}{٢}}$ ∴ $س = \pm ١$ ∴ م.ح = $\{١ ، -١\}$

٦ ∵ $\sqrt[٤]{(٣س + ٢)^{٣}} = ٨$ ∴ $(٣س + ٢)^{\frac{٣}{٤}} = ٨$ ∴ $٣س + ٢ = ٨^{\frac{٤}{٣}}$

∴ $٣س + ٢ = (٢^{٣})^{\frac{٤}{٣}}$ ∴ $٣س + ٢ = ١٦$

∴ $س = \frac{١٤}{٣}$ ∴ م.ح = $\{\frac{١٤}{٣}\}$

٧ ∵ $س^{\frac{٤}{٣}} - ٥ \times س^{\frac{٢}{٣}} + ٤ = ٠$ ∴ $(س^{\frac{٢}{٣}} - ١)(س^{\frac{٢}{٣}} - ٤) = ٠$

∴ $س^{\frac{٢}{٣}} = ١$ ومنها $س = \pm ١^{\frac{٣}{٢}} = \pm ١$

أ، $س^{\frac{٢}{٣}} = ٤$ ومنها $س = \pm ٤^{\frac{٣}{٢}} = \pm (٢^{٢})^{\frac{٣}{٢}} = \pm ٢^{٣} = \pm ٨$

∴ م.ح = $\{١ ، -١ ، ٨ ، -٨\}$

حل آخر : نفرض $س^{\frac{٢}{٣}} = ك$ ∴ $ك^{٢} - ٥ك + ٤ = ٠$

∴ $(ك - ٤)(ك - ١) = ٠$ ∴ $ك = ٤$ ∴ $س^{\frac{٢}{٣}} = ٤$

∴ $س = \pm \sqrt{٤^{٣}} = \pm ٨$ أ، $ك = ١$ ∴ $س^{\frac{٢}{٣}} = ١$

∴ $س = \pm \sqrt{١^{٣}} = \pm ١$ ∴ م.ح = $\{١ ، -١ ، ٨ ، -٨\}$

٨ $س^{٢} - ٤س - ١٣ = ٨^{\frac{٥}{٣}} = ٣٢$ ∴ $س^{٢} - ٤س - ٤٥ = ٠$

∴ $(س - ٩)(س + ٥) = ٠$ ∴ $س = ٩$ أ، $س = -٥$

∴ م.ح = $\{٩ ، -٥\}$

المعادلة الأسية

هى معادلة تتضمن متغيرًا (مجهولاً) فى الأس مثل ($٢^{س + ١} = ٨$)

قوانين المعادلة الأسية

لكل م ، ن ∈ ص ، أ ، ب ∈ ح − $\{-١ ، ٠ ، ١\}$ نجد أن :

١ إذا كان : $أ^{ن} = ١$ فإن : ن = صفر

٢ إذا كان : $أ^{م} = أ^{ن}$ فإن : م = ن

٣ إذا كان : $أ^{ن} = ب^{ن}$

- وكان – ن عددًا فرديًا – فإن – أ = ب
- وكان – ن عددًا زوجيًا – فإن – أ = ± ب
- وكان – أ ≠ ب – فإن – ن = صفر

مثال ٤

أوجد قيمة س التى تحقق كلاً من المعادلات الآتية :

[١] $٢^{\text{س}+٥} = ٨$
[٢] $٣^{\text{س}^٢-٤} = ١$
[٣] $٤^{\text{س}+٢} = \text{س}^{\text{س}+٢}$
[٤] $٤^{\text{س}-٣} = ٣^{٢\text{س}-٦}$
[٥] $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{|\text{س}-٥|} = \left(٣\frac{٣}{٨}\right)^{-٢}$

الحـــل

[١] ∵ $٢^{\text{س}+٥} = ٨$ ∴ $٢^{\text{س}+٥} = ٢^٣$

∴ $\text{س} + ٥ = ٣$ ∴ $\text{س} = -٢$

[٢] ∵ $٣^{\text{س}^٢-٤} = ١$ ∴ $\text{س}^٢ - ٤ = ٠$

∴ $\text{س} = \pm ٢$

[٣] ∵ $٤^{\text{س}+٢} = \text{س}^{\text{س}+٢}$ ∴ إما $\text{س} = \pm ٤$

أ، $\text{س} + ٢ = ٠$ ومنها $\text{س} = -٢$ ∴ $\text{س} \in \{-٢ ، ٤ ، -٤\}$

[٤] ∵ $٤^{\text{س}-٣} = ٣^{٢\text{س}-٦}$ ∴ $٤^{\text{س}-٣} = ٣^{٢(\text{س}-٣)}$

∴ $٤^{\text{س}-٣} = ٩^{\text{س}-٣}$ ∵ $٤ \neq ٩$ ∴ $\text{س} - ٣ = ٠$ ومنها $\text{س} = ٣$

[٥] ∵ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{|\text{س}-٥|} = \left(\frac{٢٧}{٨}\right)^{-٢}$ ∴ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{|\text{س}-٥|} = \left(\left(\frac{٣}{٢}\right)^٣\right)^{-٢}$

∴ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{|\text{س}-٥|} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{-٦} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٦}$ ∴ $|\text{س} - ٥| = ٦$

∴ $\text{س} - ٥ = \pm ٦$

∴ إما $\text{س} - ٥ = ٦$ ومنها $\text{س} = ١١$

أ، $\text{س} - ٥ = -٦$ ومنها $\text{س} = -١$

مثال ٥

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

[١] $٢^{\text{س}} \times \sqrt[٣]{٤} = \left(\sqrt[٣]{١٦}\right)^{-١}$
[٢] $٤^{\text{س}^٢-١} = ٨^{-\text{س}}$
[٣] $\frac{٣^{٢\text{س}} + ٣^{٢\text{س}} + ٣^{\text{س}}}{٣^{٢\text{س}} + ٣^{\text{س}} + ١} = \frac{١}{٩}$

الحـــل

[١] ∵ $٢^{\text{س}} \times ٤^{\frac{١}{٣}} = (١٦)^{-\frac{١}{٣}}$ ∴ $٢^{\text{س}} \times (٢^٢)^{\frac{١}{٣}} = (٢^٤)^{-\frac{١}{٣}}$

∴ $٢^{\text{س}} \times ٢^{\frac{٢}{٣}} = ٢^{-\frac{٤}{٣}}$ ∴ $٢^{\text{س}+\frac{٢}{٣}} = ٢^{-\frac{٤}{٣}}$

∴ $\text{س} + \frac{٢}{٣} = -\frac{٤}{٣}$ ∴ $\text{س} = -٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{-٢\}$

٢ ∵ $٤^{س^{٢} - ١} = ٨^{-س}$ ∴ $(٢^{٢})^{س^{٢} - ١} = (٢^{٣})^{-س}$

∴ $٢^{٢س^{٢} - ٢} = ٢^{-٣س}$ ∴ $٢س^{٢} - ٢ = -٣س$

∴ $٢س^{٢} + ٣س - ٢ = ٠$ ∴ $(٢س - ١)(س + ٢) = ٠$

∴ $٢س - ١ = ٠$ ومنها $٢س = ١$ ∴ $س = \frac{١}{٢}$

أ، $س + ٢ = ٠$ ∴ $س = -٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٢} ، -٢\}$

٣ ∵ $\frac{٣^{٣س} + ٣^{٢س} + ٣^{س}}{٣^{٢س} + ٣^{س} + ١} = \frac{١}{٩}$ ∴ $\frac{٣^{س}(٣^{٢س} + ٣^{س} + ١)}{٣^{٢س} + ٣^{س} + ١} = ٣^{-٢}$

∴ $٣^{س} = ٣^{-٢}$ ∴ $س = -٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{-٢\}$

مثال ٦

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

١ $٢^{س+١} + ٢^{س-١} = ٥$ ٢ $٥^{س} + \frac{١٢٥}{٥^{س}} = ٣٠$

الحل

١ بأخذ $٢^{س-١}$ عامل مشترك ∴ $٢^{س-١}(٢^{٢} + ١) = ٥$

∴ $٢^{س-١}(٤ + ١) = ٥$ ∴ $٢^{س-١} = ١$

∴ $س - ١ =$ صفر ∴ $س = ١$ ∴ مجموعة الحل = $\{١\}$

حل آخر : $٢^{س+١} + ٢^{س-١} = ٥$ ∴ $٢^{س} \times ٢ + ٢^{س} \times ٢^{-١} = ٥$

∴ $٢^{س}\left[٢ + \frac{١}{٢}\right] = ٥$ ∴ $٢^{س} \times \frac{٥}{٢} = ٥$

∴ $٢^{س} = ٢$ ∴ $س = ١$ ∴ مجموعة الحل = $\{١\}$

٢ بضرب الطرفين × $٥^{س}$ ∴ $٥^{٢س} + ١٢٥ = ٣٠ \times ٥^{س}$

∴ $٥^{٢س} - ٣٠ \times ٥^{س} + ١٢٥ = ٠$

وبالتحليل : ∴ $(٥^{س} - ٥)(٥^{س} - ٢٥) = ٠$

∴ إما $٥^{س} - ٥ =$ صفر أ، $٥^{س} - ٢٥ = ٠$

∴ $٥^{س} = ٥$ | ∴ $٥^{س} = ٥^{٢}$

∴ $س = ١$ | ∴ $س = ٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{١ ، ٢\}$

حل آخر :

بوضع $٥^{س} =$ ص ∴ $ص + \frac{١٢٥}{ص} = ٣٠$ وبضرب الطرفين فى ص

∴ $ص^{٢} - ٣٠ص + ١٢٥ = ٠$ ∴ $(ص - ٥)(ص - ٢٥) = ٠$

∴ ص = ٥ أ، ص = ٢٥ ∴ $٥^{س} = ٥$ ∴ $س = ١$

أ، $٥^{س} = ٥^{٢}$ ∴ $س = ٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{١ ، ٢\}$

تمارين 7 على الأسس الكسرية والمعادلات الأسية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $أ^{م} \times أ^{م} =$ ....

(أ) $أ^{م^{٢}}$ (ب) $أ^{٢م}$ (جـ) $٢ أ^{م}$ (د) $م أ^{٢}$

(٢) $\sqrt[٥]{أ^{٣}} \times \sqrt[٢]{أ^{٣}} =$ ....

(أ) $\sqrt[٧]{أ^{٣}}$ (ب) $\sqrt[٧]{أ^{٦}}$ (جـ) $\sqrt[٥]{أ^{١٤}}$ (د) $أ^{٢} \sqrt[١٠]{أ}$

(٣) إذا كان : $٢^{س + ١} = ٨$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤) $٣^{س + ٥} = \frac{١}{٢٧}$ فإن : س = ...

(أ) -٣ (ب) ٨ (جـ) -٨ (د) ٣

(٥) إذا كان : $٥^{س - ١} = ٤^{س - ١}$ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) -١ (د) صفر

(٦) مجموعة حل المعادلة : $٥^{س^{٢} - ٤} = ٧^{س^{٢} - ٤}$ هى ....

(أ) $\{٢\}$ (ب) $\{-٢\}$ (جـ) $\{٢ ، -٢\}$ (د) $\{صفر\}$

(٧) إذا كانت : $٧^{س + ١} = ٣^{٢س + ٢}$ فإن : $٥^{س + ١} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٥

(٨) إذا كان : $\left(\frac{١}{٢}\right)^{أ^{٢} - أ - ٢} = ١$ حيث $أ >$ صفر فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) -٣ (جـ) ٢ (د) ٣

(٩) مجموعة حل المعادلة : $٧^{س^{٢}} = ٤٩^{س + ٤}$ هو ....

(أ) $\{-٢\}$ (ب) $\{-٢ ، ٤\}$ (جـ) $\{-٢ ، ٣\}$ (د) $\{٢ ، -٤\}$

(١٠) إذا كان : $٣^{س} = ٢$ ، $٢^{ص} = ٩$ فإن : س ص = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) ١٨

(١١) إذا كان : $٥^{س} = ٢$ فإن : $٢٥^{س} =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ٦٢٥ (جـ) ٤ (د) ٢

(١٢) إذا كان : $٢^{س} = ٥$ فإن : $٢^{س + ٢} =$ ....

(أ) ١٥ (ب) ٤ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(١٣) إذا كان : $س^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$ فإن : س = ...

(أ) ٥١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢

(١٤) إذا كانت : $س^{\frac{٢}{٥}} = ٤$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ± ٤ (د) ± ٣٢

(١٥) إذا كان : $٤ س^{٥} = ١٢٨$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ± ٢ (جـ) ٢ (د) −٢

(١٦) $(١٢٨)^{\frac{-٢}{٧}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٤

(١٧) $\sqrt[٤]{(١٦)^{-٣}}$ = ...

(أ) ٨ (ب) −٨ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $-\frac{١}{٨}$

(١٨) إذا كان : س ، ص ∈ ح فإن : $\sqrt{س^{٢} ص^{٦}}$ = ...

(أ) $س ص^{٣}$ (ب) $|س ص^{٣}|$ (جـ) $\frac{١}{٢} س^{٢} ص^{٦}$ (د) $\pm س ص^{٣}$

(١٩) $\sqrt[٤]{١٦ س^{٤} ص^{٨}}$ = ...

(أ) $٢ س ص^{٢}$ (ب) $٢ |س| ص^{٢}$ (جـ) $٢ س |ص|^{٢}$ (د) $٢ س |ص^{٢}|$

(٢٠) إذا كان : $٢^{س - ١} = ٤٤$ فإن : $٢^{س - ٢}$ = ...

(أ) ١٨ (ب) ٢٢ (جـ) ١٠ (د) ١٦

(٢١) إذا كان : $س^{\frac{٥}{٣}} = ٢ ص^{\frac{٤}{٣}} = ٣٢$ فإن : س + ص = ...

(أ) ١٦ (ب) صفر (جـ) ١٦ ، −١٦ (د) صفر ، ١٦

(٢٢) مجموعة حل المعادلة : $٣^{س + ١} + ٣^{س} = ١٢$ في ح هي ....

(أ) {٠} (ب) {٣} (جـ) {١} (د) {١ ، ٠}

(٢٣) مجموعة حل المعادلة : $٣^{س} + ٣^{٣ - س} = ١٢$ هي ....

(أ) {١ ، ٢} (ب) {٠ ، ٣} (جـ) {٣ ، ٤} (د) {−١ ، −٢}

(٢٤) مجموعة حل المعادلة : $\sqrt[٣]{س^{٢}} - ٣ \sqrt[٣]{س} + ٢ = ٠$ هي ....

(أ) {١ ، ٨} (ب) {٩ ، ٣} (جـ) {٨} (د) {١}

(٢٥) مجموعة حل المعادلة : $٩^{س} - ٣٠ \times ٣^{س - ١} + ٩$ = صفر هي ....

(أ) {٠ ، ١} (ب) {١ ، ٢} (جـ) {٠ ، ٢} (د) {٠ ، ٣}

(٢٦) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة $س^{ن} = أ$ حيث ن عدد فردى هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ن

(٢٧) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة : $س^{٦} = أ$ ، أ > ٠ هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٢٨) المعادلة : $س^{٣} = ٤$ عدد جذورها يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٩) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة : $س^٤ = -١٦$ هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٣٠) مجموعة الجذور الحقيقية للمعادلة : $(س - ٢)^٤ = ١٦$ هى ....

(أ) $\{٠\}$ (ب) $\{٤\}$ (جـ) $\{٨\}$ (د) $\{٠ ، ٤\}$

(٣١) مجموعة حل المعادلة : $(س - ٣)^{\frac{٥}{٣}} = ٣٢$ فى ح هى ....

(أ) $\{٢\}$ (ب) $\{١١\}$ (جـ) $\{١١ ، -٥\}$ (د) $\{-١١ ، ١١\}$

(٣٢) إذا كانت : $س \in ح^*$ ، ن عدد صحيح زوجى فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) $س^ن > ٠$ (ب) $س^ن < ٠$ (جـ) $س^ن \leq ٠$ (د) $س^ن = ٠$

(٣٣) إذا كانت : $س \in ح^-$ ، ن عدد صحيح فردى فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) $س^ن > ٠$ (ب) $س^ن < ٠$ (جـ) $س^ن \geq ٠$ (د) $س^ن = ٠$

(٣٤) أى مما يأتى لا يساوى $\left(\sqrt[٥]{س^٤}\right)$ ؟

(أ) $\left(\sqrt[٥]{س}\right)^٤$ (ب) $\sqrt[٤]{س^٥}$ (جـ) $س^{\frac{٤}{٥}}$ (د) $\left(س^{\frac{١}{٥}}\right)^٤$

(٣٥) إذا كانت : $أ > ب > ٠ > حـ$ فإن : $\frac{\sqrt[٤]{ب^٤ حـ^٤} + \sqrt{(أ - حـ)^٢}}{\sqrt{أ^٢ ب^٢}} = $ ....

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) $\frac{أ}{ب}$ (د) $\frac{-حـ}{٢}$

(٣٦) إذا كان : $أ > ٠ > ب > حـ$ فأى من الأعداد الآتية لا ينتمى إلى ح ؟

(أ) $\sqrt[٣]{أ ب}$ (ب) $\sqrt[٤]{ب حـ}$ (جـ) $\sqrt[٥]{أ ب + حـ}$ (د) $\sqrt[٦]{أ حـ}$

(٣٧) إذا كان : $\sqrt{٢} \times \sqrt[٣]{٣} = \sqrt[٦]{س}$ فإن : س = ...

(أ) ٢٧ (ب) ٤٨ (جـ) ٧٢ (د) ١٠٨

(٣٨) $\sqrt{٩^{١٦} س^٢} = $ ....

(أ) $٣^٤ س$ (ب) $٣^٨ س^٢$ (جـ) $٩^٤ س$ (د) $٩^٨ س^٢$

(٣٩) إذا كان : $٣^{س - ٢} = \sqrt[٤]{٢٧}$ فإن : س = ...

(أ) $\frac{١١}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ٦

(٤٠) إذا كان : $٣^{س + ٢} = ٦^{س - ١}$ فإن : $٢^س = $ ....

(أ) ٥٤ (ب) ٢٧ (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) $\frac{١}{٣٦}$

(٤١) إذا كان : $٢^س = ٢٠$ ، $ن > س > ن + ١$ ، ن عدد صحيح فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٤٢) إذا كان : $٣^س > ٠$ فإن : ....

(أ) $٠ > س > ١$ (ب) $-١ > س > ٠$

(جـ) $س > -١$ (د) لا توجد قيمة لـ س تحقق ذلك.

(٤٣) العدد $(٢^{٢٤} + ٢^{٢٣} + ٢^{٢٢})$ يقبل القسمة على ....

(أ) ٣　　(ب) ٥　　(جـ) ٧　　(د) ٩

(٤٤) إذا كان : $٣^{\text{أ}} = ٤^{\text{ب}}$ فإن : $٩^{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} + ١٦^{\frac{\text{ب}}{\text{أ}}} =$ ....

(أ) ٧　　(ب) ١٢　　(جـ) ٢٠　　(د) ٢٥

(٤٥) إذا كان : $٢^{\text{أ}} = ٣$ ، $٣^{\text{ب}} = ٧$ ، $٧^{\text{جـ}} = ١١$ فإن : $٢^{\text{أ ب جـ}} =$ ....

(أ) ١١　　(ب) ٢٧　　(جـ) ٢١　　(د) ٢٣١

(٤٦) إذا كان : $٢^{\text{س}} = \text{أ}$ ، $٣^{\text{س}} = \text{ب}$ ، $٥^{\text{س}} = \text{جـ}$ فإن : $(٩٠)^{\text{س}} =$ ....

(أ) أ ب جـ　　(ب) $\text{أ}^{٢}\text{ب جـ}$　　(جـ) $\text{أ ب}^{٢}\text{جـ}$　　(د) أ + ٢ ب + جـ

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ اختصر لأبسط صورة :

(١) $\frac{(٢٧)^{-٣} \times (١٢)^{٢}}{١٦ \times (٨١)^{-٢}}$ «٣»

(٢) $\frac{٩^{٤\text{ن}+١} \times ٤^{٢-٢\text{ن}}}{٣^{٩\text{ن}+١} \times ٤٨^{١-\text{ن}}}$ «١»

(٣) $\frac{١٢٥ \times (١٥)^{\text{ن}-٣} \times (٢٥)^{\text{م}+\text{ن}}}{(٧٥)^{\text{ن}} \times (٥)^{\text{ن}+٢\text{م}}}$ «$\frac{١}{٢٧}$»

(٤) $(١٨)^{\frac{١}{٢}} \times (١٢)^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{(٢٤)^{\frac{١}{٢}}}$ «٣٦»

٢ أثبت أن :

(١) $\frac{(٢٧)^{\text{ص}-\frac{١}{٣}} \times \sqrt[\text{ص}]{٧^{\text{ص}^{٢}+٢\text{ص}}}}{(٨١)^{\text{ص}-١} \times (٢١)^{٥-\text{ص}} \times (٤٩)^{\text{ص}-١}} = \frac{١}{٩}$

(٢) $\frac{(٣٤٣)^{٢\text{س}-\frac{١}{٣}} \times (٤)^{٣\text{س}+١}}{(١٩٦)^{٣\text{س}} \times ٤} = \frac{١}{٧}$

(٣) $\frac{١٢٥ \times \sqrt[٨]{٤^{٣}} \times ١٠^{-\frac{١}{٤}}}{٤^{\frac{٥}{٨}} \times \sqrt[٤]{٦^{-٣}} \times ١٥^{\frac{٣}{٤}}} = ٢٥$

(٤) $\frac{٣ \times ٢^{\text{س}+٢} + \sqrt{٤^{\text{س}+٢}}}{٢^{\text{س}+٣} - ٦ \times ٢^{\text{س}}} = ٨$

٣ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $\text{س}^{\frac{٧}{٢}} = ١٢٨$

(٢) $\text{س}^{-\frac{٥}{٣}} = \sqrt[٣]{٣٢}$

(٣) $\sqrt[٣]{(\text{س}-١)^{٥}} = ٣٢$

(٤) $(٢\text{س}+٣)^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$

(٥) $(\text{س}+١)^{-\frac{٥}{٢}} = (٣٢)^{-\frac{١}{٢}}$

(٦) $(\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٩)^{\frac{٥}{٢}} = ٢٤٣$

(٧) $(\sqrt{\text{س}} + ٢)^{\frac{١}{٢}} = ٣$

(٨) $\text{س}^{\frac{٤}{٥}} - ٥\text{س}^{\frac{٢}{٥}} + ٤ = ٠$

(٩) $\text{س}^{\frac{٤}{٣}} - ١٠\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + ٩ = ٠$

(١٠) $\text{س} - ٣\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ٢ = ٠$

(١١) $\text{س} + ١٥ = ٨\sqrt{\text{س}}$

(١٢) $\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}} - \sqrt[٦]{\text{س}^{٥}} = ٦$

(١٣) $\sqrt[٥]{\text{س}^{٤}} - ٣\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}} = ٤$

(١٤) $\sqrt[٥]{\text{س}} - ٣ = -\frac{٢}{\sqrt[٥]{\text{س}}}$

٤ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $٥^{٢س - ١} = \frac{١}{١٢٥}$ «{-١}»

(٢) $٥^{س + ٢} = س^{س + ٢}$ «{٥ ، -٢}»

(٣) $٢^{س^٢ - ٩} = ١$ «{٣ ، -٣}»

(٤) $(٣\sqrt{٣})^{|س|} = ٢٧$ «{٢ ، -٢}»

(٥) $٣^{|٣س - ٤|} = ٩^{٢س - ٢}$ «{$\frac{٨}{٧}$}»

(٦) $(\frac{٣}{٥})^{٢س - ١} = \frac{٢٧}{١٢٥}$ «{٢}»

(٧) $٥^{س - ١} \times ٧^{١ - س} = \frac{٢٥}{٤٩}$ «{٣}»

(٨) $\frac{٩^{س + ١} \times ٤^{س - ١}}{٣٦^{س}} = (\frac{٣}{٢})^{س}$ «{٢}»

(٩) $\frac{١٢^{٢س - ٢} \times ٩^{س + ١}}{١٨^{٢س} \times ٤^{٢س - ٢}} = ٩$ «{٢}»

(١٠) $\frac{١}{٢٧}(\sqrt{٣})^{س + ٢} = ١$ «{٤}»

(١١) $(\sqrt{٣})^{س^٢ - ٥س} = ١$ «{٠ ، ٥}»

(١٢) $٥^{س^٢ - ٥س} = ٠,٠٠١٦$ «{١ ، ٤}»

(١٣) $٥^{س^٢} = ٢٥^{س + ٤}$ «{-٢ ، ٤}»

(١٤) $٣^{س^٢ - ٤٢} = (\frac{١}{٣})^{س}$ «{٦ ، -٧}»

(١٥) $(\sqrt{٧})^{|س + ٢|} = ٤٩$ «{٢ ، -٦}»

(١٦) $٣^{٢س - ٣} \times ٧^{٦ - ٤س} = ١$ «{$\frac{٣}{٢}$}»

(١٧) $\sqrt{٩^{س} - ٢ \times ٣^{س + ١} + ٩} = ٢٤$ «{٣}»

٥ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $٥^{س + ١} + ٥^{س - ١} = ٢٦$ «{١}»

(٢) $٣^{س + ٣} - ٣^{س + ٢} = ١٦٢$ «{٢}»

(٣) $٧^{٢ - س} + ٧^{-س} = ٥٠$ «{٠}»

(٤) $٥^{٢س} + ٢٥ = ٢٦ \times ٥^{س}$ «{٠ ، ٢}»

(٥) $٢^{س} + ٢^{٥ - س} = ١٢$ «{٢ ، ٣}»

(٦) $(\frac{١}{٢})^{س + ١} + (\frac{١}{٢})^{س + ٣} + (\frac{١}{٢})^{س + ٥} = ٨٤$ «{-٧}»

(٧) $٢^{٢س + ١} - ٣٣ \times ٢^{س} + ١٦ = ٠$ «{-١ ، ٤}»

(٨) $٥^{٢س - ٢} - ٦ \times ٥^{س - ١} + ٥ = ٠$ «{١ ، ٢}»

(٩) $٩^{س^٢ - ١} - ٣٦ \times ٣^{س^٢ - ٣} + ٣ = ٠$ «{١ ، -١ ، $\sqrt{٢}$ ، $-\sqrt{٢}$}»

(١٠) $١٠^{س} - ٥^{س - ١} \times ٢^{س - ٢} = ٩٥٠$ «{٣}»

٦

(١) إذا كان : $س^{\frac{٢}{٣}} = ٣ ص^{\frac{٢}{٣}} = ٢٧$ فأوجد قيمة : س + ص «٣٦ أ ، -١٨»

(٢) إذا كان : $س^{\frac{٤}{٣}} = ٩ ص^{-\frac{٢}{٣}} = ٨١$ فأوجد قيمة : |٢ س ص| «٢»

٧ اكتشف الخطأ : (١) $-٩ = (-٩)^{\frac{٢}{٢}} = \sqrt{(-٩)^٢} = \sqrt{٨١} = ٩$

(٢) إذا كان : $س^٤ = ٨١$ فإن : $س = \sqrt[٤]{٨١}$ ∴ س = ٣

٨ أوجد فى ح × ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $٤^{س + ص} = ١٢٨$ ، $٥^{س - ٢ص - ٣} = ١$ «{($\frac{١٠}{٣}$ ، $\frac{١}{٦}$)}»

(٢) $٣^{س} \times ٥^{ص} = ٧٥$ ، $٣^{ص} \times ٥^{س} = ٤٥$ «$\{(١ ، ٢)\}$»

(٣) $٣^{س} \times ٣^{ص} = ٢٧$ ، $٣^{س} + ٣^{ص} = ١٢$ «$\{(١ ، ٢) ، (٢ ، ١)\}$»

---

٩ **تفكير إبداعى : أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة :**

$٩^{س+١} - ٣^{س+٣} - ٣^{س} + ٣ = ٠$ «$\{-٢ ، ١\}$»

---

١٠ **تفكير إبداعى :** إذا كان : $س^{٣} = ص^{٢}$ وكان : $س^{ن+١} = ص^{ن-١}$ فما قيمة ن؟ «٥»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كان : س < صفر فإن : $\sqrt{س^{٢}} - \sqrt[٣]{س^{٣}} - \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} + ١ = $ ....

(أ) س (ب) −س (ج) صفر (د) −١

(٢) إذا كان : $أ = \sqrt[٤]{\frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt{٧}}}$ فأى الأعداد الآتية عدد نسبى ؟

(أ) $أ^{١٢}$ (ب) $أ^{١٦}$ (ج) $أ^{١٨}$ (د) $أ^{٢٤}$

(٣) مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{٢}{٣}} = س^{\frac{٣}{٢}}$ فى ح هى ....

(أ) $\{١\}$ (ب) $\{-١ ، ١\}$ (ج) $\{٠ ، ١\}$ (د) $\{٠ ، ١ ، -١\}$

(٤) $\sqrt[٣]{\frac{٢}{٢٧}} = \frac{\text{..............}}{٣}$

(أ) $\sqrt[٣]{٢}$ (ب) $\sqrt[٣]{٤}$ (ج) $\sqrt[٣]{١٨}$ (د) $٣\sqrt{٥}$

(٥) العلاقة : $\sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م}$ صحيحة لجميع قيم ....

(أ) أ ∈ ح

(ب) ن حيث ن عدد زوجى موجب.

(ج) $\sqrt[ن]{أ} \in ح$ ، ن ∈ $ص^{+} - \{١\}$

(د) لا شىء مما سبق.

(٦) المعادلة : $س^{\frac{٢}{٣}} = أ$ يكون لها حل فى ح إذا كان ....

(أ) أ ∈ ح (ب) أ ∈ $ح^{+}$ (ج) أ ∈ $ح^{-}$ (د) أ ∈ $ح^{+} \cup \{٠\}$

(٧) $\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[م]{أ} = $ ....

(أ) $\sqrt[نم]{أ}$ (ب) $\sqrt[ن+م]{أ}$ (ج) $\sqrt[\frac{١}{ن} + \frac{١}{م}]{أ}$ (د) $\sqrt[نم]{أ^{م+ن}}$

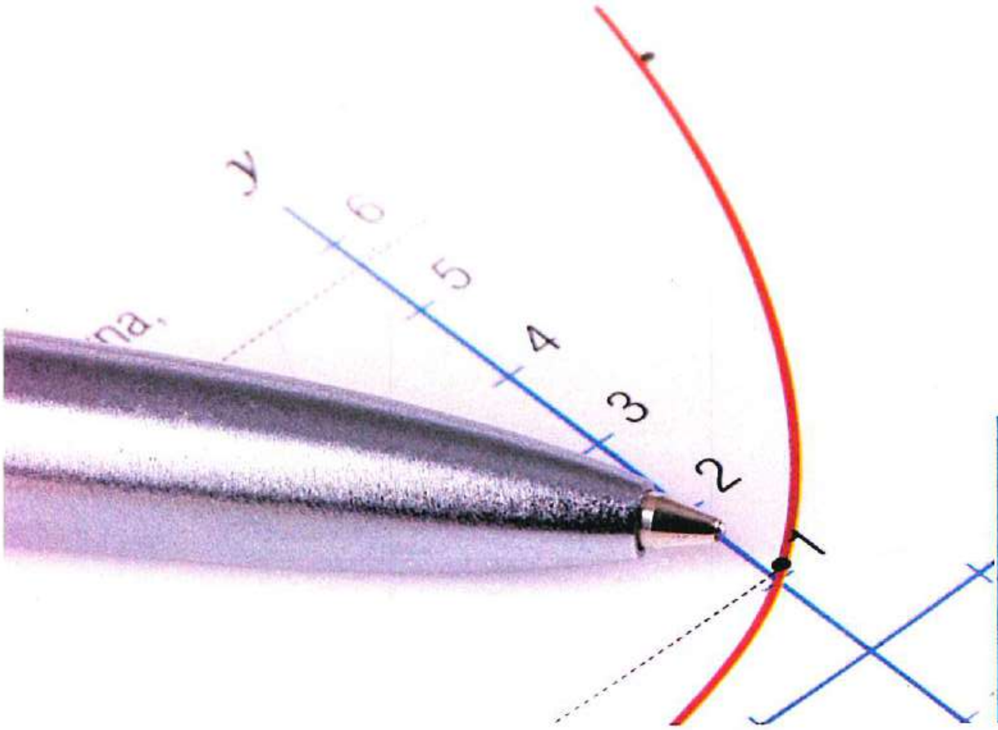
---

٢ **أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :**

(١) $٥^{س-١} \times س^{٢-س} = ٥$ «$\{٢ ، ٥\}$»

(٢) $(س - ٣)^{(س - ٥)} = ١$ «$\{٤ ، ٥\}$»

(٣) $(س - ٣)^{(س - ٦)} = ١$ «$\{٢ ، ٤ ، ٦\}$»



الدرس

2

الدالة الأسية وتطبيقاتها

تعريف

إذا كان : $أ \in ح^{+} - \{١\}$

فإن الدالة د : $ح \longleftarrow ح^{+}$ حيث د (س) = $أ^{س}$ تسمى دالة أسية أساسها أ

فمثلًا :

- د : د (س) = $٣^{س}$ دالة أسية أساسها ٣ وأسها س
- د : د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س + ١}$ دالة أسية أساسها $\frac{١}{٢}$ وأسها (س + ١)

ملاحظة

لاحظ الفرق بين الدالة الجبرية والدالة الأسية :

- فى الدالة الجبرية يكون المتغير المستقل س موجود كأساس فى قاعدة الدالة أما الأس فهو عدد حقيقى.

مثل : د : د (س) = $س^{٢} - ٣$ س + ١ أو د : د (س) = $(س - ٣)^{٣}$ أو ...

- فى الدالة الأسية يكون المتغير المستقل س موجود كأس فى قاعدة الدالة أما الأساس فهو عدد حقيقى موجب لا يساوى الواحد.

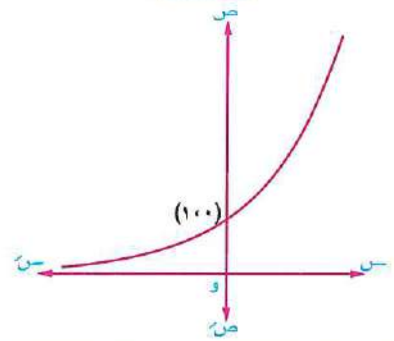
فمثلًا : د : د (س) = $٣^{س}$ أو د : د (س) = $٣^{س - ١} + ٢$ دوال أسية

أما د : د (س) = $(-٣)^{س}$ أو د : د (س) = $(١)^{س}$ ليست دوال أسية

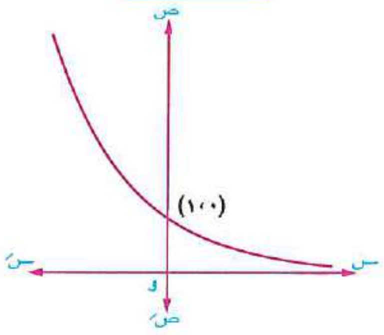
التمثيل البيانى للدالة الأسية

الشكل العام لمنحنى الدالة د : د (س) = أ^س كما هو موضح بالشكلين التاليين :

أ > ١



٠ < أ < ١



بعض خواص الدالة الأسية د : د (س) = أ^س

- مجالها ح
- مداها ح^+ ويقع منحناها بأكمله فوق محور السينات.
- الدالة تزايدية على مجالها ح إذا كان أ > ١ وتسمى دالة نمو أسى معامله أ ومنحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما قلت قيمة س
- الدالة تناقصية على مجالها ح إذا كان ٠ < أ < ١ وتسمى دالة تضاؤل أسى معامله أ ومنحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما زادت قيمة س
- منحنى الدالة الأسية يمر بالنقطة (٠ ، ١)
- د : د (س) = أ^س هى دالة أحادية
- إذا كانت : د (س) = أ^س فإن : د (−س) = أ^−س = $\left(\frac{١}{أ}\right)^{س}$

ويكون المنحنى ص = $\left(\frac{١}{أ}\right)^{س}$ صورة المنحنى ص = أ^س بالانعكاس فى محور الصادات



- أ^س ⟵ ∞ عندما س ⟵ ∞ حيث أ > ١ ، أ^س ⟵ ٠ عندما س ⟵ ∞ حيث ٠ < أ < ١

مثال ١

ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ ح^+ ، د (س) = ٢^س متخذًا س ∈ [−٣ ، ٤]

ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل من :

١ د (١,٥) ، د $\left(-\frac{١}{٢}\right)$ ٢ قيمة س عندما د (س) = ١٠

الحـــل

نكون الجدول الآتى :

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
ص = ٢^س	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨	١٦

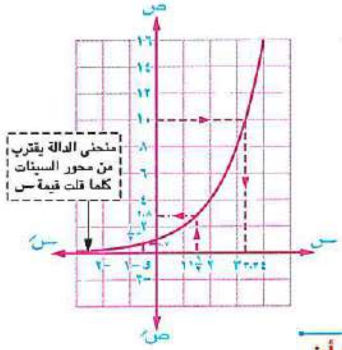
◄ الحـــل

١ إيجاد قيمة د (١,٥) :

عند س = ١,٥ نرسم مستقيمًا يوازى محور الصادات ليقابل المنحنى فى نقطة ثم نقرأ قيمة ص المناظرة على محور الصادات فنجدها ٢,٨ تقريبًا.

∴ د (١,٥) ≃ ٢,٨

وبالمثل د $\left(-\frac{١}{٢}\right)$ ≃ ٠,٧ .



لاحظ أن

د (س) = $٢^{س}$ دالة نمو أسى حيث أ > ١

٢ إيجاد قيمة س عندما د (س) = ١٠ أى عندما $٢^{س}$ = ١٠

∴ عند ص = ١٠ نرسم مستقيمًا يوازى محور السينات يقابل المنحنى فى نقطة ثم نقرأ قيمة س المناظرة على محور السينات فنجدها ٣,٣ تقريبًا.

∴ عندما $٢^{س}$ = ١٠ تكون س ≃ ٣,٣

مثال ٢

ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ $ح^{+}$ ، د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ متخذًا س ∈ [-٤ ، ٣]

ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل مما يأتى :

١ د (- ٠,٥)　　**٢** $\sqrt[٤]{٢}$　　**٣** س عندما $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ = ٧

◄ الحـــل

نكون الجدول الآتى :

س	٤-	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$	١٦	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

* **ومن الرسم نجد أن :**

١ د (- ٢,٥) ≃ ٥,٧

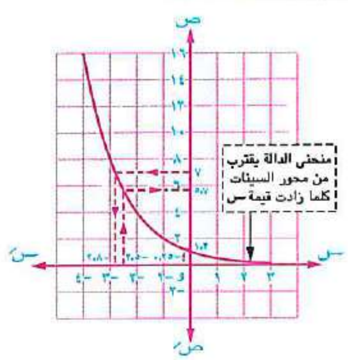
٢ ∵ $\sqrt[٤]{٢}$ = $٢^{\frac{١}{٤}}$ = $(٢^{-١})^{-\frac{١}{٤}}$

= $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-\frac{١}{٤}}$ = د $\left(-\frac{١}{٤}\right)$

∴ د $\left(-\frac{١}{٤}\right)$ ≃ ١,٢

٣ عندما $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ = ٧

∴ س ≃ - ٢,٨



لاحظ أن

د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ دالة تضاؤل أسى حيث ٠ < أ < ١

لاحظ أنه : فى مثال ١ ، مثال ٢ :

منحنى د : د (س) = $٢^{س}$ هو صورة منحنى الدالة د : د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ بالانعكاس فى محور الصادات.

بعض التحويلات الهندسية للدالة د : د $(س) = ٩^{س}$

١ الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة الأسية :

إذا كانت : د $(س) = ٩^{س}$ فإن المنحنى : ص = د (س) + حـ أى : $ص = ٩^{س} + حـ$

يمثله بيانيًا المنحنى : $ص = ٩^{س}$ بإزاحة رأسية مقدارها |حـ|

- فى اتجاه $\overrightarrow{وص}$ إذا كان حـ > ٠ (إزاحة لأعلى)
- فى اتجاه $\overleftarrow{وص}$ إذا كان حـ < ٠ (إزاحة لأسفل)

٢ الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة الأسية :

إذا كانت : د $(س) = ٩^{س}$ فإن المنحنى : ص = د (س + ب)

أى : $ص = ٩^{س + ب}$ يمثله بيانيًا المنحنى : $ص = ٩^{س}$ بإزاحة أفقية مقدارها |ب|

- فى اتجاه $\overleftarrow{وس}$ إذا كان ب > ٠
- فى اتجاه $\overrightarrow{وس}$ إذا كان ب < ٠

٣ انعكاس منحنى الدالة الأسية فى محور السينات :

إذا كانت : د $(س) = ٩^{س}$ فإن : منحنى الدالة ص = − د (س)

أى : $ص = - ٩^{س}$ هو صورة المنحنى : $ص = ٩^{س}$ بالانعكاس فى محور السينات.

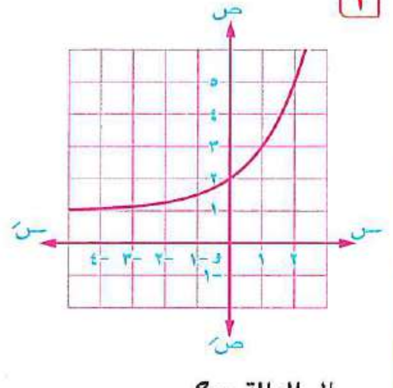
مثال ٣

مثل الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ثم أوجد المجال والمدى لكل منهم وبين أيًا منهم تزايدية وأيًا منهم تناقصية :

١ $ص = ٢^{س} + ١$ ٢ $ص = ٣^{س} - ١$ ٣ $ص = -\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$

الحـــل

١

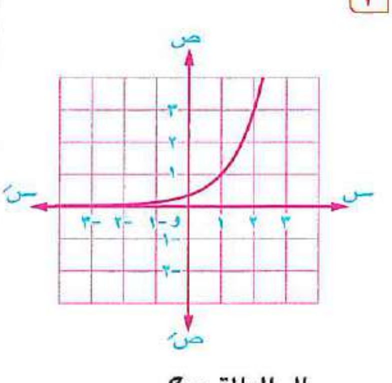


مجال الدالة = ح

، مدى الدالة =]١ ، ∞[

، الدالة تزايدية على مجالها

٢

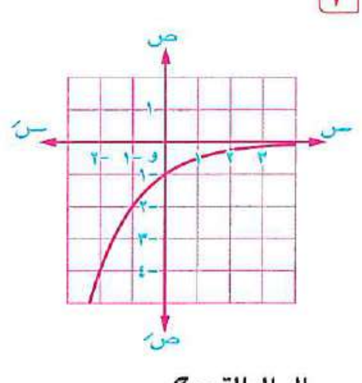


مجال الدالة = ح

، مدى الدالة =]−١ ، ∞[

، الدالة تزايدية على مجالها

٣



مجال الدالة = ح

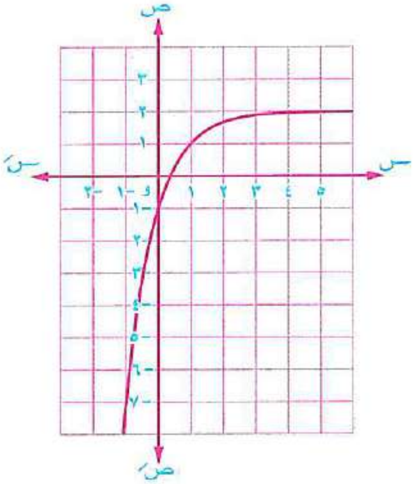
، مدى الدالة =]− ∞ ، ٠[

، الدالة تزايدية على مجالها.

مثال ٤

مثل الدالة المعرفة بالقاعدة الآتية ثم أوجد المجال والمدى وبين هل الدالة تزايدية أم تناقصية : $ص = -٣^{١ - س} + ٢$

الحل



$\because ص = -٣^{١ - س} + ٢ = -٣^{-(س - ١)} + ٢$

$= -\left(\frac{١}{٣}\right)^{س - ١} + ٢$

- المنحنى $ص = -\left(\frac{١}{٣}\right)^{س - ١} + ٢$

هو نفس المنحنى $ص = \left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

بانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة أفقية

وحدة واحدة فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$

ثم إزاحة رأسية وحدتين فى اتجاه $\overleftarrow{و ص}$

المجال = ح

، المدى = $]-\infty ، ٢[$

، الدالة تزايدية على مجالها.

لاحظ أنه

يجب ترتيب إجراء التحويلات على المنحنى $ص = \left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

للحصول على المنحنى $ص = -\left(\frac{١}{٣}\right)^{س - ١} + ٢$ كما يلى :

انعكاس فى محور السينات – إزاحة أفقية – إزاحة رأسية.

فإذا عكس الترتيب فإننا نحصل على منحنى آخر غير المنحنى المطلوب.

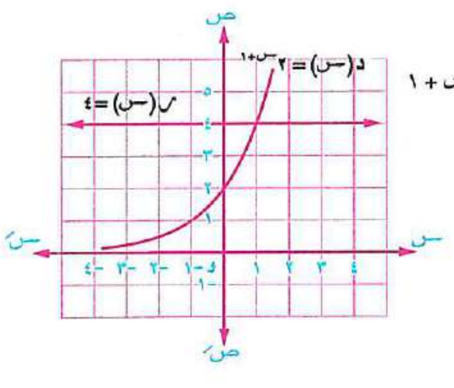
حل المعادلات الأسية بيانيًا

يعتمد الحل البيانى للمعادلات الأسية على فرض الطرف الأيمن للمعادلة على أنه دالة أسية د وفرض الطرف الأيسر للمعادلة على أنه أى دالة أخرى ر وبرسم الدالتين د ، ر فى شكل واحد وإيجاد الإحداثى السينى لنقطة (نقط) التقاطع نحصل على مجموعة الحل.

مثال ٥

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة : $٢^{س + ١} = ٤$

الحل



نفرض أن الطرف الأيمن للمعادلة هو قاعدة الدالة د : $د(س) = ٢^{س + ١}$

والطرف الأيسر هو قاعدة الدالة ر : $ر(س) = ٤$

وبرسم الشكل البيانى للدالتين فى شكل واحد ومن الرسم :

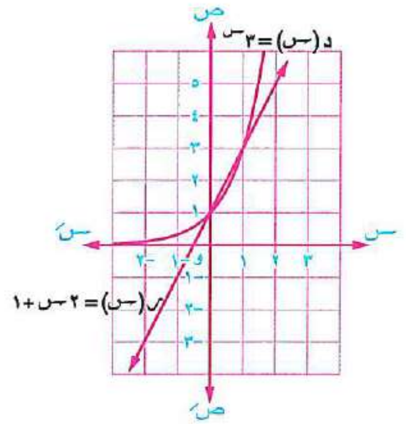
$\therefore$ نقطة التقاطع هى (١ ، ٤) $\therefore س = ١$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{١\}$

مثال ٦

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة : $\text{٣}^{\text{س}} = \text{٢ س} + \text{١}$

الحـــل



نفرض أن الطرف الأيمن للمعادلة هو قاعدة الدالة

د : د (س) = $\text{٣}^{\text{س}}$ والطرف الأيسر هو قاعدة الدالة

ر : ر (س) = ٢ س + ١

وبرسم الشكل البيانى للدالتين فى شكل واحد

ومن الرسم : الإحداثيان السينيان لنقطتى التقاطع هما ٠ ، ١

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ١}

مثال ٧

إذا كانت د : ح ⟵ ح^{+} ، د (س) = $\text{٣}^{\text{س}}$ فأثبت أن : $\frac{\text{د (س + ٥) + د (س + ٣)}}{\text{د (س + ٣) + د (س + ١)}} = \text{د (٢)}$

الحـــل

∵ الطرف الأيمن = $\frac{\text{٣}^{\text{س}+\text{٥}} + \text{٣}^{\text{س}+\text{٣}}}{\text{٣}^{\text{س}+\text{٣}} + \text{٣}^{\text{س}+\text{١}}} = \frac{\text{٣}^{\text{س}+\text{٣}}(\text{٣}^{\text{٢}}+\text{١})}{\text{٣}^{\text{س}+\text{١}}(\text{٣}^{\text{٢}}+\text{١})} = \frac{\text{٣}^{\text{س}+\text{٣}}}{\text{٣}^{\text{س}+\text{١}}} = \text{٣}^{\text{٢}}$

، الطرف الأيسر = د (٢) = $\text{٣}^{\text{٢}}$ ∴ الطرفان متساويان.

حل آخر : الطرف الأيمن = $\frac{\text{٣}^{\text{س}+\text{٥}} + \text{٣}^{\text{س}+\text{٣}}}{\text{٣}^{\text{س}+\text{٣}} + \text{٣}^{\text{س}+\text{١}}} = \frac{\text{٣}^{\text{س}}(\text{٣}^{\text{٥}}+\text{٣}^{\text{٣}})}{\text{٣}^{\text{س}}(\text{٣}^{\text{٣}}+\text{٣})} = \text{٩} = \text{٣}^{\text{٢}} = \text{د (٢)}$

مثال ٨

إذا كانت د (س) = $\text{٥}^{\text{س}}$ أوجد قيمة س إذا كان : د (٢ س − ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{\text{٢٦}}{\text{٢٥}}$

الحـــل

∵ د (٢ س − ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{\text{٢٦}}{\text{٢٥}}$

∴ $\text{٥}^{\text{٢س}-\text{١}} + \text{٥}^{\text{٢س}+\text{١}} = \frac{\text{٢٦}}{\text{٢٥}}$ ∴ $\text{٥}^{\text{٢س}-\text{١}}(\text{١} + \text{٥}^{\text{٢}}) = \frac{\text{٢٦}}{\text{٢٥}}$

∴ $\text{٥}^{\text{٢س}-\text{١}} \times \text{٢٦} = \frac{\text{٢٦}}{\text{٢٥}}$ ∴ $\text{٥}^{\text{٢س}-\text{١}} = \frac{\text{١}}{\text{٢٥}}$

∴ $\text{٥}^{\text{٢س}-\text{١}} = \text{٥}^{-\text{٢}}$ ∴ ٢ س − ١ = −٢ ∴ س = $-\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

حل آخر : ∵ د (٢ س − ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{\text{٢٦}}{\text{٢٥}}$

∴ $\text{٥}^{\text{٢س}-\text{١}} + \text{٥}^{\text{٢س}+\text{١}} = \frac{\text{٢٦}}{\text{٢٥}}$ ∴ $\text{٥}^{\text{٢س}}(\text{٥}^{-\text{١}} + \text{٥}) = \frac{\text{٢٦}}{\text{٢٥}}$

∴ $\text{٥}^{\text{٢س}} = \text{٥}^{-\text{١}}$ ∴ ٢ س = −١ ∴ س = $-\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

تطبيقات حياتية على النمو والتضاؤل الأسى

١ النمو الأسى

* الدالة د : د (ن) = أ (١ + ر)^ن تستخدم لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية حيث أ القيمة الابتدائية ، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة ، ن الفترة الزمنية.

* ويمكن استنتاج هذه الدالة عند دراسة ظاهرة تزايد السكان على سبيل المثال : فإذا كان عدد سكان إحدى المدن فى أحد الأعوام أ وكان هذا العدد يتزايد سنويًا بنسبة مئوية ثابتة ر.

فإن عدد السكان بعد عام = أ + ر أ = أ (١ + ر)

، وبعد عامين = أ (١ + ر) + ر أ (١ + ر) = أ (١ + ر)^٢ وهكذا

فيكون عدد السكان بعد ن عام = أ (١ + ر)^ن

مثال ٩

اشترى وائل منزلًا بمبلغ ١٣٥٠٠٠٠ جنيه فإذا كان سعر المنزل يزداد بمعدل ٢,٥ ٪ كل سنة :

١ اكتب دالة أسية تمثل سعر المنزل بعد ن سنة من شرائه.

٢ قدِّر لأقرب جنيه سعر المنزل بعد مرور ٦ سنوات من شرائه.

الحـــل

أ = ١٣٥٠٠٠٠ ، ر = $\frac{٢,٥}{١٠٠}$ = ٠,٠٢٥ ، ن = ٦

١ دالة النمو الأسى د : د (ن) = أ (١ + ر)^ن ∴ د (ن) = ١٣٥٠٠٠٠ (١ + ٠,٠٢٥)^ن

∴ د (ن) = ١٣٥٠٠٠٠ (١,٠٢٥)^ن

٢ بالتعويض عن ن = ٦ ∴ د (٦) = ١٣٥٠٠٠٠ (١,٠٢٥)^٦ ≈ ١٥٦٥٥٨٦ جنيهًا

الربح المركب

* عند حساب الجملة (ح) لمبلغ (أ) مستثمر فى أحد البنوك التى تعطى ربحًا سنويًا مركبًا (ر) كنسبة مئوية لعدد من السنوات (ن) بفترات تقسيم العائد السنوى إلى (س) فترة فإن جملة المبلغ تعطى بالعلاقة :

ح = أ $\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$

مثال ١٠

أودع رجل مبلغ ١٥٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ٧٪ أوجد جملة هذا المبلغ بعد مرور ١٠ سنوات فى كل من الحالات الآتية :

١ العائد سنوى.   ٢ العائد ربع سنوى.   ٣ العائد شهرى.

الحـــل

∵ $ح = أ \left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$

١ ∵ العائد سنوى أى أن عدد فترات التقسيم = ١   ∴ س = ١

∴ $ح = ١٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٧)^{١٠} \approx ٢٩٥٠٧,٢٧$ جنيه

٢ ∵ العائد ربع سنوى أى أن عدد فترات التقسيم = ٤   ∴ س = ٤

∴ $ح = ١٥٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٧}{٤}\right)^{١٠ \times ٤} \approx ٣٠٠٢٣,٩٦$ جنيه

٣ ∵ العائد شهرى أى أن عدد فترات التقسيم = ١٢   ∴ س = ١٢

∴ $ح = ١٥٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٧}{١٢}\right)^{١٠ \times ١٢} \approx ٣٠١٤٤,٩٢$ جنيه

٢ التضاؤل الأسى

الدالة د : $د(ن) = أ (١ - ر)^{ن}$ تستخدم لتمثيل التضاؤل الأسى حيث أ القيمة الابتدائية

، ر النسبة المئوية للتضاؤل فى الفترة الزمنية الواحدة ، ن الفترة الزمنية.

مثال ١١

يتناقص عدد المرضى بفيروس الالتهاب الكبدى الوبائى حـ بمعدل ١٥٪ سنويًا نتيجة اكتشاف علاج له فإذا كان عدد المرضى فى إحدى الدول ٨٠٠٠٠٠٠ مريض فاكتب دالة أسية تمثل عدد المرضى بعد ن سنة من اكتشاف العلاج ثم قدر عدد المرضى بعد ٨ سنوات.

الحـــل

أ = ٨٠٠٠٠٠٠ ، ر = ٠,١٥ ، ن = ٨

الدالة الأسية د : $د(ن) = ٨٠٠٠٠٠٠ (١ - ٠,١٥)^{ن} = ٨٠٠٠٠٠٠ (٠,٨٥)^{ن}$

وعند ن = ٨ فإن عدد المرضى = $٨٠٠٠٠٠٠ (٠,٨٥)^{٨} \approx ٢١٧٩٩٢٤$ مريضًا

تمارين 8 على الدالة الأسية وتطبيقاتها

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د : $د(س) = أ^{س}$ دالة أسية فإن : $أ \in$ ....

(أ) ح (ب) $ح^{+}$ (جـ) $ح^{-}$ (د) $ح^{+} - \{١\}$

(٢) إذا كان : $د(س) = ٣^{س+٢}$ فإن : $د(-٢) =$ ....

(أ) ٣ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ١

(٣) إذا كان : $د(س) = ٤^{س-١}$ فإن : $د(س + ١) =$ ....

(أ) $٤^{س}$ (ب) $٤^{س+١}$ (جـ) $٤^{س+٢}$ (د) $٢^{س}$

(٤) إذا كانت : $د(س) = ٢^{س}$ فإن : $د(-س) =$ ....

(أ) $-٢^{س}$ (ب) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ (جـ) $٢^{س+١}$ (د) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-س}$

(٥) إذا كانت : $د(س) = (٥)^{-س}$ فإن : $\frac{د(س - ١)}{د(س + ١)} =$ ....

(أ) ٥ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) ٢٥ (د) $\frac{١}{٢٥}$

(٦) إذا كانت : $د(س - ١) = ٢^{س+١}$ فإن : $د(س) =$ ....

(أ) $٢^{س}$ (ب) $٢^{س-١}$ (جـ) $٢^{س+٢}$ (د) $٢^{س-٢}$

(٧) إذا كانت : $د(س) = أ^{س}$ فإن : $د(س + ١) \times د(س - ١) = د($..............$)$

(أ) ٢ س + ١ (ب) $أ^{٢س}$ (جـ) ٢ س (د) ٢

(٨) إذا كان : $د(س + ١) = ٢^{س}$ وكان : $د(أ) = ٨$ فإن : $أ =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٥

(٩) إذا كانت : $د(س) = ٣^{س-٢}$ فإن مجموعة حل المعادلة : $د(س - ١) = ٨١$ هي ....

(أ) $\{٧\}$ (ب) $\{٥\}$ (جـ) $\{٤\}$ (د) $\{٣\}$

(١٠) إذا كان $د(س) = ٢^{س}$ فإن مجموعة حل المعادلة : $د(٢ س) - د(س + ١) =$ صفر هي ....

(أ) $\{٠\}$ (ب) $\{٠ ، ١\}$ (جـ) $\{١\}$ (د) $\{-١\}$

(١١) إذا كانت : د (س) = ٣^س فإن قيمة س التي تحقق المعادلة : د (س + ١) − د (س − ١) = ٢٤ هي ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) صفر

(١٢) إذا كانت : د (س) = ٣^س فإن قيمة س التي تحقق العلاقة :

د (٢ س) − ٢٤ د (س − ١) − د (٢) = ٠ هي ....

(أ) ٢ ، $\frac{١}{٣}$ (ب) ٢ ، صفر (جـ) ٢ (د) ٢ ، −١

(١٣) تكون الدالة الأسية التي أساسها أ تزايدية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

(١٤) تكون الدالة الأسية التي أساسها أ تناقصية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ < ٠ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) −١ < أ < ٠

(١٥) مدى الدالة د : د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ هو ....

(أ)]−∞ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠] (جـ)]٠ ، ∞[(د)]١ ، ∞[

(١٦) إذا كانت د (س) = ٢^{−س} فإن : د (س) تكون تناقصية عند س ∈ ....

(أ) ح (ب) ح^+ (جـ) ح^− (د) ∅

(١٧) أي من الدوال الآتية تكون متزايدة على مجالها ؟

(أ) د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ (ب) د (س) = ٣^{−س}

(جـ) د (س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$ (د) د (س) = ٥^س

(١٨) إذا كان : ن (س) = $\left(\frac{−١}{٢}\right)^{س + ١}$ فإنها تعبر عن ....

(أ) دالة أسية أساسها $\left(\frac{−١}{٢}\right)$ (ب) دالة أسية أسها (س + ١)

(جـ) ليست دالة أسية لأن الأساس < ٠ (د) (أ) ، (ب) معًا.

(١٩) إذا كانت د (س) = ٢^{س + ١} وكانت النقطة (أ ، $\frac{١}{٢}$) ∈ بيان د فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) −٢

(٢٠) إذا كانت : ص١ = ٢^س ، ص٢ = ٣^س ، ص٣ = ٤^س حيث س < ٠ .

فإن : ....

(أ) ص١ > ص٢ > ص٣ (ب) ص١ > ص٣ > ص٢

(جـ) ص٣ > ص٢ > ص١ (د) ص٣ > ص١ > ص٢

(٢١) إذا كان : د (س) = أ^س فإن : ....

(أ) د (س + ص) = د (س) + د (ص) (ب) د (س − ص) = د (س) − د (ص)

(جـ) د (س + ص) = د (س) . د (ص) (د) د (س ص) = د (س) . د (ص)

(٢٢) إذا تحرك منحنى الدالة د : د (س) = ٢^س وحدة واحدة لليسار

فإن الدالة الجديدة هى ر : ر (س) = ...

(أ) ٢^(س+١) (ب) ٢^(س−١) (جـ) −٢^س (د) −٢^(١−س)

(٢٣) منحنى الدالة د : د (س) = ٣^س هو صورة منحنى الدالة ر : ر (س) = −٣^س بالانعكاس

فى ....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = −س

(٢٤) معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين د ، ر حيث د (س) = ٣^س ، ر (س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)$^س

هى ....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = −س

(٢٥) منحنى الدالة د : د (س) = ٥^س يقطع محور الصادات فى النقطة ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (٥ ، ١) (د) (١ ، ٥)

(٢٦) منحنى الدالة د : د (س) = ٢^(س+٢) يقطع محور الصادات فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٠ ، ٢) (جـ) (٠ ، ٤) (د) (٠ ، ٨)

(٢٧) المستقيم ص = ٩ يقطع منحنى الدالة د : د (س) = ٣^س فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٩) (د) (١ ، ٩)

(٢٨) إذا كانت النقطة (أ ، ب) حيث أ ≠ ٠ تقع على منحنى الدالة ص = ٢^س فأى من النقط الآتية تقع

على منحنى الدالة ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)$^س ؟

(أ) (أ ، ب) (ب) (−أ ، ب) (جـ) (أ ، −ب) (د) (أ ، $\frac{١}{٢}$ ب)

(٢٩) إذا كانت النقطة (أ ، ب) تقع على منحنى الدالة : ص = ٢^س فأى النقط الآتية تقع على منحنى الدالة

ص = ٢^(س+٣) ؟

(أ) (أ ، ب) (ب) (أ + ٣ ، ب) (جـ) (أ ، ب + ٣) (د) (أ ، ٨ ب)

(٣٠) الدالة الأسية د حيث د (س) = أ^س ، أ > ١ يقترب خطها البيانى من ....

(أ) محور السينات (الاتجاه الموجب) (ب) محور السينات (الاتجاه السالب)

(جـ) محور الصادات (الاتجاه الموجب) (د) محور الصادات (الاتجاه السالب)

(٣١) في الدالة الأسية د : د (س) = $أ^{س}$ ، أ > ١ تكون د (س) > ١ عندما س ∈ ....

(أ) ح　　(ب) $ح^{+}$　　(جـ) $ح^{-}$　　(د) ص

(٣٢) أي من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة نماء أسي ؟

(أ) د (س) = $٢^{-س}$　　(ب) د (س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

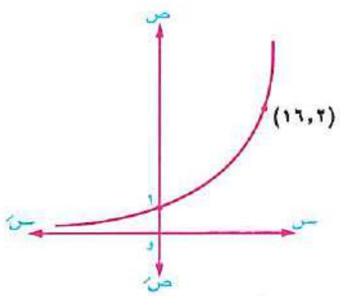
(جـ) د (س) = $٣^{س}$　　(د) د (س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

(٣٣) أي من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة تضاؤل أسي ؟

(أ) د (س) = $٢^{س}$　　(ب) د (س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{-س}$

(جـ) د (س) = $٣^{س}$　　(د) د (س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

(٣٤) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = $أ^{س}$



فإن : أ = ...

(أ) ٢　　(ب) ٣

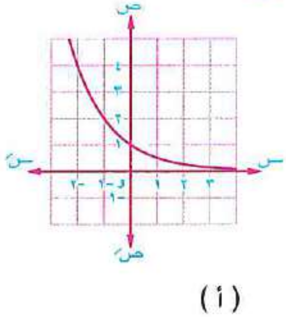
(جـ) ٤　　(د) ٩

(٣٥) في الدالة الأسية ر حيث ر (س) = $أ^{س}$ ، ٠ < أ < ١ تكون ٠ < $أ^{س}$ < ١

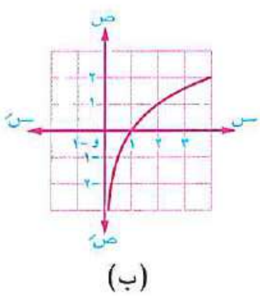
عندما س ∈ ....

(أ)]٠ ، ∞[　　(ب)]−∞ ، ٠[　　(جـ)]١ ، ∞[　　(د)]−∞ ، ١[

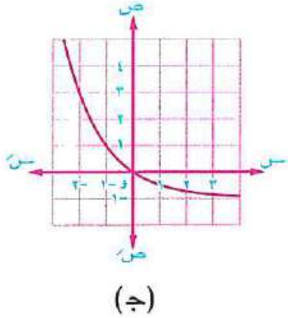
(٣٦) الدالة د حيث د (س) = $٢^{-س}$ يمثلها الشكل البياني ....



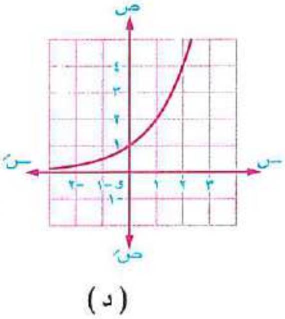
(أ)



(ب)

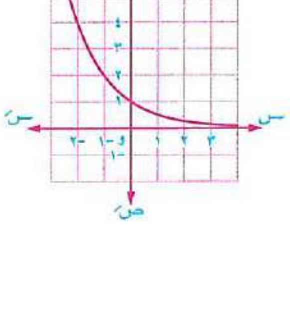


(جـ)



(د)

(٣٧) الشكل المقابل يمثل الدالة د حيث ....



(أ) د (س) = $٢^{س+١}$　　(ب) د (س) = $٢^{-س}$

(جـ) د (س) = $٣^{-س}$　　(د) د (س) = $٢^{س}$

(٣٨) جملة مبلغ ٥٠٠٠ جنيه موضوع فى بنك يعطى فائدة مركبة سنوية قدرها ٥٪ لمدة ٧ سنوات ≃ .... جنيه.

(أ) ٦٧٥٠ (ب) ٧٠٣٥,٥ (جـ) ٥٣٥٠ (د) ٨٥٠٠

(٣٩) اشترى جلال سيارة بمبلغ ٢٠٠٠٠٠ جنيه فإذا كان سعر السيارة يتناقص بمعدل ٠,٤ ٪ كل سنة ، أى الدوال الآتية يعبر عن سعر السيارة بعد ن سنة ؟

(أ) ص = ٢٠٠٠٠٠ × $(٠,٤)^{ن}$ (ب) ص = ٢٠٠٠٠٠ $(٠,٩٩٦)^{ن}$

(جـ) ص = ٢٠٠٠٠٠ × $(١,٤)^{ن}$ (د) ص = ٢٠٠٠٠٠ $(٠,٢)^{ن}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ بين أيًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دالة أسية ، ثم اكتب أسها وأساسها :

① د(س) = ٢ $س^{٣}$ ② د(س) = $\frac{٢}{٣}$ $(٥)^{س}$ ③ د(س) = $\frac{١}{س - ١}$

④ د(س) = ٣ $س^{٢}$ − ١ ⑤ د(س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س - ١}$ ⑥ د(س) = $(-٧)^{س}$

٢ إذا كانت : د(س) = $٥^{س}$ فأوجد قيمة : $\frac{د(س + ٤) - د(س + ٣)}{د(س + ٥) - د(س + ٤)}$ «$\frac{١}{٥}$»

٣ إذا كانت : د(س) = $٧^{س + ١}$

فأوجد قيمة س التى تحقق : د(٢ س − ١) + د(س − ٢) = ٥٠ «١»

٤ إذا كانت : $د_{١}$(س) = $٣^{س}$ ، $د_{٢}$(س) = $٩^{س}$

فأوجد قيمة س التى تحقق : $د_{١}$(٢ س − ١) + $د_{٢}$(س + ١) = ٧٥٦ «٢»

٥ إذا كانت د : ح ⟵ $ح^{+}$ حيث د(س) = $ص^{س}$ فأثبت أن : $\frac{د(س + ١) + د(س + ٢)}{د(س + ١) + د(س)}$ = ص

٦ إذا كانت : د(س) = $٣^{س}$ فأثبت أن : $\frac{د(٢ س + ٢) + د(٢ س - ١)}{٥ د(٢ س) - ٧ د(٢ س - ١)} = \frac{٧}{٢}$

٧ إذا كانت : د(س) = $٣^{٢ س - ١}$ فأثبت أن : $\frac{د(س + ١) \times د(س + ٢)}{د(س + ٣)}$ = د(س)

٨ إذا كانت : د(س) = $٢^{س}$ فأثبت أن : $\frac{د(س + ١)}{د(س - ١)} + \frac{د(س - ١)}{د(س + ١)} = \frac{١٧}{٤}$

٩ إذا كانت : د(س) = $٧^{س}$

أوجد قيمة س إذا كان : د(٢ س − ١) + د(٢ س + ١) = $\frac{٥٠}{٤٩}$ «$-\frac{١}{٢}$»

١٠ إذا كانت : د (س) = $٢^{س}$ ، $\frac{\text{د (س + ١) − د (س)}}{\text{د (س) − د (س − ١)}}$ = د (س − ٢) **فأوجد قيمة : س** «٣»

---

١١ إذا كانت : د (س) = $٣^{-س}$ **فأوجد مجموعة حل المعادلة :** $\frac{\text{د (٢ س + ١)}}{\text{د (س − ١)}}$ = ٧٢٩ «{−٨}»

---

١٢ إذا كانت : د (س) = $٣^{س - ١}$

فأوجد قيمة س التى تحقق : د (س + ٢) + د (٤ − س) = ٣٠ «٠ أ ، ٢»

---

١٣ إذا كانت : د (س) = $٢^{س}$

فأوجد مجموعة حل المعادلة : د (٢ س) − ٦ د (س) + د (٣) = ٠ «{١ ، ٢}»

---

١٤ إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$

أوجد مجموعة حل المعادلة : د (س) + د $\left(\frac{س}{٢}\right)$ = ١٢ «{٢}»

---

١٥ إذا كانت : د (س − ٢) = $٣^{س}$

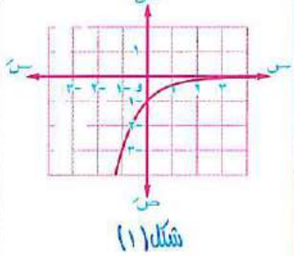
أوجد قيمة س التى تحقق أن : د (٣ س + ١) − د (٣ س − ١) = ٢٤ «صفر»

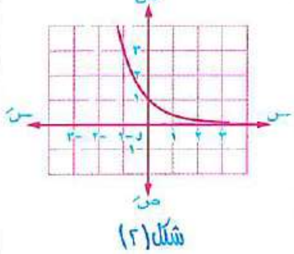
---

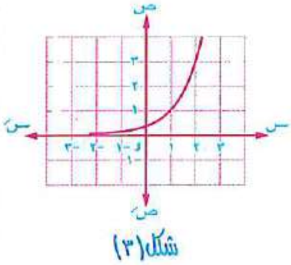
١٦ **اختر الشكل البيانى المناسب لكل من قواعد الدوال الآتية :**

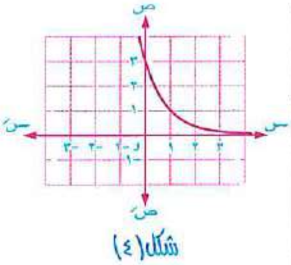
(١) ص = $٣^{س}$ | (٢) ص = $٣^{-س}$ | (٣) ص = $-٣^{س}$ | (٤) ص = $-٣^{-س}$

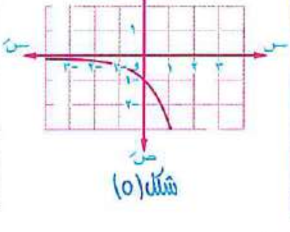
(٥) ص = $٣^{س}$ − ١ | (٦) ص = $٣^{س - ١}$ | (٧) ص = $٣^{س - ١}$ | (٨) ص = ١ − $٣^{س}$

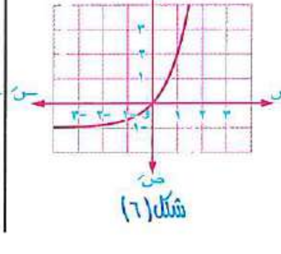

شكل(١)

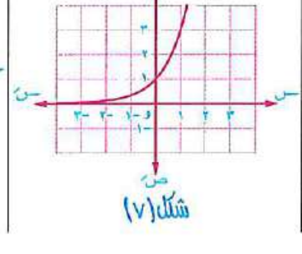

شكل(٢)

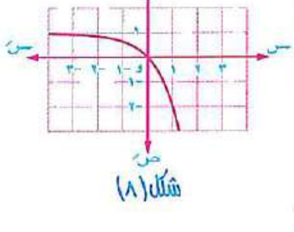

شكل(٣)


شكل(٤)


شكل(٥)


شكل(٦)


شكل(٧)


شكل(٨)

١٧ **مثل الدالة د فى كل مما يأتى بيانيًا ، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها ، وبين أيًا منها تزايدية وأيًا منها تناقصية :**

① $د(س) = ٣^{س}$ ② $د(س) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ ③ $د(س) = -٣\,(٢)^{س}$

④ $د(س) = ٢^{س+١} + ١$ ⑤ $د(س) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{س+٢} - ٢$ ⑥ $د(س) = ٢\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س-١} + ١$

⑦ $د(س) = -\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢س} + \frac{٣}{٤}$

---

١٨ **أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :**

① $٢^{س+٢} = ٤$ ② $٢^{س} = ٨$ ③ $٣^{س} = ٤ - س$

④ $٣^{س-٢} = ٣ - س$ ⑤ $٢^{١-س} = س + ٥$ ⑥ $٤^{س+١} = ٤ - س$

⑦ $٢^{س} = ٢س$ ⑧ $٢^{س} = ٣^{س+١}$ ⑨ $٢^{س+١} = ٣^{١-س}$

---

١٩ إذا كانت د : ح ← $ح^{+}$ حيث $د(س) = ٣^{س-١}$ ، فارسم منحنى الدالة لكل س ∈ [−٢ ، ٣]

ومن الرسم أوجد :

① $د\left(\frac{٣}{٢}\right)$ ② قيمة س عندما $٣^{س-١} = ٧\frac{١}{٢}$ «١٫٧ ، ٢٫٨»

---

٢٠ مثل بيانيًا الدالة د : $د(س) = \begin{cases} ١ - س^{٢} & \text{، عندما } س \leq ٠ \\ \left(\frac{١}{٢}\right)^{س} & \text{، عندما } س > ٠ \end{cases}$

ومن الرسم استنتج مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها.

---

٢١ ارسم منحنى الدالة د : $د(س) = ٢^{|س|}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

---

٢٢ ارسم منحنى الدالة د : $د(س) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{|س|}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

---

٢٣ إذا كانت : $د(س) = ٥^{س}$ وكان د (١ + جاس) + د (−١ + جاس) = ٢٦

أوجد قيم س الحقيقية. «$س = \frac{\pi}{٢} + ٢ن\pi$ حيث ن ∈ ص»

---

٢٤ **تفكير إبداعى :** إذا كانت $د(س) = ٢^{س}$

فأثبت أن : المقدار $\frac{١}{د(س) + ١} + \frac{١}{د(-س) + ١}$ له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س

تطبيقات على النمو والتضاؤل الأسى

٢٥ **الربط بالادخار :** أودع زياد مبلغ ٨٠٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك بفائدة سنوية ١٠,٥٪ ، كم يصبح جملة رصيده بالجنيه بعد ١٠ سنوات ؟ «٢١٧١٢٦ جنيه»

---

٢٦ **الربط بالسكان :** إذا كان عدد سكان إحدى الدول فى نهاية عام ٢٠٠٠ هو ٤٣,٣ مليون نسمة وكان معدل الزيادة السكانية فى السنة يساوى ١,٥ ٪

(١) أوجد صيغة تمثل عدد سكان هذه الدولة بعد مرور n سنة من عام ٢٠٠٠

(٢) استخدم هذه الصيغة لإيجاد عدد السكان المتوقع لهذه الدولة عام ٢٠٢٠ «٥٨,٣ مليون نسمة»

---

٢٧ **الربط بالرياضة :** يتناقص عدد المشجعين لإحدى فرق كرة القدم بمعدل ٤٪ نتيجة خسارتها فى إحدى الدورات الرياضية، فإذا كان عدد المشجعين فى أول مباراة ٣٦٤٠٠ فاكتب دالة أسية تمثل عدد الحضور (ص) فى المباراة (n) ، ثم قدر عدد المشجعين فى المباراة العاشرة. «٢٤٢٠٠ مشجع»

---

٢٨ **الربط بالاستثمار :** بلغ عدد الأبقار فى إحدى مزارع الماشية ٨٠ بقرة ، فإذا كان معدل التكاثر لهذه الأبقار يبلغ ١٨٪ سنويًا تقريبًا ، فأوجد عدد الأبقار فى المزرعة بعد ٤ سنوات. «١٥٥ بقرة»

---

٢٩ **الربط بالسكان :** بلغ تعداد سكان إحدى المحافظات فى جمهورية مصر العربية ٤,٦ مليون نسمة بمتوسط زيادة ٤٪ سنويًا.

(١) اكتب دالة أسية تمثل النمو المستقبلى بعد n سنة.

(٢) قدر عدد سكان هذه المحافظة بعد مرور ٥ سنوات من وقت التعداد. «٥,٦ مليون نسمة»

---

٣٠ **الربط بالصناعة :** يتناقص إنتاج منجم ذهب سنويًا بمقدار ٥٪ فإذا كان إنتاج المنجم فى السنة الأولى حوالى ٢٥٤ كجم قدر إنتاج المنجم فى السنة التاسعة. «١٦٠ كجم»

---

٣١ **الربط بالأحياء :** إذا كانت كمية البكتيريا الموجودة فى وقت ما ٢٠٠٠ بكتيريا وكانت البكتيريا تتزايد بمعدل ٧٪ فى الساعة. أوجد كمية البكتيريا الموجودة بعد مرور ١١ ساعة. «٤٢١٠ بكتيريا»

---

٣٢ أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ٨٪

أوجد جملة المبلغ بعد مرور عشرة أعوام فى كل من الحالات الآتية :

(١) العائد سنوى. (٢) العائد ربع سنوى. (٣) العائد شهرى.

«١٠٧٩٤,٦٢ ، ١١٠٤٠,٢ ، ١١٠٩٨,٢ جنيه»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة د : د (س) = $(٢\,أ)^{س}$ تكون متناقصة عندما أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ∞[(ج)]٠ ، ٢[(د)]٠ ، $\frac{١}{٢}$[

(٢) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\left(\frac{أ}{٣}\right)^{س}$ دالة أسية تزايدية فإن ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (ج) أ > ٣ (د) أ < ٣

(٣) إذا كانت د : د (س) = $(أ - ٢)^{س}$ دالة أسية فإن ....

(أ) أ ∈ $ح^{+}$ - {٢} (ب) أ > ٢

(ج) أ < ٢ (د) أ ∈]٢ ، ∞[- {٣}

(٤) أى المنحنيات الآتية يقطع محور السينات ؟

(أ) د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ (ب) د (س) = $٢^{س}$ + ٣

(ج) د (س) = $٣^{س}$ - ١ (د) د (س) = $٣^{س-١}$

(٥) إذا قطع المستقيم ص = ٨ المنحنيين : ص = $٢^{س}$ ، ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ فى النقطتين أ ، ب على الترتيب

فإن : طول $\overline{أب}$ = ... وحدات طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٦

(٦) إذا انعكس منحنى الدالة د : د (س) = $٣^{س}$ حول محور الصادات ثم أُزيح ٥ وحدات لأعلى

فإن الدالة الجديدة هى ر : ر (س) = ...

(أ) ٥ + $٣^{-س}$ (ب) $-٣^{س}$ + ٥ (ج) $٣^{س}$ - ٥ (د) $٣^{-س}$ - ٥

(٧) إذا كانت : د (س) = $\frac{٩^{س}}{٩^{س} + ٣}$ فإن : د (س) + د (١ - س) = ...

(أ) $\frac{٢}{٩^{س} + ٣}$ (ب) $\frac{٩^{س} + ٣}{٢}$ (ج) $\frac{١}{٣}$ (د) ١

(٨) إذا كانت : د (س) = $\frac{٤^{س}}{٤^{س} + ٢}$ فإن : د $\left(\frac{١}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٢}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٣}{١١}\right)$ + ... + د $\left(\frac{١٠}{١١}\right)$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) $\frac{٦}{١١}$ (د) ١٠



الدرس

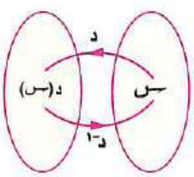
3

الدالة العكسية

الدالة العكسية

* إذا كانت د دالة أحادية مجالها س ومداها ص (bijective function) فإن كل عنصر ص فى المدى يناظره عنصر وحيد س فى المجال ولذلك يمكن تعيين دالة عكسية من ص إلى س ويرمز لها بالرمز د$^{-1}$

بحيث : د$^{-1}$ (ص) = س



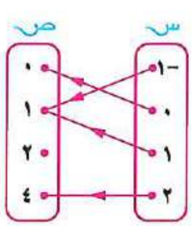
أى أنه إذا كان لكل (س ، ص) ∈ بيان د فإن : (ص ، س) ∈ بيان د$^{-1}$

، ص هى مدى د ومجال د$^{-1}$ ، س هى مجال د ومدى د$^{-1}$

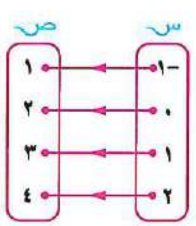
مثال ١

بين أيًا من الدالتين الممثلتين بالمخططين السهميين المقابلين لها دالة عكسية

واكتب بيان د ، د$^{-1}$ إن وجدت :



١



٢

الحـــل

١ لا يمكن إيجاد الدالة العكسية د$^{-1}$ للدالة د لأن الدالة د ليست أحادية

بيان د = {(-١ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٤)}

لاحظ : ارتباط العنصرين -١ ، ١ فى س بنفس العنصر ١ فى ص فإذا عكسنا الدالة فإنها تصبح علاقة بيانها = {(١ ، -١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٤ ، ٢)} وهى ليست دالة لأن العنصر ١ أصبح له صورتان هما -١ ، ١ ولذلك يجب أن تكون الدالة أحادية لكى نتمكن من إيجاد دالتها العكسية.

٢ يمكن إيجاد الدالة العكسية $د^{-1}$ للدالة د لأن الدالة د أحادية ولكل (س ، ص) ∈ بيان د يوجد (ص ، س) ∈ بيان $د^{-1}$

بيان د = {(−١ ، ١) ، (٠ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٤)}

بيان $د^{-1}$ = {(١ ، −١) ، (٢ ، ٠) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ٢)}

مثال ٢

إذا كانت الدالة د معرفة من المجموعة س = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} إلى المجموعة ص = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

وكانت : د (س) = س + ٢

١ أوجد بيان $د^{-1}$ ٢ استنتج قاعدة الدالة $د^{-1}$

الحل

١ ∵ د (٢) = ٢ + ٢ = ٤ ، د (٣) = ٣ + ٢ = ٥ ، د (٤) = ٤ + ٢ = ٦ ، د (٥) = ٥ + ٢ = ٧

∴ بيان د = {(٢ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٦) ، (٥ ، ٧)}

∴ د دالة أحادية ، مدى د = ص

∴ بيان $د^{-1}$ = {(٤ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٦ ، ٤) ، (٧ ، ٥)}

٢ بملاحظة الأزواج المرتبة فى بيان $د^{-1}$

نجد أن الإحداثى الصادى يقل عن الإحداثى السينى بمقدار ٢

أى أن : ص = س − ٢ ∴ $د^{-1}$ (س) = س − ٢

ملاحظة هامة

يمكن إيجاد قاعدة $د^{-1}$ مباشرةً بتبديل المتغيرين س ، ص ثم إيجاد ص بدلالة س

فى المثال السابق : ∵ د (س) = س + ٢ أى أن : ص = س + ٢ وبتبديل المتغيرين س ، ص

∴ س = ص + ٢ ومنها ص = س − ٢ ∴ $د^{-1}$ (س) = س − ٢

مثال ٣

أوجد الدالة العكسية للدالة د : د (س) = ٣ س − ٢ ومثل الدالة ومعكوسها بيانيًا فى شكل واحد.

الحل

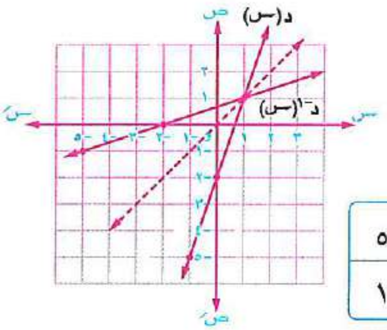
- لإيجاد الدالة العكسية نقوم بتبديل المتغيرين ثم نوجد ص بدلالة س

∵ ص = ٣ س − ٢

وبتبديل المتغيرين ∴ س = ٣ ص − ٢

نوجد ص بدلالة س   ∴ ٣ ص = س + ٢

∴ ص = $\frac{١}{٣}$ (س + ٢)   ∴ د$^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٣}$ (س + ٢)



التمثيل البيانى :

• د (س) = ٣ س − ٢

س	١	٠	−١
د (س)	١	−٢	−٥

• د$^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٣}$ (س + ٢)

س	١	−٢	−٥
د$^{-١}$ (س)	١	٠	−١

ملاحظتان

١ لاحظ أن : د$^{-١}$ (س) ≠ $\frac{١}{د (س)}$ ففى المثال السابق

د$^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٣}$ (س + ٢) بينما $\frac{١}{د (س)}$ = $\frac{١}{٣ س − ٢}$

٢ فى المثال السابق نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية لها د$^{-١}$ متماثلتان بالنسبة للمستقيم ص = س

وبصفة عامة لأى دالة د إذا أمكن إيجاد دالتها العكسية د$^{-١}$

فإن الدالتين د ، د$^{-١}$ تكونان متماثلتين بالنسبة للمستقيم ص = س

أى أن : د ، د$^{-١}$ كل منهما صورة للأخرى بالانعكاس فى المستقيم ص = س

خواص الدالة العكسية

من خواص الدالة العكسية :

١ يقال إن د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا كان (د ∘ ر) (س) = س ، (ر ∘ د) (س) = س

٢ مجال الدالة د = مدى الدالة العكسية د$^{-١}$ ، مدى الدالة د = مجال الدالة العكسية د$^{-١}$

مثال ٤

حقق أن كلًا من : د ، ر حيث د (س) = ٤ س + ٩ ، ر (س) = $\frac{س − ٩}{٤}$ دالة عكسية للأخرى.

الحـــل

∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = د $\left(\frac{س − ٩}{٤}\right)$ = ٤ $\left(\frac{س − ٩}{٤}\right)$ + ٩ = (س − ٩) + ٩ = س

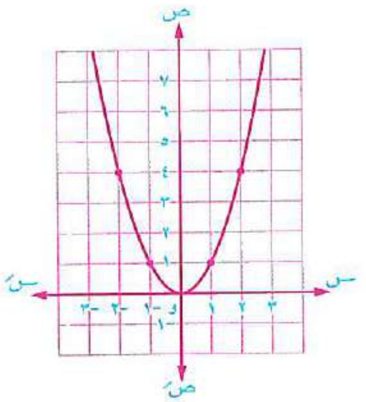
، (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) = ر (٤ س + ٩) = $\frac{٤ س + ٩ − ٩}{٤}$ = $\frac{٤ س}{٤}$ = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

مثال ٥

أوجد المجال الذى يكون فيه للدالة د : د (س) = س^{٢} دالة عكسية ، وأوجد هذه الدالة العكسية.

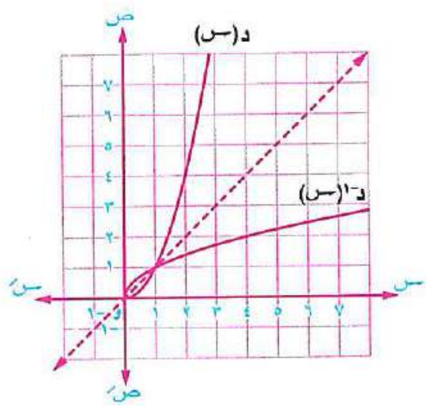
الحـــل



• إذا كانت س ∈ ح

فإن الدالة د : د (س) = س^{٢} ليست أحادية (لا تحقق شرط الخط الأفقى)

لذلك ليس لها دالة عكسية فى المجال ح



• إذا كانت س ∈ [٠ ، ∞[فإن الدالة د : د (س) = س^{٢}

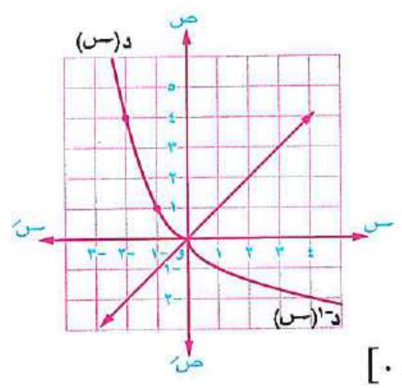
تكون أحادية ويكون لها فى هذه الحالة دالة عكسية.

∵ ص = س^{٢} حيث س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

وبتبديل المتغيرين ∴ س = ص^{٢}

∴ ص = $\sqrt{\text{س}}$ حيث : ص ≥ ٠ ، س ≥ ٠

∴ د$^{-١}$ (س) = $\sqrt{\text{س}}$



• إذا كانت : س ∈]– ∞ ، ٠] فإن الدالة د : د (س) = س^{٢}

تكون أحادية ويكون لها فى هذه الحالة دالة عكسية.

∵ ص = س^{٢} حيث س ≤ ٠ ، ص ≥ ٠

وبتبديل المتغيرين ∴ س = ص^{٢} حيث س ≥ ٠ ، ص ≤ ٠

∴ ص = – $\sqrt{\text{س}}$ حيث س ≥ ٠ ، ص ≤ ٠

∴ د$^{-١}$ (س) = – $\sqrt{\text{س}}$

∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية = [٠ ، ∞[أ،]– ∞ ، ٠]

مثال ٦

إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{\text{س} - ٢}$ + ٣ فأوجد :

[١] مجال ومدى الدالة د

[٢] د$^{-١}$ (س) وعين مجال ومدى الدالة د$^{-١}$

الحـــل

[١] مجال د = ح – {٢} ومدى د = ح – {٣}

٢ ∵ ص = $\frac{١}{\text{س} - ٢}$ + ٣ بتبديل المتغيرين ∴ س = $\frac{١}{\text{ص} - ٢}$ + ٣

∴ $\frac{١}{\text{ص} - ٢}$ = س − ٣ ∴ ص − ٢ = $\frac{١}{\text{س} - ٣}$

∴ ص = $\frac{١}{\text{س} - ٣}$ + ٢ ∴ د$^{-1}$ (س) = $\frac{١}{\text{س} - ٣}$ + ٢

∴ مجال د$^{-1}$ = ح − {٣} ومدى د$^{-1}$ = ح − {٢}

لاحظ أن : مجال الدالة د$^{-1}$ = مدى الدالة د

مثال ٧

إذا كانت د دالة حيث د (س) = ٢ + √(س − ٣) فأوجد :

١ مجال ومدى الدالة د

٢ د$^{-1}$ (س) وعين مجال ومدى الدالة د$^{-1}$

الحل

١ ∵ د (س) معرفة لجميع قيم س − ٣ ≥ ٠ ∴ س ≥ ٣ ∴ مجال د = [٣ ، ∞[

، ∵ لكل س ≥ ٣ يكون ٢ + √(س − ٣) ≥ ٢ ∴ ص ≥ ٢ ∴ مدى الدالة د = [٢ ، ∞[

٢ ∵ ص = ٢ + √(س − ٣) حيث س ≥ ٣ ، ص ≥ ٢ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ + √(ص − ٣) حيث ص ≥ ٣ ، س ≥ ٢

∴ س − ٢ = √(ص − ٣) ∴ (س − ٢)^{٢} = ص − ٣

∴ ص = (س − ٢)^{٢} + ٣

∴ د$^{-1}$ (س) = (س − ٢)^{٢} + ٣ حيث س ≥ ٢ ، ص ≥ ٣

، مجال د$^{-1}$ = مدى د = [٢ ، ∞[، مدى د$^{-1}$ = مجال د = [٣ ، ∞[

مثال ٨

أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث د (س) = (س − ٢)^{٢} + ٣ ، س ≤ ٢ موضحًا مجال د$^{-1}$

الحل

∵ ص = (س − ٢)^{٢} + ٣ ، س ≤ ٢

، ∵ لكل س ≤ ٢ يكون (س − ٢)^{٢} + ٣ ≥ ٣ ∴ ص ≥ ٣

بتبديل المتغيرين

∴ س = (ص − ٢)^{٢} + ٣ ، ص ≤ ٢ ، س ≥ ٣ ∴ (ص − ٢)^{٢} = س − ٣

، وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين ∴ ص − ٢ = ± √(س − ٣)

، ∵ ص ≤ ٢ ∴ ص − ٢ = − √(س − ٣) ∴ ص = − √(س − ٣) + ٢

∴ د$^{-1}$ (س) = − √(س − ٣) + ٢ حيث س ≥ ٣ ، ص ≤ ٢ ∴ مجال د$^{-1}$ = [٣ ، ∞[

مثال ٩

إذا كانت د : $ح^+ \longrightarrow ح$ حيث د (س) = $\frac{١}{س^٢ + ١}$ أوجد $د^{-١}$ (س) وعين مجال ومدى $د^{-١}$

الحــل

∵ ص = $\frac{١}{س^٢ + ١}$ ، س ∋ $ح^+$ ولكل س > ٠ يكون ٠ < ص < ١

وبتبديل المتغيرين ∴ س = $\frac{١}{ص^٢ + ١}$ ، ص > ٠ ، ٠ < س < ١

∴ $ص^٢ + ١ = \frac{١}{س}$ ∴ $ص^٢ = \frac{١}{س} - ١$

، ∵ ص > ٠   ∴ ص = $\sqrt{\frac{١}{س} - ١}$

∴ $د^{-١}$ (س) = $\sqrt{\frac{١}{س} - ١}$ حيث ص > ٠ ، ٠ < س < ١   ∴ مجال $د^{-١}$ =]٠ ، ١[ومدى $د^{-١}$ = $ح^+$

ملاحظـة

الدوال المتماثلة حول المستقيم ص = س دالتها العكسية هى نفسها ومنها :

١ الدوال الخطية على الصورة د : د (س) = − س + ب

مثل د : د (س) = − س + ١ ، د : د (س) = $\frac{١}{٢}$ − س ، ...

٢ الدوال الكسرية على الصورة د : د (س) = $\frac{أ}{س - ك}$ + ك حيث ك ∋ ح

مثل د : د (س) = $\frac{١}{س - ٥}$ + ٥ ، د : د (س) = $\frac{-٢}{س}$ ، ...

مثال ١٠

أثبت أن الدالة د فى كل مما يأتى دالتها العكسية هى نفسها :

١ د (س) = ٢ − س   ٢ د (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٣

الحــل

١ ص = ٢ − س بتبديل المتغيرين   ∴ س = ٢ − ص   ∴ ص = ٢ − س

∴ $د^{-١}$ (س) = ٢ − س = د (س)   ∴ د دالتها العكسية هى نفسها.

٢ ص = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٣ بتبديل المتغيرين   ∴ س = $\frac{١}{ص - ٣}$ + ٣   ∴ س − ٣ = $\frac{١}{ص - ٣}$

∴ ص − ٣ = $\frac{١}{س - ٣}$ ∴ ص = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٣

∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٣ = د (س)   ∴ د دالتها العكسية هى نفسها.

تمارين 9 على الدالة العكسية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د دالة أحادية وكانت ر دالة حيث منحنى ر هو صورة منحنى د بالانعكاس فى المستقيم ص = س فإن : ....

(أ) ر (س) = د (س) (ب) ر (س) = $\frac{١}{د (س)}$

(جـ) ر (س) = $د^{-١}$ (س) (د) ر (س) = (د ∘ د) (س)

(٢) أى مما يأتى ليس له دالة عكسية ؟

(أ) ص = $\sqrt{س}$ (ب) ص = ٣ س (جـ) ص = $س^٣$ (د) ص = $س^٢$

(٣) الدالتان د ، $د^{-١}$ كل منهما صورة الآخرى بالانعكاس فى المستقيم ....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = − س (د) ص = س

(٤) إذا كانت : (أ ، ب) ∈ منحنى الدالة د فإن : .... ∈ منحنى الدالة $د^{-١}$

(أ) (أ ، ب) (ب) (أ ، − ب) (جـ) (ب ، أ) (د) (ب ، − أ)

(٥) إذا كانت د : دالة حيث د (٧) = ٣ فإن : $د^{-١}$ (٣) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١٠

(٦) إذا كانت د = {(١ ، ٤) ، (٢ ، −٣) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ٠)} فإن : $د^{-١}$ (١) + د (٢) = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٣

(٧) إذا كانت الدالة $د^{-١}$ حيث $د^{-١}$ = {(٢ ، ٣) ، (٥ ، ب)} هى الدالة العكسية للدالة د حيث د = {(٤ ، ٥) ، (أ ، ٢)} فإن : أ − ب = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

(٨) إذا قطع المستقيم ص = س الدالة الأحادية د فى النقطة (٢ ، ٢) فإنه يقطع الدالة $د^{-١}$ فى النقطة ....

(أ) (−٢ ، ٢) (ب) (٢ ، ٢) (جـ) (−٢ ، −٢) (د) (٢ ، −٢)

(٩) إذا كانت د دالة حيث د (س) = ٧ س فإن : $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) ٧ س (ب) $\frac{س}{٧}$ (جـ) $\frac{٧}{س}$ (د) ٧ − س

(١٠) صورة النقطة (٣ ، −١) بالانعكاس فى المستقيم ص = س هى ....

(أ) (٣ ، −١) (ب) (−١ ، −٣) (جـ) (−١ ، ٣) (د) (٣ ، ١)

(١١) إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة $د^{-1}$ فى نقطة (ك ، ٢ ك − ٣) فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٢) إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة $د^{-1}$ فى نقطة $\left(أ ، \frac{٤}{أ}\right)$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ± ٢ (جـ) ٤ (د) ± ٤

(١٣) إذا كانت $د^{-1}$ هى الدالة العكسية للدالة د فإن : ....

(أ) مجال $د^{-1}$ = مجال د (ب) مجال $د^{-1}$ = مدى د

(جـ) مدى $د^{-1}$ = مدى د (د) مدى $د^{-1}$ = مجال $د^{-1}$

(١٤) إذا كانت : ص = $\sqrt[3]{س}$ فإن الدالة العكسية لها ص = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}$ (ب) $س^{٣}$ (جـ) $س^{٣}$ − ١ (د) ٣ $س^{٣}$

(١٥) إذا كان : د (س) = $س^{٣}$ + ٧ فإن : $د^{-1}$ (−١) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ٨

(١٦) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٢ فإن : $د^{-1}$ (س) = ...

(أ) $\frac{١}{٢ + س}$ − ٢ (ب) $\frac{١}{٢ - س}$ − ٢ (جـ) د (س) (د) د (−س)

(١٧) إذا كانت د دالة حيث د (س) = ٣ + $\sqrt{س - ١}$ فإن مدى $د^{-1}$ هو ....

(أ) [٣ ، ∞[(ب)]٣ ، ∞[(جـ) [١ ، ∞[(د)]١ ، ∞[

(١٨) إذا كانت الدالتين د ، ر حيث : د (س) = ٤ س − ١٢ ، ر (س) = أ س + ٣ كل منها عكسية للأخرى فإن : قيمة أ = ...

(أ) −٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٤ (د) ٣

(١٩) إذا كانت الدالة د : د (س) = ٥ س + ب هى دالة عكسية للدالة ر : ر (س) = جـ س + ٤ فإن : ب × جـ = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ٢٠ (د) −٢٠

(٢٠) إذا كانت : $د^{-1}$ (س) = ٢ س + ١ فإن : د (س) = ...

(أ) −٢ س − ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ س + ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٢ س}$ + ١

(٢١) إذا كانت د (س) = $\frac{س + ك}{س - ١}$ وكان (٥ ، ٢) ∈ $د^{-1}$ فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٢) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س - أ}$ + ب فإن : $د^{-1}$ (أ) + د (ب) = ...

(أ) غير معرفة. (ب) أ − ب (جـ) أ + ب (د) صفر

(٢٣) إذا كانت : ٣ د(س) = ٢ س − ١ فإن : د$^{-1}$ (٠) = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٥

(٢٤) (د$^{-1}$ ∘ د) (س) = ...

(أ) س (ب) $\frac{١}{د (س)}$ (جـ) د (س) (د) د$^{-1}$ (س)

(٢٥) إذا كانت د : ح − {٢} ⟵ ح − {١} حيث د (س) = $\frac{س + ١}{س − ٢}$ فإن : د$^{-1}$ (٤) = ...

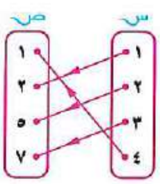
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٢٦) إذا كانت : د (س) = $\frac{٢ س + ٣}{٣ س + ٥}$ فإن مجال الدالة العكسية د$^{-1}$ (س) هو ....

(أ) ح (ب) ح − {$\frac{-٥}{٣}$} (جـ) ح − {$\frac{٢}{٣}$} (د) ح − {$\frac{-٥}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$}

(٢٧) الشكل المقابل يمثل دالة د : س ⟵ ص

فإن : د$^{-1}$ (٢) = ...

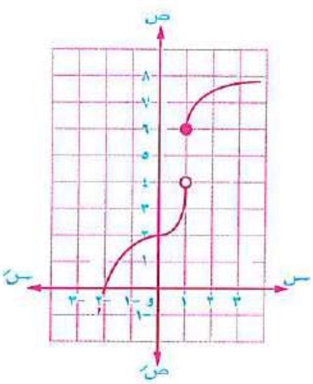


(أ) ١ (ب) ٥

(جـ) ٤ (د) ٧

(٢٨) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : د$^{-1}$ (صفر) + د$^{-1}$ (٦) = ...



(أ) −١ (ب) ٣

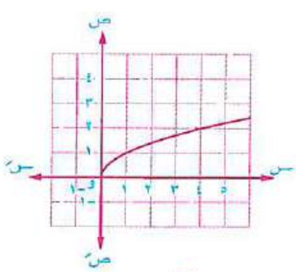
(جـ) ٥ (د) ٨

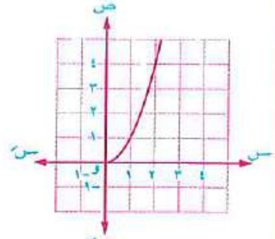
(٢٩) إذا كان الشكل المقابل يمثل

الدالة د : د (س) = $\sqrt{س}$ ، س ≥ ٠

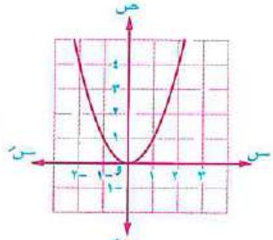
فإن أى من الأشكال التالية يمثل

منحنى الدالة د$^{-1}$ ؟

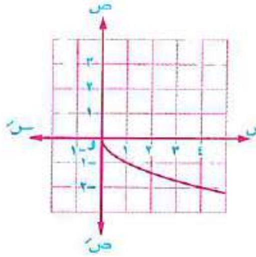




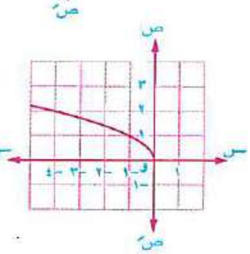
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال الآتية :

(١)

س	-٢	١	٢	٥
د (س)	٧	٤	١	-١

(٢) د = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤)}

(٣) د (س) = ٢ س + ٥

(٤) د (س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٤

(٥) د (س) = ٥ + $\frac{٤}{س}$

(٦) د (س) = ٨ س^{٣} − ١

(٧) د (س) = $\sqrt[٣]{س + ١}$

(٨) د (س) = $\sqrt[٣]{٤ - س}$

(٩) د (س) = ٢ + $\sqrt{٣ - س}$

(١٠) د (س) = س^{٢} حيث س ≤ صفر

(١١) د (س) = (س + ٢)^{٢} حيث س ≥ -٢

(١٢) د (س) = (س − ١)^{٢} + ٢ حيث س ≥ ١

(١٣) د (س) = س^{٢} + ٨ س + ٧ حيث س ≥ -٤

(١٤) د (س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث -٣ ≤ س ≤ ٠

(١٥) د (س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث ٠ ≤ س ≤ ٣

(١٦) د : ح$^{+}$ ⟵ ح بحيث د (س) = $\frac{١}{س^{٢} + ٢}$

---

٢ أى من الدوال الآتية لها دالة عكسية :

(١) د$_{١}$ = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٥)}

(٢) د$_{٢}$ = {(-١ ، ٣) ، (٠ ، ٢) ، (١ ، ٣)}

(٣) د$_{٣}$ (س) = س^{٢} − ١ حيث س ∈ ح

(٤) د$_{٤}$ (س) = |س| حيث س ∈ ح

---

٣ حدد إذا كان كل من الدالتين د ، ر دالة عكسية للأخرى أم لا فى كل مما يأتى :

(١) د (س) = ٢ س − ٣ ، ر (س) = $\frac{س + ٣}{٢}$

(٢) د (س) = س^{٢} + ٤ حيث س ≥ ٠ ، ر (س) = $\sqrt{س - ٤}$

(٣) د (س) = $\frac{-٢}{س - ٥}$ ، ر (س) = $\frac{٥ س - ٢}{س}$

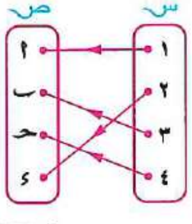
(٤) د (س) = $\sqrt[٣]{٤ س}$ ، ر (س) = $\frac{س^{٣}}{٤}$

---

٤ (١) إذا كانت : د (س) = ٥ س **أوجد :** د$^{-١}$ (س) ومثلهما بيانيًا.

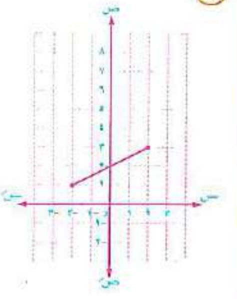
(٢) الشكل المقابل يمثل دالة د من س إلى ص

فأوجد قيمة : د$^{-١}$ (ب) + ٢ د$^{-١}$ (حـ)

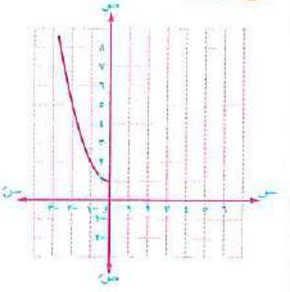


٥ في كل من الأشكال الآتية ارسم منحنى الدالة العكسية $د^{-1}$:

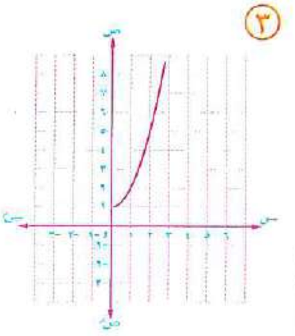
(١)



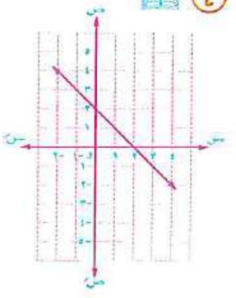
(٢)



(٣)



(٤)



---

٦ أي من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية معكوسها هو نفس الدالة :

(١) د (س) = ٢ س　　(٢) د (س) = − س　　(٣) د (س) = $\frac{٢}{س}$

(٤) د (س) = ٧ − س　　(٥) د (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٥　　(٦) د (س) = $\frac{١}{س - ك}$ + ك حيث ك ∈ ح

---

٧ اكتشف الخطأ : حاول كل من وائل ورنا إيجاد الدالة العكسية للدالة د (س) = $\frac{س - ٥}{س}$

إجابة وائل

∵ د (س) = $\frac{س - ٥}{س}$

، ∵ $د^{-1}$ (س) = $\frac{١}{د (س)}$

∴ $د^{-1}$ (س) = ١ ÷ $\frac{س - ٥}{س}$ = ١ × $\frac{س}{س - ٥}$

$د^{-1}$ (س) = $\frac{س}{س - ٥}$

إجابة رنا

∵ ص = $\frac{س - ٥}{س}$

∴ س = $\frac{ص - ٥}{ص}$ بتبديل المتغيرين

∴ ص س = ص − ٥ بالضرب التبادلي

∴ ص س − ص = −٥　∴ ص (س − ١) = −٥

∴ $د^{-1}$ (س) = $\frac{-٥}{س - ١}$

أي من الإجابتين هي الصواب ؟ ولماذا ؟

---

٨ في كل مما يأتي عين المجال الذي يكون فيه للدالة د دالة عكسية :

(١) د (س) = $س^{٢}$　　(٢) د (س) = $س^{٣}$　　(٣) د (س) = $\frac{١}{٢}$ س

---

٩ أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث : د (س) = $\frac{س - ١}{س + ٥}$

---

١٠ إذا كانت كل من الدالتين د ، ر حيث : د (س) = ٢ س + أ

، ر (س) = ب س + ٣ دالة عكسية للأخرى. فما قيمة كل من أ ، ب ؟

« −٦ ، $\frac{١}{٢}$ »

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = أ س + ب ، د$^{-1}$ (٩) = ٣ ، د$^{-1}$ (٥) = ٢ فإن : أ × ب = ...

(أ) −١٢ (ب) −١٠ (جـ) −٨ (د) −٧

(٢) إذا كانت : د (س) = س^{٢} ، ر (س) = س − ٣ فإن مجموعة حل المعادلة :

ر (د (س)) = ر$^{-1}$ (س) هي ....

(أ) {٢ ، −٣} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، −٢} (د) {٢ ، ٣}

(٣) إذا كانت د : ح − {−١} ⟵ ح − {٢} حيث س = $\frac{\text{د (س)} + ١}{٢ - \text{د (س)}}$ فإن : د$^{-1}$ (٣) = ...

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) −١

(٤) إذا كانت د : ح − {١} ⟵ ح − {٣} حيث د (س) = $\frac{\text{أ س} + ٣}{\text{س} - \text{ب}}$ فإن : د$^{-1}$ (١) = ...

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) غير معرفة.

(٥) إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = $\sqrt[3]{\text{س} - ٥}$ ، ر : ح ⟵ ح حيث ر (س) = ٢ س − ٧

فإن : (ر ∘ د$^{-1}$) (س) = ...

(أ) ٢ س^{٣} − ٣ (ب) ٢ س^{٣} − ٥ (جـ) ٢ س^{٣} + ٣ (د) ٢ س^{٣} + ٥

(٦) إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ٣ س − ٤ فإن : د$^{-1}$ (س + ٢) = ...

(أ) $\frac{\text{س} - ٢}{٣}$ (ب) $\frac{\text{س} + ٢}{٣}$ (جـ) $\frac{\text{س} + ٤}{٣}$ (د) $\frac{\text{س} + ٦}{٣}$

(٧) إذا كانت : د (س) = س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٣ س + ١ فإن : د$^{-1}$ (س) = ...

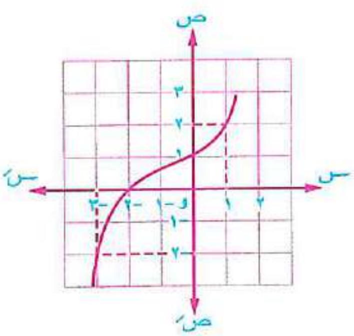
(أ) (س + ١)^{٣} (ب) $\sqrt[3]{\text{س}}$ − ١ (جـ) $\sqrt[3]{\text{س}}$ + ١ (د) س^{٣} − ١

(٨) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د$^{-1}$ (س)

فإن : (د ∘ د) (صفر) = ...

(أ) −٣ (ب) −٢

(جـ) صفر (د) ١





الدرس

4

الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى

نعلم أنه يمكن كتابة العدد ٨ على الصورة : $٨ = ٢^{٣}$ ، والعدد (٣) الذى يجب وضعه كأس للعدد (٢) ليعطى (٨) يسمى لوغاريتم العدد (٨) للأساس (٢) ويرمز له بالرمز $\text{لو}_{٢}\ ٨$

وهكذا نجد أن كل صورة أسية أساسها عدد حقيقى موجب $\neq ١$ يوجد لها صورة أخرى تكافئها تسمى بالصورة اللوغاريتمية وعمومًا فإن :

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{أ}}\ \text{س} \Leftrightarrow \text{س} = \text{أ}^{\text{ص}}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{١\}$ ، $\text{س} \in \text{ح}^{+}$ ، $\text{ص} \in \text{ح}$

فمثلًا : $\text{لو}_{٣}\ ٨١ = ٤ \Leftrightarrow ٣^{٤} = ٨١$ ، $\text{لو}_{٣}\ \frac{١}{٩} = -٢ \Leftrightarrow ٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$

، $٤^{٢} = ١٦ \Leftrightarrow \text{لو}_{٤}\ ١٦ = ٢$ ، $٢^{-٣} = \frac{١}{٨} \Leftrightarrow \text{لو}_{٢}\ \frac{١}{٨} = -٣$ وهكذا

ملاحظــات

١ لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب ، فكل من $\text{لو}_{٢}\ -٣$ ، $\text{لو}_{٥}\ -٨$ ، $\text{لو}_{٦}$ صفر لا معنى له.

٢ الأساس أ يجب أن يكون عددًا موجبًا يختلف عن الواحد الصحيح ويترتب على ذلك أن كلًا من :

$\text{لو}_{-٢}\ ٨$ ، $\text{لو}_{\text{صفر}}\ ٥$ ، $\text{لو}_{١}\ ٤$ لا معنى له.

٣ اللوغاريتم المعتاد هو اللوغاريتم الذى أساسه ١٠ وقد اتفق على حذف هذا الأساس عند كتابة اللوغاريتم

فمثلًا : $\text{لو}_{١٠}\ ٣$ تكتب لو ٣

الدالة اللوغاريتمية

إذا كان $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{١\}$ فإن الدالة د : $\text{ح}^{+} \longrightarrow \text{ح}$ حيث د (س) = $\text{لو}_{\text{أ}}\ \text{س}$ تسمى بالدالة اللوغاريتمية.

العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية

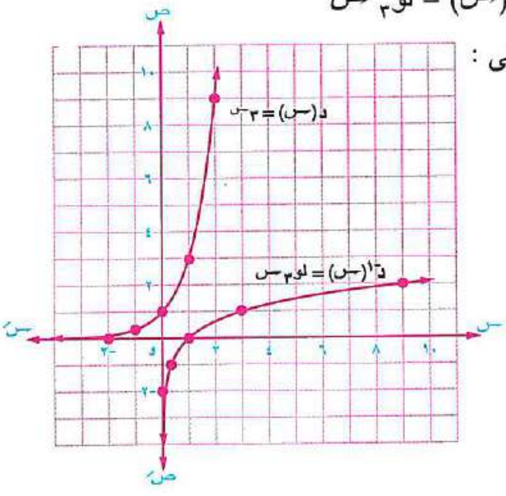
درسنا فيما سبق لرسم الدالة الأسية د : د (س) = $٣^{س}$ أى ص = $٣^{س}$ نكون الجدول التالى :

س	-٢	-١	٠	١	٢
د (س) = $٣^{س}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩

وبتبديل المتغيرين نحصل على الدالة العكسية س = $٣^{ص}$

وهى الصورة المكافئة للدالة اللوغاريتمية ص = $لو_٣$ س أى $د^{-١}$ (س) = $لو_٣$ س

ولرسم هذه الدالة نبدل قيم س ، ص فى الجدول السابق كما يلى :



س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
$د^{-١}$ (س) = $لو_٣$س	-٢	-١	٠	١	٢

* من خواص الدالة العكسية والشكل المقابل نلاحظ أن :

منحنيى الدالتين متماثلان حول المستقيم ص = س

، مجال الدالة الأسية هو ح

والمدى =]٠ ، ∞[

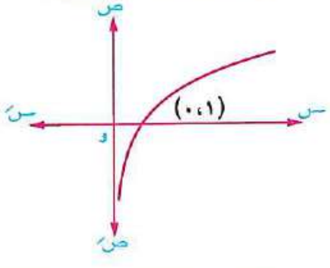
، مجال الدالة اللوغاريتمية هو]٠ ، ∞[والمدى = ح

أى أن الدالة اللوغاريتمية هى الدالة العكسية للدالة الأسية.

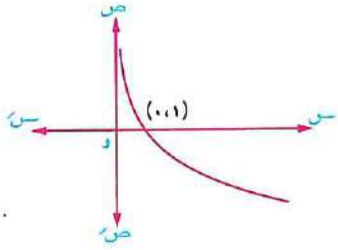
التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية د : د(س) = $لو_أ$ س

- الشكل البيانى للدالة اللوغاريتمية يأخذ أحد الشكلين الآتيين حسب قيمة الأساس أ :

إذا كانت : أ > ١



إذا كانت : ٠ < أ < ١



بعض خواص الدالة اللوغاريتمية د : د (س) = $لو_أ$س

١ مجال الدالة اللوغاريتمية = $ح^+$ ٢ مدى الدالة اللوغاريتمية = ح

٣ الدالة اللوغاريتمية تزايدية عندما أ > ١ وتناقصية عندما ٠ < أ < ١

٤ جميع منحنيات الدوال اللوغاريتمية لأى أساس موجب ≠ ١ تمر بالنقطة (١ ، ٠)

٥ الدالة اللوغاريتمية هى دالة أحادية أى أنه إذا كان $لو_أ$ س = $لو_أ$ ص فإن س = ص

مثال ١

عبر عن كل مما يأتى بالصورة الأسية المكافئة :

[١] $\text{لو}_{٢}\ ٦٤ = ٦$ [٢] $\text{لو}_{٢}\ ٨\sqrt{٢} = \frac{٧}{٢}$ [٣] $\text{لو}_{٣}\ \frac{١}{٢٧} = -٣$ [٤] $\text{لو}\ ٠,٠١ = -٢$

الحـــل

[١] $\text{لو}_{٢}\ ٦٤ = ٦ \Leftrightarrow ٦٤ = ٢^{٦}$

[٢] $\text{لو}_{٢}\ ٨\sqrt{٢} = \frac{٧}{٢} \Leftrightarrow ٨\sqrt{٢} = ٢^{\frac{٧}{٢}}$

[٣] $\text{لو}_{٣}\ \frac{١}{٢٧} = -٣ \Leftrightarrow \frac{١}{٢٧} = ٣^{-٣}$

[٤] $\text{لو}\ ٠,٠١ = -٢ \Leftrightarrow ٠,٠١ = ١٠^{-٢}$

مثال ٢

اكتب الصورة اللوغاريتمية المكافئة لكل من الصور الأسية الآتية :

[١] $٢٤٣ = (\sqrt{٣})^{١٠}$ [٢] $١٠^{-٢} = ٠,٠١$ [٣] $٣^{\frac{٥}{٢}} = ٩\sqrt{٣}$ [٤] $\text{حـ} = \text{أ}^{\text{س}}$

الحـــل

[١] $٢٤٣ = (\sqrt{٣})^{١٠} \Leftrightarrow \text{لو}_{\sqrt{٣}}\ ٢٤٣ = ١٠$

[٢] $١٠^{-٢} = ٠,٠١ \Leftrightarrow \text{لو}_{١٠}\ ٠,٠١ = -٢$

[٣] $٣^{\frac{٥}{٢}} = ٩\sqrt{٣} \Leftrightarrow \text{لو}_{٣}\ ٩\sqrt{٣} = \frac{٥}{٢}$

[٤] $\text{حـ} = \text{أ}^{\text{س}} \Leftrightarrow \text{لو}_{\text{أ}}\ \text{حـ} = \text{س}$

مثال ٣

أوجد قيمة كل من :

[١] $\text{لو}_{٢}\ ٦٤$ [٢] $\text{لو}_{٦}\ ١$ [٣] $\text{لو}_{٤}\ ٤\sqrt{٢}$

[٤] $\text{لو}_{\sqrt{٣}}\ \frac{١}{٢٧}$ [٥] $\text{لو}\ ٠,٠٠٠١$

الحـــل

[١] بفرض أن : $\text{لو}_{٢}\ ٦٤ = \text{س}$ ∴ $٢^{\text{س}} = ٦٤$ ∴ $٢^{\text{س}} = ٢^{٦}$

∴ $\text{س} = ٦$ ∴ $\text{لو}_{٢}\ ٦٤ = ٦$

[٢] بفرض أن : $\text{لو}_{٦}\ ١ = \text{س}$ ∴ $٦^{\text{س}} = ١$

∴ س = صفر ∴ $\text{لو}_{٦}\ ١ =$ صفر

[٣] بفرض أن : $\text{لو}_{٤}\ ٤\sqrt{٢} = \text{س}$ ∴ $٤^{\text{س}} = ٤\sqrt{٢}$ ∴ $٢^{٢\text{س}} = ٢^{٢} \times ٢^{\frac{١}{٢}}$

∴ $٢^{٢\text{س}} = ٢^{\frac{٥}{٢}}$ ∴ $٢\text{س} = \frac{٥}{٢}$ ∴ $\text{س} = \frac{٥}{٤}$

∴ $\text{لو}_{٤}\ ٤\sqrt{٢} = \frac{٥}{٤}$

[٤] بفرض أن : $\text{لو}_{\sqrt{٣}}\ \frac{١}{٢٧} = \text{س}$ ∴ $(\sqrt{٣})^{\text{س}} = \frac{١}{٢٧}$ ∴ $٣^{\frac{١}{٢}\text{س}} = ٣^{-٣}$

∴ $\frac{١}{٢}\text{س} = -٣$ ∴ $\text{س} = -٦$ ∴ $\text{لو}_{\sqrt{٣}}\ \frac{١}{٢٧} = -٦$

[٥] بفرض أن : $\text{لو}\ ٠,٠٠٠١ = \text{س}$ ∴ $١٠^{\text{س}} = ٠,٠٠٠١ = ١٠^{-٤}$

∴ $\text{س} = -٤$ ∴ $\text{لو}\ ٠,٠٠٠١ = -٤$

مثال ٤

أوجد قيمة س إذا كان :

(١) $لو_٢ س = -٤$ (٢) $لو_٩ ٨١ \sqrt[٣]{} = س$ (٣) $لو_{\frac{١}{٢}} س = -٣$ (٤) $لو_س ٨ = ٦$

الحل

(١) ∵ $لو_٢ س = -٤$ ∴ $س = ٢^{-٤}$ ∴ $س = \frac{١}{٢^٤} = \frac{١}{١٦}$

(٢) ∵ $لو_٩ ٨١ \sqrt[٣]{} = س$ ∴ $٩^س = ٨١ \sqrt[٣]{}$ ∴ $٣^{٢س} = ٣^٤ \times ٣^{\frac{١}{٢}}$

∴ $٣^{٢س} = ٣^{\frac{٩}{٢}}$ ∴ $٢ س = \frac{٩}{٢}$ ∴ $س = \frac{٩}{٤}$

(٣) ∵ $لو_{\frac{١}{٢}} س = -٣$ ∴ $س = \left(\frac{١}{٢}\right)^{-٣} = ٢^٣$ ∴ $س = ٨$

(٤) ∵ $لو_س ٨ = ٦$ ∴ $س^٦ = ٨$ ∴ $س^٦ = ٢^٣$

∴ $س = (٢^٣)^{\frac{١}{٦}}$ ∴ $س = ٢^{\frac{١}{٢}}$ ∴ $س = \sqrt{٢}$

مثال ٥

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $لو_س ٧ س = ٢$ (٢) $لو_٢ \left(س^٢ + \frac{٣}{٤} س\right) = -٢$

(٣) $لو_٢ لو_٣ (س^٢ - ٧ س + ٢١) = ١$ (٤) $(لو_٢ س)^٢ - ٣ لو_٢ س = ٤$

الحل

(١) ∵ $لو_س ٧ س = ٢$ ∴ $س^٢ = ٧ س$

∴ $س^٢ - ٧ س = ٠$ ∴ $س (س - ٧) = ٠$

∴ إما $س = ٠$ (مرفوض) أ، $س = ٧$ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = $\{٧\}$

(٢) ∵ $لو_٢ \left(س^٢ + \frac{٣}{٤} س\right) = -٢$

∴ $س^٢ + \frac{٣}{٤} س = ٢^{-٢}$

∴ $س^٢ + \frac{٣}{٤} س = \frac{١}{٤}$

∴ $٤ س^٢ + ٣ س - ١ = ٠$

∴ $(س + ١) (٤ س - ١) = ٠$ ∴ $س = -١$ (يحقق) أ، $س = \frac{١}{٤}$ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = $\{-١ ، \frac{١}{٤}\}$

لاحظ أنه

عند حل المعادلات نعوض بالقيم التى نحصل عليها فى المعادلة الأصلية ويكون الحل هو القيمة التى تحقق هذه المعادلة حيث إنه لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب.

أو إيجاد مجموعة قيم المتغير س المسموح التعويض بها قبل البدء فى حل المعادلات وذلك لتجنب عملية التعويض بقيم س التى تم الحصول عليها.

٣ ∵ لو$_{٢}$ لو$_{٣}$ (س^{٢} − ٧ س + ٢١) = ١ ∴ لو$_{٣}$ (س^{٢} − ٧ س + ٢١) = ٢^{١} = ٢

∴ س^{٢} − ٧ س + ٢١ = ٣^{٢} = ٩ ∴ س^{٢} − ٧ س + ١٢ = ٠

∴ (س − ٣) (س − ٤) = ٠ ∴ إما س = ٣ (يحقق) أ، س = ٤ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {٣ ، ٤}

٤ ∵ (لو$_{٢}$ س)^{٢} − ٣ لو$_{٢}$ س − ٤ = ٠ ∴ (لو$_{٢}$ س − ٤) (لو$_{٢}$ س + ١) = ٠

∴ إما لو$_{٢}$ س = ٤ ∴ س = ٢^{٤} = ١٦ (يحقق)

أ، لو$_{٢}$ س = −١ ∴ س = ٢$^{-١}$ = $\frac{١}{٢}$ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {١٦ ، $\frac{١}{٢}$}

مثال ٦

إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{م}$ س يمر بالنقطة (٢٧ ، ٣)

أوجد قيمة م ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∈ [$\frac{١}{٩}$ ، ٩] ومن الرسم :

١ استنتج المجال والمدى والاطراد ونقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات.

٢ أوجد قيمة تقريبية للعدد لو$_{٣}$ ٦

الحل

∵ د (س) = لو$_{م}$ س لكل س > ٠ ، م ∈ ح$^{+}$ − {١}

، ∵ النقطة (٢٧ ، ٣) ∈ منحنى الدالة ∴ ٣ = لو$_{م}$ ٢٧ ∴ م^{٣} = ٢٧ = ٣^{٣}

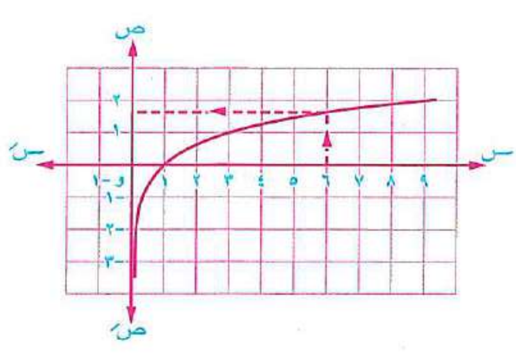
∴ م = ٣ ∴ د (س) = لو$_{٣}$ س

نكون الجدول الآتى : [مع ملاحظة أن الأساس = ٣ > ١]

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
ص = لو$_{٣}$ س	−٢	−١	صفر	١	٢

* لاحظ اختيار قيم س قوى العدد ٣ (الأساس) {٣$^{-٢}$ ، ٣$^{-١}$ ، ٣^{٠} ، ٣^{١} ، ٣^{٢}}

• ومن الرسم نجد أن :



* المجال = ح$^{+}$ ، المدى = ح

* الدالة تزايدية على مجالها.

* المنحنى يقطع محور السينات فى النقطة (١ ، ٠)

* لو$_{٣}$ ٦ ≃ ١,٦

مثال ٧

إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = $لو_{ا}$ س يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{١٦} ، ٤\right)$ أوجد قيمة ا ثم ارسم منحنى الدالة د متخذاً س ∈ $\left[\frac{١}{٤} ، ٤\right]$ ومن الرسم استنتج المدى والاطراد ثم أوجد قيمة تقريبية للعدد $لو_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥

الحـــل

∵ د (س) = $لو_{ا}$ س لكل س > ٠ ، ا ∈ $ح^{+}$ − {١} ، ∵ النقطة $\left(\frac{١}{١٦} ، ٤\right)$ ∈ منحنى الدالة

∴ ٤ = $لو_{ا} \frac{١}{١٦}$ ∴ $ا^{٤} = \frac{١}{١٦} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$

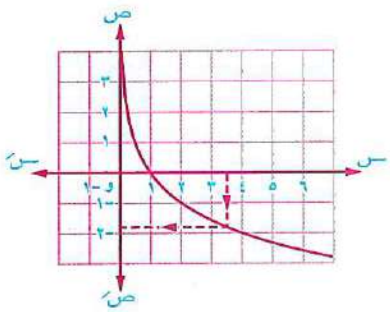
∴ ا = $\frac{١}{٢}$ (ويرفض الحل السالب) . ∴ د (س) = $لو_{\frac{١}{٢}}$ س

نكون الجدول الآتى : (مع ملاحظة أن الأساس = $\frac{١}{٢}$ < ١)

س	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤
ص = $لو_{\frac{١}{٢}}$ س	٢	١	صفر	−١	−٢

* لاحظ اختيار قيم س قوى العدد $\frac{١}{٢}$ (الأساس)

$\left\{\left(\frac{١}{٢}\right)^{-٢} ، \left(\frac{١}{٢}\right)^{-١} ، \left(\frac{١}{٢}\right)^{٠} ، \left(\frac{١}{٢}\right)^{١} ، \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\right\}$



• ومن الرسم نجد أن :

* المدى = ح
* الدالة تناقصية على مجالها.
* $لو_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥ ≃ −١,٨

مثال ٨

أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

[١] د (س) = $لو_{٤}$ (٤ − س)
[٢] د (س) = $لو_{١-س}$ ٥
[٣] د (س) = $لو_{س-٢}$ س
[٤] د (س) = $لو_{٣-س}$ س

الحـــل

[١] الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن : ٤ − س > ٠ أى س < ٤

∴ مجال د =]−∞ ، ٤[

[٢] الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

١ − س > ٠ ، ١ − س ≠ ١ أى تحقق أن س < ١ ، س ≠ ٠

∴ مجال د =]−∞ ، ١[− {٠}

تذكر أن

الدالة د : د (س) = $لو_{ا}$ س معرفة لجميع قيم س ، ا التى تحقق أن : س > ٠ ، ا > ٠ ، ا ≠ ١

٣ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

$\left\{\begin{matrix} س > ٠ \\ س - ٣ > ٠ \\ س - ٣ \neq ١ \end{matrix}\right.$ أى تحقق أن $\left\{\begin{matrix} س > ٠ \\ س > ٣ \\ س \neq ٤ \end{matrix}\right.$ ∴ مجال د =]٣ ، ∞[- {٤}

٤ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن $\left\{\begin{matrix} س > ٠ \\ ٣ - س > ٠ \\ ٣ - س \neq ١ \end{matrix}\right.$ أى تحقق أن $\left\{\begin{matrix} س > ٠ \\ س < ٣ \\ س \neq ٢ \end{matrix}\right.$

∴ مجال د =]٠ ، ٣[- {٢}

مثال ٩

استخدم منحنى الدالة د : د (س) = لو$_٢$ س لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم حدد مجال ومدى واطراد كل دالة :

١ ر (س) = لو$_٢$ س + ٢

٢ ى (س) = لو$_٢$ (س - ١)

٣ ل (س) = - لو$_٢$ س

٤ ت (س) = لو$_٢$ (- س)

الحل

١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د

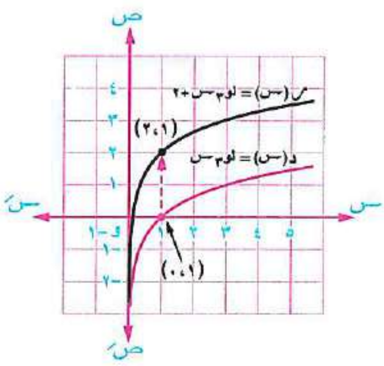
بإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة

فى اتجاه $\overleftarrow{و ص}$

، المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تزايدية على مجالها.



٢ منحنى الدالة ى هو نفس منحنى الدالة د

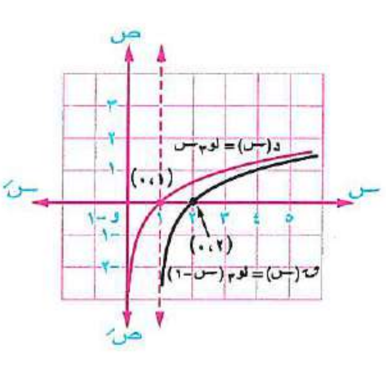
بإزاحة أفقية قدرها وحدة واحدة

فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$

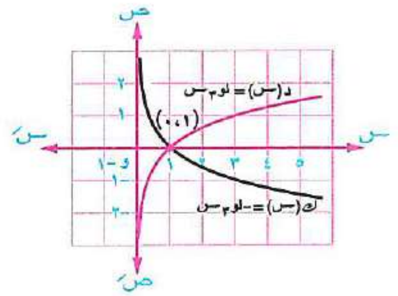
، المجال =]١ ، ∞[

، المدى = ح

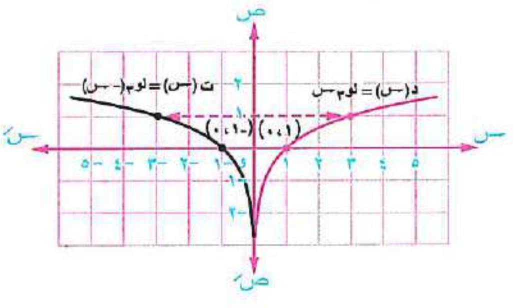
، الدالة تزايدية على مجالها.



٣ منحنى الدالة ل هو نفس منحنى الدالة د
بالانعكاس في محور السينات
، المجال =]٠ ، ∞[
، المدى = ح
، الدالة تناقصية على مجالها.



٤ منحنى الدالة ت هو نفس منحنى الدالة د
بالانعكاس في محور الصادات
، المجال =]- ∞ ، ٠[
، المدى = ح
، الدالة تناقصية على مجالها.



استخدام الآلة الحاسبة

* مفتاح اللوغاريتم لأى أساس هو $\log_{\square}\square$ ، مفتاح اللوغاريتم المعتاد هو log

فمثلًا :

١ لإيجاد لو$_٣$ ٢٤ نستخدم مفتاح الحاسبة بالتتابع الآتى

Start → $\log_{\square}\square$ 3 REPLAY 2 4 = 2.892789261

فيكون لو$_٣$ ٢٤ ≃ ٢,٨٩٢٨ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

٢ لإيجاد لو ٨,٤ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى

Start → log 8 . 4 = 0.9242792861

فيكون لو ٨,٤ ≃ ٠,٩٢٤٣ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

٣ لإيجاد العدد س الذى يحقق لو س = ٠,٤٥٧٢ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى

Start → shift log($10^{\square}$) 0 . 4 5 7 2 = 2.865497276

∴ س ≃ ٢,٨٦٥٥ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

تمـارين 10

على الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى | • فهم | • تطبيق | • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الصورة لو$_{أ}$ س = ص تكافئ تمامًا الصورة ....

(أ) لو$_{أ}$ ص = س (ب) أ^{ص} = س (جـ) أ^{س} = ص (د) ص = أ س

(٢) لو$_{\frac{٥}{٢}}$ $\frac{١٦}{٦٢٥}$ = ...

(أ) −٢ (ب) −٤ (جـ) ٣ (د) ٥

(٣) لو$_{٣}$ لو$_{٢}$ ٨ = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٤

(٤) إذا كان : لو ٠,٠١ = ٣ س + ١ فإن : س = ...

(أ) −٣ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٧

(٥) إذا كان : لو$_{٣}$ س = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ٩

(٦) إذا كان : لو$_{\frac{١}{٣}}$ س = −١ فإن : س = ...

(أ) −٣ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٣

(٧) إذا كان : لو$_{٢}$ س = لو$_{٣}$ ٩ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٨) إذا كان : لو$_{٥}$ س = ٢ فإن : لو (٤٠ س) = ...

(أ) ٣ (ب) ٢٥ (جـ) ١٠٠ (د) ١٠٠٠

(٩) إذا كان : لو$_{٥}$ س = ٣ فإن : لو$_{٥}$ $\frac{س}{٥}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٢٥ (د) ١٢٥

(١٠) إذا كان : لو (س + ١١) = ٢ فإن : س = ...

(أ) −٩ (ب) ٢٢ (جـ) ٨٩ (د) ٩١

(١١) إذا كان لو$_{٦}$ $\sqrt{س + ٤} = \frac{١}{٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(١٢) مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ ٨١ = ٤ هى ....

(أ) {−٣} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، −٣} (د) {٩}

(١٣) مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ ٣ = −٢ فى ح هى ....

(أ) $\{\frac{١}{٩}\}$ (ب) {٩} (جـ) $\{\sqrt{٣}\}$ (د) $\{\frac{١}{\sqrt{٣}}\}$

(١٤) إذا كان : لو$_{س}$ ٢٥ = ٢ فإن : س^{٣} + س^{٢} − س = ...

(أ) ٩٥ (ب) ١٠٥ (جـ) ١٤٥ (د) ١٥٥

(١٥) إذا كان : لو$_{٣}$ (٢ س + ٣) = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٩ (د) ٤

(١٦) مجموعة حل المعادلة لو (س − ١) = صفر هى ....

(أ) $\{\frac{١}{١٠}\}$ (ب) {١} (جـ) {٢} (د) {−١}

(١٧) مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ (٣ س − ٢) = ٢ هى ....

(أ) {١ ، ٢} (ب) {١} (جـ) {٢} (د) ∅

(١٨) مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ (س + ٦) = ٢ فى ح هى ....

(أ) {٣ ، −٢} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، ١} (د) {٦ ، ١}

(١٩) مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ ٦٤ س = ٤ فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {٤} (جـ) {٦} (د) {٠ ، ٤}

(٢٠) إذا كان : لو$_{|س + ٢|}$ ٦٤ = ٣ فإن : س ∈ ....

(أ) {٦ ، −٢} (ب) {٢ ، −٦}

(جـ) {٠ ، −٨} (د) {٤ ، −٨}

(٢١) إذا كان : لو$_{٣}$ (٤ + لو$_{٢}$ س) = ٢ فإن : س = ...

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ١٢٨

(٢٢) إذا كان : لو$_{٣}$ لو$_{٥}$ لو$_{٢}$ س = صفر فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٣٢

(٢٣) إذا كان : د (س) = ٢^{س} فإن : لو$_{٢}$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) س (جـ) د (س) (د) ٢

(٢٤) إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ فإن : $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) لو$_{س}$ ٣ (ب) لو$_{٣}$ س (جـ) $س^{-٣}$ (د) $٣^{س}$

(٢٥) د (س) = لو$_{٣}$ (س + ٤) فإن : $د^{-١}$ (٢) = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) لو$_{٣}$ ٦ (د) لو$_{٦}$ ٣

(٢٦) إذا كانت : د (س) = لو$_{٢}$ (س + ك) وكان $د^{-١}$ (٣) = ١ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٢٧) قيمة لو$_{٦}$ ٣٣ باستخدام الحاسبة هى .... تقريبًا.

(أ) ١,٩٥ (ب) ٠,٥١٢ (جـ) ٢,٢٩٧ (د) ٠,٧٤

(٢٨) قيمة س حيث لو س = ٠,٣٥ هى .... مقربة لأقرب جزء من ألف.

(أ) ٣,٠٥٤ (ب) ٢,٨٣٩ (جـ) ٢,٢٣٩ (د) ± ٢,٢٣٩

(٢٩) منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{٢}$ (س + ١) يقطع محور السينات فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (١ ، ١)

(٣٠) منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{٢}$ (٣ − س) يقطع محور السينات فى النقطة ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٠ ، ١) (د) (٣ ، ٠)

(٣١) مدى الدالة د : د (س) = لو$_{م}$ س هو ....

(أ) $ح^{+}$ (ب) $ح^{-}$ (جـ) ح (د) $ح^{*}$

(٣٢) الدالة د : د (س) = لو$_{م}$ س متناقصة لكل م ∈ ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠[(جـ)]٠ ، ١[(د)]١ ، ∞[

(٣٣) إذا كانت الدالة د : د (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س فإن : د $\left(\frac{١}{٤}\right)$ + د (٨) = ...

(أ) −٣ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٥

(٣٤) إذا كان : لو$_{\frac{١}{٢}}$ د (س) = س فإن : ٨ د (٢) + د (−٣) + د (٠) = ...

(أ) $\frac{١}{١٦}$ (ب) $\frac{١}{٨}$ (جـ) ١١ (د) ٢٢

(٣٥) إذا كان المنحنى ص = لو$_{٤}$ (١ − أ س) يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢}\right)$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

(٣٦) إذا كان منحنى الدالة د حيث د (س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٨ ، ٣) فإن : د (٤) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) −٢

(٣٧) مجال الدالة د حيث د (س) = لو$_{(١ - س)}$ ٣ هو ....

(أ)]−∞ ، ٠[∪]٠ ، ١[(ب)]−∞ ، ١[

(جـ)]١ ، ∞[(د)]−١ ، ١[

(٣٨) مجال الدالة د : د (س) = لو$_{١ - س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١

(جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

(٣٩) مجال الدالة د حيث د (س) = لو$_{س}$ (٥ − س) هو ....

(أ)]٠ ، ٥[− {١} (ب) [٠ ، ٥] (جـ)]٠ ، ٥[(د)]−∞ ، ٥[

(٤٠) إذا كان أ ، س ، ص ∈ ح$^{+}$ ، أ ≠ ١ وكان : لو$_{أ}$ س = لو$_{أ}$ ص فإن : ....

(أ) ص = س (ب) ص = − س (جـ) ص = أ^{س} (د) س = أ^{ص}

(٤١) إذا كان أ ، س ، ص ∈ ح$^{+}$ ، أ ≠ ١ وكان لو$_{أ}$ س = لو$_{أ}$ ص

فإن : س = ص لأن د (س) = لو$_{أ}$ س هى دالة ....

(أ) فردية. (ب) زوجية. (جـ) تزايدية. (د) أحادية.

(٤٢) إذا كان : د (س) = لو$_{أ}$ س ، أ ∈]٠ ، ١[فإن العبارات الآتية صحيحة ما عدا ....

(أ) إذا كان : لو$_{أ}$ س = لو$_{أ}$ ص فإن : س = ص

(ب) الدالة د تزايدية على مجالها.

(جـ) إذا كان : لو$_{أ}$ س > لو$_{أ}$ ص فإن : س < ص

(د) الدالة د ليست فردية ولا زوجية.

(٤٣) إذا كان : لو$_{أ}$ س < ٠ حيث أ > ١ فإن : س ∈ ....

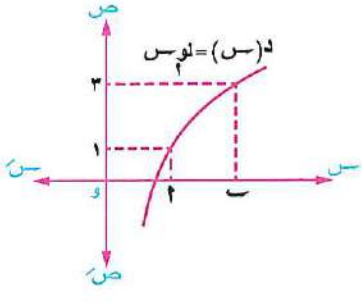
(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٠[(د)]٠ ، ∞[

(٤٤) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س

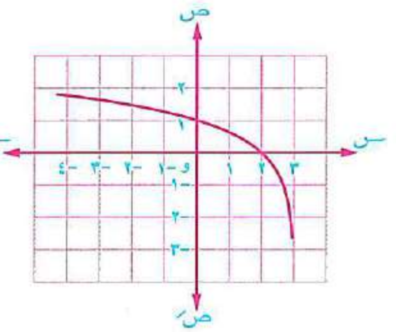
فإن : ب = ...

(أ) أ^{٢} (ب) أ + ٣

(جـ) أ^{٣} (د) ٣ أ



(٤٥) الشكل المقابل يمثل الدالة ....



(أ) ص = $٣^{س - ١}$

(ب) ص = $٣^{س + ١}$

(جـ) ص = لو$_{٣}$ (٢ − س)

(د) ص = لو$_{٣}$ (٣ − س)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ عبر عن كل من الصور اللوغاريتمية الآتية بالصورة الأسية المكافئة لها :

(١) لو$_{٢}$ ١٢٨ = ٧ (٢) لو$_{\frac{٢}{٥}}$ $\frac{٤}{٢٥}$ = ٢ (٣) لو$_{٢}$ ٤ $\sqrt{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$

---

٢ عبر عن كل من الصور الأسية الآتية بالصورة اللوغاريتمية المكافئة لها :

(١) $٥^{صفر}$ = ١ (٢) $١٠^{-٤}$ = ٠,٠٠٠١ (٣) $٥^{-٣}$ = $\frac{١}{١٢٥}$

---

٣ أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) لو$_{٢}$ ١٦ «٤»

(٢) لو$_{٨}$ ١ «صفر»

(٣) لو ٠,٠٠٠١ «−٥»

(٤) لو$_{\frac{١}{٢}}$ ١٢٨ «−٧»

(٥) لو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ «−٣»

(٦) لو$_{\sqrt{٢}}$ ٨ $\sqrt{٢}$ «٧»

(٧) لو$_{٣}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$ «$\frac{٣}{٤}$»

(٨) لو$_{٢}$ حا ٤٥° «−$\frac{١}{٢}$»

---

٤ حل فى ح كلاً من المعادلات الآتية :

(١) لو$_{٢}$ س = ٧ «١٢٨»

(٢) لو$_{٥}$ س = −٢ «$\frac{١}{٢٥}$»

(٣) لو$_{٣}$ $س^{٢}$ = ٤ «± ٩»

(٤) لو$_{٨١}$ س = $\frac{٣}{٤}$ «٢٧»

(٥) لو$_{٢}$ $س^{-١}$ = −٥ «٣٢»

(٦) لو$_{٢}$ (لو$_{٣}$ س) = ١ «٩»

(٧) لو$_{٣}$ (٢ س − ٥) = ٠ «٣»

(٨) لو$_{٨}$ $\sqrt[٣]{س^{٢} + ٤٨}$ = $\frac{٢}{٣}$ «± ٤»

(٩) لو$_{٣}$ لو$_{٢}$ ($س^{٢}$ − ٢ س) = ١ «٤ أ، −٢»

(١٠) لو$_{٥}$ |٢ س + ١| = ١ «٢ أ، −٣»

(١١) لو$_{٢}$ س (س + ٦) = ٤ «٢ أ، −٨»

(١٢) لو$_{٣}$ ($س^{٢}$ − ٢ س) = ١ «٣ أ، −١»

(١٣) $(لو_{٣} س)^{٢}$ − ٩ لو$_{٣}$ س + ٢٠ = ٠ «٨١ أ، ٢٤٣»

(١٤) لو$_{٢}$ ($٣^{س}$ − $٣^{س - ٢}$) = ٣ «٢»

(١٥) $٣^{لو_{٤} (س + ١,٢٥)}$ = $\frac{١}{٣}$ «−١»

(١٦) |لو$_{١٠}$ س − ٢| = ٢ «$١٠^{٤}$ أ، ١»

٥ **أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :**

(١) لو$_{س}$ ١٢٥ = ٣ «{٥}»

(٢) لو$_{س}$ ٢ = ٥ «{$\sqrt[5]{٢}$}»

(٣) لو$_{س}$ ٣ = −٢ «{$\frac{١}{\sqrt{٣}}$}»

(٤) لو$_{س}$ ٠,٠٠١ = $\frac{-٣}{٤}$ «{١٠٠٠٠}»

(٥) لو$_{س}$ ٨١ = ٤ «{−٣}»

(٦) لو$_{س-١}$ ٢٧ = ٣ «{٤}»

(٧) لو$_{س-١}$ (٧ − س) = ٢ «{٣}»

(٨) لو$_{\frac{٢}{س}}$ ٦٤ = −٣ «{٨}»

(٩) لو$_{س}$ ٥ س = ٢ «{٥}»

(١٠) لو$_{س}$ س^{٦} = ٥ س «{$\frac{٦}{٥}$}»

(١١) لو$_{٩}$ لو$_{٣}$ لو$_{س}$ ٢٧ = ٠ «{٣}»

(١٢) لو$_{س}$ (س^{٢} − ١٢) = ١ «{٤}»

(١٣) لو$_{س}$ $\left(\sqrt{س - ٢} + ٢\right)$ = ١ «{٢ ، ٣}»

(١٤) (لو$_{٣}$ س)^{٢} + ١٥ = ٨ لو$_{٣}$ س «{٢٤٣ ، ٢٧}»

---

٦ **أوجد قيمة س فى كل مما يأتى :**

(١) لو$_{٤}$ ٨ $\sqrt{٢}$ = س «$\frac{٧}{٤}$»

(٢) لو$_{\sqrt{٥}}$ ٦٢٥ $\sqrt{٥}$ = س^{٢} «± ٣»

(٣) لو$_{٠,٣}$ ٠,٠٩ = س$^{-٢}$ «± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$»

(٤) لو$_{٢}$ (٢^{س} − ٤) + س − ٥ = ٠ «٣»

(٥) لو$_{٤}$ [١٣ + لو$_{٢}$ (س − ١)] = ٢ «٩»

(٦) لو$_{٢}$ $\left(\frac{س^{٢}}{٢ س - ٣}\right)$ = ١ «٣»

---

٧ **باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى مقربًا لأربعة أرقام عشرية :**

(١) لو ٣,١٥ (٢) لو$_{٢}$ ٢٧ (٣) ٤ لو ٧ − ٥ لو ١٣

---

٨ **باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة س فى كل مما يأتى مقربًا لأربعة أرقام عشرية :**

(١) لو س = ٠,٢٣٤٥ (٢) لو س = ١,٤١٢ (٣) لو س = −٠,٣

---

٩ **أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية فى ح × ح :**

(١) س^{ص} = ٥ س − ٤ ، لو$_{س}$ ١٦ = ص «{(٤ ، ٢)}»

(٢) لو$_{س}$ لو$_{٣}$ لو$_{س}$ ص = ٠ ، لو$_{ص}$ ٩ = ١ «{(٣ ، ٩)}»

---

١٠ إذا كان : لو$_{١٦}$ ٤٩ = أ ، لو$_{٧}$ ٢,٥ = ب **أثبت أن :** ٤$^{أ ب + ١}$ = ١٠

---

١١ **عين مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :**

(١) د (س) = لو$_{٢}$ (٢ س + ١)

(٢) د (س) = ٢ لو س

(٣) د (س) = لو$_{س}$ س

(٤) د (س) = لو$_{س-٢}$ س

⑤ د (س) = $لو_{٢ - س}$ س

⑥ د (س) = $لو_{(٥ - س)}$ (س − ٣)

⑦ د (س) = $لو_{س - ٣}$ $س^{٢}$

⑧ د (س) = $لو_{س + ٢}$ (٣ س + ١)

⑨ د (س) = $لو_{٤}$ (٣ − س) (س + ١)

⑩ د (س) = $لو_{س}$ (٣ − س) (س + ١)

---

١٢ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = $لو_{أ}$ س يمر بالنقطة (٨١ ، ٤)

أوجد قيمة أ ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∈ [$\frac{١}{٩}$ ، ٩] ومن الرسم :

① استنتج المجال والمدى والاطراد ونقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات.

② أوجد قيمة تقريبية للعدد $لو_{٣}$ ٥

---

١٣ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = $لو_{أ}$ س يمر بالنقطة ($\frac{١}{٨}$ ، ٣) أوجد قيمة أ

ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∈ [$\frac{١}{٤}$ ، ٤] ومن الرسم استنتج المدى والاطراد ونقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات ثم أوجد قيمة تقريبية للعدد $لو_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥

---

١٤ استخدم منحنى الدالة د : د (س) = $لو_{\frac{١}{٢}}$ س لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية

، ومن الرسم حدد مجال ومدى واطراد كل دالة :

① ر (س) = $لو_{\frac{١}{٢}}$ س + ٢

② ن (س) = $لو_{\frac{١}{٢}}$ (س + ١)

③ هـ (س) = − $لو_{\frac{١}{٢}}$ س

---

١٥ استخدم منحنى الدالة د : د (س) = $لو_{٢}$ س لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ، **ومن الرسم**

حدد مجال ومدى واطراد كل دالة :

① ن (س) = $لو_{٢}$ (س − ٢)

② ت (س) = $لو_{٢}$ س + ١

③ هـ (س) = − $لو_{٢}$ س

④ ر (س) = $لو_{٢}$ (− س)

---

١٦ ارسم فى شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر ، د حيث ر (س) = $لو_{٢}$ س

، د (س) = ٦ − س ثم استخدم ذلك فى إيجاد مجموعة حل المعادلة : $لو_{٢}$ س = ٦ − س «{٤}»

---

١٧ ارسم فى شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر ، د حيث ر (س) = $لو_{٣}$ س

، د (س) = ٤ − س ثم استخدم ذلك فى إيجاد مجموعة حل المعادلة : $لو_{٣}$ س = ٤ − س «{٣}»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = لو$_{م}$ (٢ س + ٤) وكانت : د$^{-١}$ (٥) = ١٤ فإن : م = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

② إذا كانت د : ح$^{+}$ ⟵ ح وكان : د (س) = لو$_{٤}$ س وكان : د$^{-١}$ (م + ٣) = ٣٢

فإن : م = ...

(أ) –٤ (ب) –٢ (جـ) –١ (د) $-\frac{١}{٢}$

③ إذا كان : د (س) = لو$_{٣}$ (س + ١) ، ر (س) = ٥ + لو$_{٣}$ (س – ١)

فإن : (د ∘ ر) (١٠) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

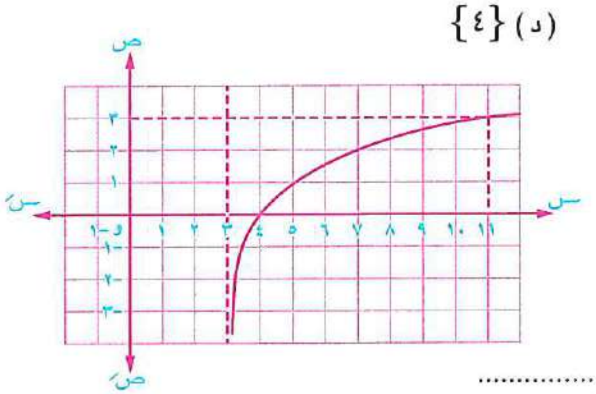
④ إذا كان : لو (س – ٥) > صفر فإن : ....

(أ) س > ٥ (ب) س > ٦ (جـ) س > ١ (د) س < ٥

⑤ مجموعة حل المعادلة : لو$_{٣}$ لو$_{٣}$ | | س – ١ | + ٥ | = ١ فى ح هى ....

(أ) {٢ ، ٤} (ب) {٢ ، –٢ ، ٤ ، –٤}

(جـ) {–٢ ، ٤} (د) {٤}



⑥ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

د : د (س) = لو$_{م}$ (س + ب)

فإن : د (٧) + د$^{-١}$ (٢) = ...

(أ) ٩ (ب) ٨

(جـ) ٧ (د) ٦

⑦ مجال الدالة د : د (س) = لو | س^{٢} – ٩ | هو ....

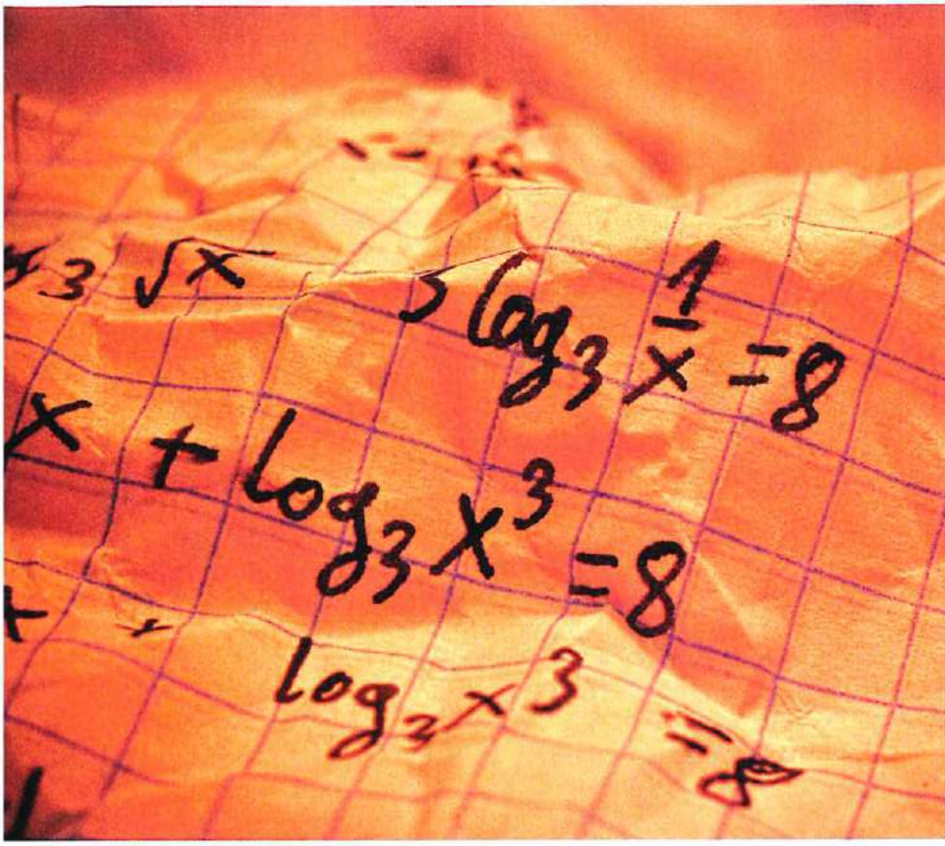
(أ) ح* (ب) ح – {٣ ، –٣}

(جـ) ح – [–٣ ، ٣] (د)]–٣ ، ٣[

⑧ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\text{لو}_{٣} (س + ٣)}{س^{٢} + ٣ س + ٢}$ هو ....

(أ) ح – {–٢ ، –١} (ب)]–٢ ، ∞[

(جـ) ح – {–٢ ، –١ ، –٣} (د)]–٣ ، ∞[– {–١ ، –٢}



الدرس

5

بعض خواص اللوغاريتمات

الخاصية الأولى

* إذا كان : أ $\in$ ح$^+$ − {١} فإن : لو$_{أ}$ أ = ١

فمثلًا : لو$_{٧}$ ٧ = ١ ، لو$_{٥}$ ٥ = ١ ، لو$_{\sqrt[٣]{٣}}$ $\sqrt[٣]{٣}$ = ١

الإثبات : $\because$ أ^{١} = أ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية $\therefore$ لو$_{أ}$ أ = ١

الخاصية الثانية

* إذا كان : أ $\in$ ح$^+$ − {١} فإن : لو$_{أ}$ ١ = صفر

فمثلًا : لو$_{٣}$ ١ = صفر ، لو$_{٥}$ ١ = صفر ، لو$_{\sqrt{٧}}$ ١ = صفر

الإثبات : $\because$ أ$^{\text{صفر}}$ = ١ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية $\therefore$ لو$_{أ}$ ١ = صفر

الخاصية الثالثة خاصية الضرب

* إذا كان : س ، ص $\in$ ح$^+$ ، أ $\in$ ح$^+$ − {١} فإن : لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

فمثلًا : لو$_{٣}$ (٢ × ٥) = لو$_{٣}$ ٢ + لو$_{٣}$ ٥

والعكس صحيح : لو$_{٥}$ ٢ + لو$_{٥}$ ١١ = لو$_{٥}$ (٢ × ١١) = لو$_{٥}$ ٢٢

الإثبات : بوضع لو$_{أ}$ س = ب ، لو$_{أ}$ ص = جـ

$\therefore$ س = أ^{ب} ، ص = أ^{جـ} $\therefore$ س ص = أ^{ب} × أ^{جـ}

$\therefore$ س ص = أ$^{ب + جـ}$ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية

$\therefore$ لو$_{أ}$ س ص = ب + جـ $\therefore$ لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

نتيجة : إذا كانت : س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ، ..... ، س$_{ن}$ $\in$ ح$^+$ ، أ $\in$ ح$^+$ − {١}

فإن : لو$_{أ}$ (س$_{١}$ × س$_{٢}$ × س$_{٣}$ × ..... × س$_{ن}$) = لو$_{أ}$ س$_{١}$ + لو$_{أ}$ س$_{٢}$ + ... + لو$_{أ}$ س$_{ن}$

فمثلًا : لو$_{٢}$ (٣ × ٥ × ٧) = لو$_{٢}$ ٣ + لو$_{٢}$ ٥ + لو$_{٢}$ ٧

والعكس صحيح : لو$_{م}$ ٧٥ + لو$_{م}$ $\frac{٤}{٩}$ + لو$_{م}$ ٠,٠٦ = لو$_{م}$ (٧٥ × $\frac{٤}{٩}$ × $\frac{٦}{١٠٠}$) = لو$_{م}$ ٢

تنبيه هام

تذكر جيدًا أن : لو$_{م}$ (س + ص) ≠ لو$_{م}$ س + لو$_{م}$ ص

كما أن : لو$_{م}$ (س × ص) ≠ لو$_{م}$ س × لو$_{م}$ ص

الخاصية الرابعة خاصية القسمة

* إذا كان : س ، ص ∈ ح$^{+}$ ، م ∈ ح$^{+}$ − {١} فإن : لو$_{م}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{م}$ س − لو$_{م}$ ص

فمثلًا : لو$_{٥}$ $\frac{٢}{٣}$ = لو$_{٥}$ ٢ − لو$_{٥}$ ٣ والعكس صحيح : لو$_{٥}$ ١١ − لو$_{٥}$ ٢ = لو$_{٥}$ $\frac{١١}{٢}$

الإثبات : بوضع لو$_{م}$ س = ب ، لو$_{م}$ ص = حـ ∴ س = م^{ب} ، ص = م^{حـ}

∴ $\frac{س}{ص}$ = $\frac{م^{ب}}{م^{حـ}}$ = م$^{ب-حـ}$

وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية ∴ لو$_{م}$ $\frac{س}{ص}$ = ب − حـ

أى أن لو$_{م}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{م}$ س − لو$_{م}$ ص

نتيجة : لو$_{م}$ $\frac{س\ ص}{ع\ ل}$ = لو$_{م}$ س + لو$_{م}$ ص − لو$_{م}$ ع − لو$_{م}$ ل

تنبيه هام

تذكر جيدًا أن : لو$_{م}$ (س − ص) ≠ لو$_{م}$ س − لو$_{م}$ ص

كما أن : لو$_{م}$ ($\frac{س}{ص}$) ≠ لو$_{م}$ س ÷ لو$_{م}$ ص

الخاصية الخامسة خاصية لوغاريتم القوة

* إذا كان : س ∈ ح$^{+}$ ، م ∈ ح$^{+}$ − {١} ، ن ∈ ح فإن : لو$_{م}$ س^{ن} = ن لو$_{م}$ س

فمثلًا : لو$_{٢}$ ١٢٥ = لو$_{٢}$ ٥^{٣} = ٣ لو$_{٢}$ ٥ والعكس صحيح : ٧ لو$_{٥}$ ٢ = لو$_{٥}$ ٢^{٧} = لو$_{٥}$ ١٢٨

الإثبات : لو$_{م}$ س^{ن} = لو$_{م}$ (س × س × س × س × ... إلى ن حدًا)

= لو$_{م}$ س + لو$_{م}$ س + ... إلى ن حدًا

= ن لو$_{م}$ س

الخاصية السادسة خاصية تغيير الأساس

* إذا كان : س ∈ ح$^{+}$ ، ص ∈ ح$^{+}$ − {١} ، م ∈ ح$^{+}$ − {١} فإن : لو$_{ص}$ س = $\frac{لو_{م} س}{لو_{م} ص}$

فمثلًا : لو$_{٥}$ ٧ = $\frac{لو ٧}{لو ٥}$ ، لو$_{٣}$ ٢ = $\frac{لو_{١١} ٢}{لو_{١١} ٣}$

الإثبات : بوضع $لو_{ص}$ س = ع ∴ $ص^{ع}$ = س بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس م

∴ ع $لو_{م}$ ص = $لو_{م}$ س ∴ ع = $\frac{لو_{م} س}{لو_{م} ص}$

أى أن $لو_{ص}$ س = $\frac{لو_{م} س}{لو_{م} ص}$

الخاصية السابعة خاصية المعكوس الضربى

* إذا كان : س ، ص ∈ $ح^{+}$ − {١} فإن : $لو_{ص}$ س = $\frac{١}{لو_{س} ص}$

فمثلًا : $لو_{٧}$ ٥ = $\frac{١}{لو_{٥} ٧}$ ومنها $لو_{٧}$ ٥ × $لو_{٥}$ ٧ = ١

الإثبات : ∵ $لو_{ص}$ س = $\frac{لو س}{لو ص}$ ، $لو_{س}$ ص = $\frac{لو ص}{لو س}$

∴ $لو_{ص}$ س × $لو_{س}$ ص = ١ ∴ $لو_{ص}$ س = $\frac{١}{لو_{س} ص}$

مثال ١

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتى :

١ $لو_{٣}$ ١٥ + $لو_{٣}$ ٦ − $لو_{٣}$ ١٠

٢ $لو_{٥}$ ١٠٠ − ٣ $لو_{٥}$ ٢ − $لو_{٥}$ ١٨ + $لو_{٥}$ ٣٦

٣ $لو_{٥} \frac{٣}{٥}$ + ٢ $لو_{٥} \frac{١٥}{٢}$ − $لو_{٥} \frac{٥}{٣٦}$ + $لو_{٥} \frac{٥}{٢٤٣}$

٤ $لو_{٢}$ ٧ × $لو_{٧}$ ١١ × $لو_{١١}$ ٩ × $لو_{٣}$ ٢

٥ $\frac{لو_{٢} ٢٤٣ - لو_{٢} ٣٢}{لو_{٢} ٢٧ - لو_{٢} ٨}$

الحل

١ المقدار = $لو_{٣} \frac{١٥ × ٦}{١٠}$ = $لو_{٣}$ ٩ = $لو_{٣}$ $٣^{٢}$ = ٢ $لو_{٣}$ ٣ = ٢ × ١ = ٢

٢ المقدار = $لو_{٥}$ ١٠٠ − $لو_{٥}$ $٢^{٣}$ − $لو_{٥}$ ١٨ + $لو_{٥}$ ٣٦

= $لو_{٥} \frac{١٠٠ × ٣٦}{٨ × ١٨}$ = $لو_{٥}$ ٢٥ = $لو_{٥}$ $٥^{٢}$ = ٢ $لو_{٥}$ ٥ = ٢ × ١ = ٢

٣ المقدار = $لو_{٥} \frac{٣}{٥}$ + $لو_{٥} \left(\frac{١٥}{٢}\right)^{٢}$ − $لو_{٥} \frac{٥}{٣٦}$ + $لو_{٥} \frac{٥}{٢٤٣}$

= $لو_{٥} \frac{\frac{٣}{٥} × \frac{١٥}{٢} × \frac{١٥}{٢} × \frac{٥}{٢٤٣}}{\frac{٥}{٣٦}}$ = $لو_{٥} \frac{٣ × ١٥ × ١٥ × ٥ × ٣٦}{٥ × ٢ × ٢ × ٢٤٣ × ٥}$ = $لو_{٥}$ ٥ = ١

٤ المقدار = $\frac{لو ٧}{لو ٢} × \frac{لو ١١}{لو ٧} × \frac{لو ٩}{لو ١١} × \frac{لو ٢}{لو ٣} = \frac{لو ٩}{لو ٣} = \frac{لو ٣^{٢}}{لو ٣} = \frac{٢ لو ٣}{لو ٣}$ = ٢

٥ المقدار = $\frac{لو_{٢} ٣^{٥} - لو_{٢} ٢^{٥}}{لو_{٢} ٣^{٣} - لو_{٢} ٢^{٣}} = \frac{٥ لو_{٢} ٣ - ٥ لو_{٢} ٢}{٣ لو_{٢} ٣ - ٣ لو_{٢} ٢} = \frac{٥ (لو_{٢} ٣ - لو_{٢} ٢)}{٣ (لو_{٢} ٣ - لو_{٢} ٢)} = \frac{٥}{٣}$

مثال ٢

بدون استخدام حاسبة الجيب أثبت كلاً مما يأتى :

١ ٣ لو ٥ + ٢ لو ٦ − لو ٩ + لو ٠,٢ = لو$_{٥}$ ٢٥

٢ $\frac{\text{لو ٣٠ − لو ٦ + لو ٥}}{\text{لو ١٢ − لو ٣ + لو ٢٥}}$ = ١ − لو ٢

الحل

١ الطرف الأيمن = لو ٥^{٣} + لو ٦^{٢} − لو ٩ + لو $\frac{٢}{١٠}$

= لو $\frac{٥^{٣} \times ٦^{٢} \times \frac{٢}{١٠}}{٩}$ = لو $\frac{١٢٥ \times ٣٦ \times ٢}{٩ \times ١٠}$

= لو ١٠٠ = لو ١٠^{٢} = ٢ لو ١٠ = ٢

، الطرف الأيسر = لو$_{٥}$ ٥^{٢} = ٢ لو$_{٥}$ ٥ = ٢ ∴ الطرفان متساويان.

٢ الطرف الأيمن = $\frac{\text{لو } \frac{٣٠ \times ٥}{٦}}{\text{لو } \frac{١٢ \times ٢٥}{٣}}$ = $\frac{\text{لو ٢٥}}{\text{لو ١٠٠}}$ = $\frac{\text{لو } ٥^{٢}}{\text{لو } ١٠^{٢}}$ = $\frac{\text{٢ لو ٥}}{\text{٢ لو ١٠}}$ = لو ٥

، الطرف الأيسر = ١ − لو ٢ = لو ١٠ − لو ٢ = لو $\frac{١٠}{٢}$ = لو ٥ ∴ الطرفان متساويان.

مثال ٣

إذا كان : لو$_{٣}$ ٧ ≃ ١,٧٧١

أوجد قيمة كل مما يأتى فى أبسط صورة ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة :

١ لو$_{٣}$ ٢١ ٢ لو$_{٣}$ ٦٣ ٣ لو$_{٣}$ $\frac{٧}{٩}$

الحل

١ لو$_{٣}$ ٢١ = لو$_{٣}$ (٣ × ٧) = لو$_{٣}$ ٣ + لو$_{٣}$ ٧ = ١ + ١,٧٧١ = ٢,٧٧١

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... Start → log▯ 3 REPLAY 2 1 =)

٢ لو$_{٣}$ ٦٣ = لو$_{٣}$ (٩ × ٧) = لو$_{٣}$ ٩ + لو$_{٣}$ ٧ = لو$_{٣}$ ٣^{٢} + لو$_{٣}$ ٧ = ٢ لو$_{٣}$ ٣ + لو$_{٣}$ ٧

= ٢ + ١,٧٧١ = ٣,٧٧١

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... Start → log▯ 3 REPLAY 6 3 =)

٣ لو$_{٣}$ $\frac{٧}{٩}$ = لو$_{٣}$ ٧ − لو$_{٣}$ ٩ = لو$_{٣}$ ٧ − لو$_{٣}$ ٣^{٢} = لو$_{٣}$ ٧ − ٢ لو$_{٣}$ ٣ = (لو$_{٣}$ ٧) − ٢

= ١,٧٧١ − ٢ = −٠,٢٢٩

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... Start → log▯ 3 REPLAY ▭ 7 REPLAY 9 =)

مثال ٤

أوجد فى أبسط صورة قيمة كل مما يأتى :

[١] $\text{لو}_{٢} \sqrt[٧]{٣٢}$

[٢] $\frac{١}{\text{لو}_{س} س ص ع} + \frac{١}{\text{لو}_{ص} س ص ع} + \frac{١}{\text{لو}_{ع} س ص ع}$

الحل

[١] $\text{لو}_{٢} \sqrt[٧]{٣٢} = \text{لو}_{٢} (٢^{٥})^{\frac{١}{٧}} = \text{لو}_{٢} ٢^{\frac{٥}{٧}} = \frac{٥}{٧} \text{ لو}_{٢} ٢ = \frac{٥}{٧}$

[٢] $\frac{١}{\text{لو}_{س} س ص ع} + \frac{١}{\text{لو}_{ص} س ص ع} + \frac{١}{\text{لو}_{ع} س ص ع}$

$= \text{لو}_{س ص ع} س + \text{لو}_{س ص ع} ص + \text{لو}_{س ص ع} ع$

$= \text{لو}_{س ص ع} س ص ع = ١$

مثال ٥

باستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين فى كل مما يأتى :

[١] $٥^{س} = ١٧$

[٢] $٢^{س - ١} = ٧$

[٣] $٥^{س + ١} = ٢^{٤س - ٣}$

[٤] $٥^{س - ٢} = ٣ \times ٤^{س + ١}$

[٥] $٣^{٢س} - ١٤ \times ٣^{س} + ٤٥ = ٠$

الحل

[١] $\because ٥^{س} = ١٧$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore \text{لو } ٥^{س} = \text{لو } ١٧$

$\therefore س \text{ لو } ٥ = \text{لو } ١٧$

$\therefore س = \frac{\text{لو } ١٧}{\text{لو } ٥}$ وباستخدام حاسبة الجيب

$\therefore س \simeq ١,٧٦$

[٢] $\because ٢^{س - ١} = ٧$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore \text{لو } ٢^{س - ١} = \text{لو } ٧$

$\therefore (س - ١) \text{ لو } ٢ = \text{لو } ٧$

$\therefore س \text{ لو } ٢ - \text{لو } ٢ = \text{لو } ٧$

$\therefore س = \frac{\text{لو } ٧ + \text{لو } ٢}{\text{لو } ٢} \simeq ٣,٨١$

[٣] $\because ٥^{س + ١} = ٢^{٤س - ٣}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore \text{لو } ٥^{س + ١} = \text{لو } ٢^{٤س - ٣}$

$\therefore (س + ١) \text{ لو } ٥ = (٤س - ٣) \text{ لو } ٢$

$\therefore س \text{ لو } ٥ + \text{لو } ٥ = ٤س \text{ لو } ٢ - ٣ \text{ لو } ٢$

$\therefore ٤س \text{ لو } ٢ - س \text{ لو } ٥ = ٣ \text{ لو } ٢ + \text{لو } ٥$

$\therefore س (٤ \text{ لو } ٢ - \text{لو } ٥) = ٣ \text{ لو } ٢ + \text{لو } ٥$

$\therefore س = \frac{٣ \text{ لو } ٢ + \text{لو } ٥}{٤ \text{ لو } ٢ - \text{لو } ٥} \simeq ٣,١٧$

٤ ∵ $٥^{س - ٢} = ٣ \times ٤^{س + ١}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ (س − ٢) لو ٥ = لو ٣ + (س + ١) لو ٤

∴ س لو ٥ − ٢ لو ٥ = لو ٣ + س لو ٤ + لو ٤

∴ س لو ٥ − س لو ٤ = لو ٣ + لو ٤ + ٢ لو ٥

∴ س (لو ٥ − لو ٤) = لو ٣ + لو ٤ + ٢ لو ٥

∴ $س = \frac{لو ٣ + لو ٤ + ٢ لو ٥}{لو ٥ - لو ٤} \simeq ٢٥,٥٦$

حل آخر

∵ $٥^{س - ٢} = ٣ \times ٤^{س + ١}$

∴ $\frac{٥^{س}}{٥^{٢}} = ٣ \times ٤^{س} \times ٤$

∴ $\frac{٥^{س}}{٤^{س}} = ٣ \times ٤ \times ٥^{٢}$

∴ $\left(\frac{٥}{٤}\right)^{س} = ٣٠٠$

∴ $س = \frac{لو ٣٠٠}{لو \frac{٥}{٤}} \simeq ٢٥,٥٦$

٥ ∵ $٣^{٢س} - ١٤ \times ٣^{س} + ٤٥ = ٠$ وبالتحليل ∴ $(٣^{س} - ٩)(٣^{س} - ٥) = ٠$

∴ إما $٣^{س} - ٩ = ٠$ ، أ، $٣^{س} - ٥ = ٠$

∴ $٣^{س} = ٩$

∴ $٣^{س} = ٣^{٢}$

∴ س = ٢

∴ $٣^{س} = ٥$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ س لو ٣ = لو ٥

∴ $س = \frac{لو ٥}{لو ٣} \simeq ١,٤٦$

ملاحظة هامة عند حل المعادلة اللوغاريتمية

إذا كانت س ∈ ح* ، م عددًا زوجيًا لا يساوى الصفر ، أ ∈ ح⁺ − {١}

فإن : $لو_{أ} س^{م} = م لو_{أ} |س|$ **فمثلًا :** $لو_{٣} س^{٤} = ٤ لو_{٣} |س|$

مثال ٦

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ ٢ لو س − لو (س + ٢) = ٠

٢ $لو س^{٢} = لو ٤ + لو ٩$

٣ $لو_{٢} س + لو_{٢} (س - ٢) = ٣$

٤ لو س + لو (س + ٢) = لو (س + ٦)

٥ $لو \sqrt[٣]{٢س - ١} + لو \sqrt[٣]{س - ٢} = لو ٣٠ - ١$

٦ $\frac{لو ٤٩ - (لو ٧)^{٢}}{لو ٠,٠٧} = لو س$

الحل

١ ∵ ٢ لو س − لو (س + ٢) = ٠

∴ $لو س^{٢} = لو (س + ٢)$

∴ $س^{٢} = س + ٢$ ∴ $س^{٢} - س - ٢ = ٠$

∴ (س − ٢) (س + ١) = ٠

∴ إما س = ٢ (تحقق) أ، س = −١ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٢}

تذكر أن

١ الدالة اللوغاريتمية أحادية أى أنه إذا كان $لو_{م} س = لو_{م} ص$ فإن س = ص

٢ نعوض بالقيم التى نحصل عليها فى المعادلة الأصلية ويكون الحل هو القيمة التى تحقق هذه المعادلة حيث إنه لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب.

٢ ∵ لو س^{٢} = لو ٤ + لو ٩

∴ لو س^{٢} = لو ٣٦

∴ س = ± ٦ (تحقق)

∴ لو س^{٢} = لو (٤ × ٩)

∴ س^{٢} = ٣٦

∴ مجموعة الحل = {٦ ، −٦}

حل آخر : ∵ لو س^{٢} = لو ٤ + لو ٩

∴ لو س^{٢} = لو ٣٦ = لو ٦^{٢}

∴ |س| = ٦

∴ مجموعة الحل = {٦ ، −٦}

∴ لو س^{٢} = لو (٤ × ٩)

∴ ٢ لو |س| = ٢ لو ٦

∴ س = ± ٦ (تحقق)

٣ ∵ لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س − ٢) = ٣

∴ لو$_{٢}$ س (س − ٢) = ٣

∴ س^{٢} − ٢ س = ٢^{٣} = ٨

∴ س^{٢} − ٢ س − ٨ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ إما س = ٤ (تحقق) أ ، س = −٢ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٤}

٤ ∵ لو س + لو (س + ٢) = لو (س + ٦)

∴ لو س (س + ٢) = لو (س + ٦)

∴ س (س + ٢) = س + ٦

∴ س^{٢} + ٢ س − س − ٦ = ٠

∴ س^{٢} + س − ٦ = ٠

∴ (س + ٣) (س − ٢) = ٠

∴ إما س = −٣ (مرفوض) أ ، س = ٢ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٢}

٥ ∵ لو $\sqrt[٣]{٢ س − ١}$ + لو $\sqrt[٣]{س − ٢}$ = لو ٣٠ − ١

∴ لو $\sqrt[٣]{(٢ س − ١) (س − ٢)}$ = لو ٣٠ − لو ١٠

∴ لو $\sqrt[٣]{٢ س^{٢} − ٥ س + ٢}$ = لو ٣

∴ $\sqrt[٣]{٢ س^{٢} − ٥ س + ٢}$ = ٣ وبرفع الطرفين للقوة ٣

∴ ٢ س^{٢} − ٥ س + ٢ = ٢٧ ∴ ٢ س^{٢} − ٥ س − ٢٥ = ٠

∴ (٢ س + ٥) (س − ٥) = ٠

∴ إما س = $\frac{-٥}{٢}$ (مرفوض) أ ، س = ٥ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٥}

! تذكر أن لو ١٠ = ١

٦ ∵ $\frac{\text{لو } ٤٩ - (\text{لو } ٧)^{٢}}{\text{لو } ٠,٠٧} = \text{لو س}$ ∴ $\frac{\text{لو } ٧^{٢} - (\text{لو } ٧)^{٢}}{\text{لو } \frac{٧}{١٠٠}} = \text{لو س}$

∴ $\frac{٢ \text{ لو } ٧ - (\text{لو } ٧)^{٢}}{\text{لو } ٧ - \text{لو } ١٠٠} = \text{لو س}$ ∴ $\frac{\text{لو } ٧ \, (٢ - \text{لو } ٧)}{\text{لو } ٧ - ٢} = \text{لو س}$

! تذكر أن لو ١٠٠ = لو $١٠^{٢}$ = ٢

∴ − لو ٧ = لو س ∴ لو $٧^{-١}$ = لو س

∴ س = $٧^{-١} = \frac{١}{٧}$ (تحقق) ∴ مجموعة الحل = $\left\{\frac{١}{٧}\right\}$

مثال ٧

أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ $\text{لو}_{٣} (س^{٢} - ٣ س + ٢) - \text{لو}_{٣} (س - ٢) = \text{لو}_{٧} ٤٩$

٢ $س^{\text{لو س}} = ١٠$

٣ $\text{لو}_{٢} س = \text{لو}_{٤} ٢٥$

٤ $\text{لو}_{٣} س \times \text{لو}_{٩} س = ٢$

٥ $\text{لو}_{٤} س + \text{لو}_{س} ٤ = ٢$

الحل

١ ∵ $\text{لو}_{٣} (س^{٢} - ٣ س + ٢) - \text{لو}_{٣} (س - ٢) = \text{لو}_{٧} ٤٩$

∴ $\text{لو}_{٣} \frac{س^{٢} - ٣ س + ٢}{س - ٢} = \text{لو}_{٧} ٧^{٢}$

∴ $\text{لو}_{٣} \frac{(س - ٢)(س - ١)}{س - ٢} = ٢ \text{ لو}_{٧} ٧$

∴ $\text{لو}_{٣} (س - ١) = ٢$

∴ $س - ١ = ٣^{٢}$

∴ س = ١ + ٩ = ١٠

∴ مجموعة الحل = {١٠}

٢ ∵ $س^{\text{لو س}} = ١٠$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ $\text{لو } س^{\text{لو س}} = \text{لو } ١٠$

∴ لو س × لو س = ١

∴ $(\text{لو س})^{٢} = ١$

∴ لو س = ± ١ وعندما لو س = ١

∴ $س = ١٠^{١} = ١٠$

وعندما لو س = −١

∴ $س = ١٠^{-١} = ٠,١$

∴ مجموعة الحل = {١٠ ، ٠,١}

٣ ∵ $\text{لو}_{٢} س = \text{لو}_{٤} ٢٥$

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو } ٢} = \frac{\text{لو } ٢٥}{\text{لو } ٤}$

∴ $\text{لو س} = \frac{\text{لو } ٥^{٢} \times \text{لو } ٢}{\text{لو } ٢^{٢}} = \frac{٢ \text{ لو } ٥ \times \text{لو } ٢}{٢ \text{ لو } ٢} = \text{لو } ٥$

∴ س = ٥ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٥}

٤ ∵ $\text{لو}_{٣} س \times \text{لو}_{٩} س = ٢$

∴ $\text{لو}_{٣} س \times \frac{\text{لو}_{٣} س}{\text{لو}_{٣} ٩} = ٢$

∴ $(\text{لو}_{٣} س)^{٢} = ٢ \text{ لو}_{٣} ٩ = ٢ \text{ لو}_{٣} ٣^{٢} = ٤ \text{ لو}_{٣} ٣ = ٤$

∴ $\text{لو}_{٣} س = \pm ٢$

∴ $س = ٣^{٢} = ٩$ (تحقق) أ، $س = ٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = $\left\{٩ ، \frac{١}{٩}\right\}$

5 ∵ $لو_٤ س + لو_س ٤ = ٢$

∴ $لو_٤ س + \frac{١}{لو_٤ س} = ٢$ (بالضرب × $لو_٤ س$)

∴ $(لو_٤ س)^٢ + ١ = ٢ لو_٤ س$

∴ $(لو_٤ س)^٢ - ٢ لو_٤ س + ١ = ٠$

∴ $\left((لو_٤ س) - ١\right)^٢ = ٠$

∴ $لو_٤ س = ١$

∴ س = ٤ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٤}

مثال ٨

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

1 $لو ٤٩ × لو \sqrt[٣]{٨} = لو ٣٤٣ × لو س^٣$

2 $لو س^٢ = (لو س)^٢$

3 $(لو س + ١) \left(لو \frac{س}{١٠}\right) = ٣$

4 $لو س - لو_س ١٠٠ = ١$

الحل

1 ∵ $لو ٤٩ × لو \sqrt[٣]{٨} = لو ٣٤٣ × لو س^٣$

∴ $لو س^٣ = \frac{لو ٤٩ × لو \sqrt[٣]{٨}}{لو ٣٤٣} = \frac{لو ٧^٢ × لو \sqrt[٣]{٢^٣}}{لو ٧^٣} = \frac{٢ لو ٧ × لو ٢^{\frac{٣}{٣}}}{٣ لو ٧}$

∴ $لو س^٣ = \frac{٢}{٣} × \frac{٣}{٢} لو ٢$

∴ $لو س^٣ = لو ٢$

∴ $س^٣ = ٢$

∴ $س = \sqrt[٣]{٢}$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = $\{\sqrt[٣]{٢}\}$

2 ∵ $لو س^٢ = (لو س)^٢$

∴ $٢ لو س = (لو س)^٢$ حيث س > ٠

∴ $(لو س)^٢ - ٢ لو س = ٠$

∴ $لو س (لو س - ٢) = ٠$

∴ إما لو س = ٠ ومنها $س = (١٠)^{صفر} = ١$ (تحقق)

أ، لو س = ٢ ومنها $س = ١٠^٢ = ١٠٠$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {١ ، ١٠٠}

3 ∵ $(لو س + ١) \left(لو \frac{س}{١٠}\right) = ٣$

∴ $(لو س + ١) (لو س - لو ١٠) = ٣$

∴ $(لو س + ١) (لو س - ١) = ٣$

∴ $(لو س)^٢ - ١ = ٣$

∴ $(لو س)^٢ = ٤$

∴ $لو س = \pm ٢$

∴ إما لو س = ٢ ومنها $س = ١٠^٢ = ١٠٠$ (تحقق)

أ، لو س = −٢ ومنها $س = ١٠^{-٢} = ٠,٠١$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {١٠٠ ، ٠,٠١}

٤ ∵ لو س − لو$_{\text{س}}$ ١٠٠ = ١ ∴ لو س − لو$_{\text{س}}$ ١٠^{٢} = ١

∴ لو س − ٢ لو$_{\text{س}}$ ١٠ = ١ ∴ لو س − $\frac{٢}{\text{لو س}}$ = ١ (بالضرب × لو س)

∴ (لو س)^{٢} − ٢ = لو س ∴ (لو س)^{٢} − لو س − ٢ = ٠

∴ (لو س + ١) (لو س − ٢) = ٠

∴ إما لو س = −١ ومنها س = ١٠$^{-١}$ = ٠,١ (تحقق)

أ، لو س = ٢ ومنها س = ١٠^{٢} = ١٠٠ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {١٠٠ ، ٠,١}

مثال ٩

إذا كان :

١ س ص = ١٦ فأثبت أن : ٣ لو$_{٢}$ س + ٤ لو$_{٢}$ ص − لو$_{٢}$ س ص^{٢} = ٨

٢ س^{٢} + ص^{٢} = ٦ س ص فأثبت أن : ٢ لو (س + ص) = لو س + لو ص + ٣ لو ٢

الحل

١ الطرف الأيمن = لو$_{٢}$ س^{٣} + لو$_{٢}$ ص^{٤} − لو$_{٢}$ س ص^{٢}

= لو$_{٢}$ $\frac{\text{س}^{٣} \times \text{ص}^{٤}}{\text{س ص}^{٢}}$ = لو$_{٢}$ س^{٢} ص^{٢} = لو$_{٢}$ (س ص)^{٢}

= ٢ لو$_{٢}$ س ص = ٢ لو$_{٢}$ ١٦ = ٢ لو$_{٢}$ ٢^{٤} = ٢ × ٤ لو$_{٢}$ ٢

= ٨ = الطرف الأيسر.

٢ ∵ س^{٢} + ص^{٢} = ٦ س ص

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص = ٦ س ص + ٢ س ص

∴ س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = ٨ س ص

∴ (س + ص)^{٢} = ٨ س ص وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو (س + ص)^{٢} = لو ٨ س ص

∴ ٢ لو (س + ص) = لو ٨ + لو س + لو ص = لو ٢^{٣} + لو س + لو ص

= لو س + لو ص + ٣ لو ٢

مثال ١٠

إذا كانت درجة قوة الزلزال (د) على مقياس ريختر تحسب بالعلاقة د = لو $\frac{ش}{ش_{.}}$

حيث ش هى شدة الزلزال ، $ش_{.}$ هى الشدة الابتدائية وتعرف بالمقياس الصفرى لشدة الزلزال وهى أقل شدة لحركة الأرض بحيث لا يسجلها المقياس.

[١] أوجد على مقياس ريختر درجة الزلزال الذى شدته تعادل ١,٦ × $١٠^{٨}$ مرة قدر الشدة الابتدائية.

[٢] إذا كانت درجة الزلزال = ٧ درجات بمقياس ريختر أوجد كم مرة تعادل شدة هذا الزلزال من الشدة الابتدائية.

الحـــل

[١] ∵ د = لو $\frac{ش}{ش_{.}}$ ، ش = ١,٦ × $١٠^{٨}$ $ش_{.}$

∴ د = لو $\frac{١,٦ \times ١٠^{٨}\, ش_{.}}{ش_{.}}$ = لو (١,٦ × $١٠^{٨}$) ≃ ٨,٢

أى أن : درجة الزلزال على مقياس ريختر = ٨,٢

[٢] ∵ درجة الزلزال (د) = ٧ ∴ ٧ = لو $\frac{ش}{ش_{.}}$

∴ $\frac{ش}{ش_{.}}$ = $١٠^{٧}$ ∴ ش = $١٠^{٧}$ × $ش_{.}$

أى أن : شدة الزلزال تعادل ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ مرة قدر الشدة الابتدائية.

معلومة إثرائية

لأى عدد س ∈ $ص_{+}$ إذا كان : ن ≤ لو س < ن + ١

فإن عدد أرقام العدد س = ن + ١ حيث ن ∈ ط

فمثلاً : * لإيجاد عدد أرقام العدد $٥^{٣}$

∵ لو $٥^{٣}$ ≃ ٢,٠٩٧ أى أن : ٢ ≤ لو $٥^{٣}$ < ٣

∴ عدد أرقام العدد $٥^{٣}$ = ٣ أرقام

* لإيجاد عدد أرقام العدد $٣^{١٧}$

∵ لو $٣^{١٧}$ ≃ ٨,١١١ أى أن : ٨ ≤ لو $٣^{١٧}$ < ٩

∴ عدد أرقام العدد $٣^{١٧}$ = ٩ أرقام

تمـارين 11
على بعض خواص اللوغاريتمات

اختبر نفسك

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى • فهـم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) لو$_{٢}$ ٥ × لو$_{٥}$ ٢ = ...

(أ) ١ (ب) ١٠ (جـ) لو$_{٢}$ ١٠ (د) لو$_{٥}$ ١٠

(٢) ١ + لو ٢ = ...

(أ) لو ٥ (ب) لو ٢ (جـ) لو ٢٠ (د) − لو ٥

(٣) قيمة المقدار : ٢ لو ٢٥ + لو $\frac{٨}{١٥}$ + ٢ لو ٣ − لو ٣٠ = ...

(أ) ٦ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) −١

(٤) أى العبارات الآتية صحيحة ؟

(أ) لو ٢ − لو $\sqrt{٢}$ = لو $\sqrt{٢}$ (ب) لو$_{١}$ ١ = صفر

(جـ) لو $\frac{٧}{٥}$ = $\frac{\text{لو ٧}}{\text{لو ٥}}$ (د) لو ٧ ÷ لو ٢ = لو ٥

(٥) إذا كان : لو س − لو ٢ = لو ٤ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٦) إذا كان : لو س + لو ٥ = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

(٧) ٢ لو$_{٥}$ ٣ + ٣ لو$_{٥}$ ٢ = ...

(أ) لو$_{٥}$ ٦ (ب) ٦ لو$_{٥}$ ٦ (جـ) لو$_{٥}$ ٧٢ (د) لو$_{٥}$ ٣٦

(٨) لو$_{ب}$ أ × لو$_{جـ}$ ب × لو$_{ء}$ جـ × لو$_{أ}$ ء = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) أ ب جـ ء (د) أ ء

(٩) $\sqrt{٣^{\text{لو}_{٣}\,٤} \times ٣^{\text{لو}_{٣}\,٢٥} + ٧^{\text{لو}_{٧}\,١٦}}$ = ...

(أ) ٩ (ب) ٢٥ (جـ) ٥ (د) ١٦

(١٠) $\frac{١}{\text{لو}_{٢}\,٣٠} + \frac{١}{\text{لو}_{٣}\,٣٠} + \frac{١}{\text{لو}_{٥}\,٣٠}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٣٠

(١١) ٢ لو$_م$ س + لو$_م$ ص − لو$_م$ (س ص) = ...

(أ) لو س　(ب) لو$_م$ س　(جـ) لو$_م$ س ص　(د) لو$_م$ س^٢

(١٢) أبسط صورة للمقدار : لو$_ب$ أ^٢ × لو$_حـ$ ب^٣ × لو$_أ$ حـ = ...

(أ) ٢　(ب) ٣　(جـ) ٦　(د) ١

(١٣) لو $\left(\frac{أ^٢}{ب حـ}\right)$ = ... حيث أ ، ب ، حـ ∈ ح$^+$

(أ) ٢ لو أ + لو ب + لو حـ　(ب) ٢ لو أ − لو ب + لو حـ

(جـ) ٢ لو أ − لو ب − لو حـ　(د) ٢ (لو أ − لو ب − لو حـ)

(١٤) إذا كان : س − ٢ = لو$_٢$ ٣ فإن : س = ...

(أ) لو$_٢$ ٦　(ب) لو$_٢$ ٩　(جـ) لو$_٢$ ١٢　(د) لو$_٢$ ١٨

(١٥) لو$_{أب}$ $\frac{١}{أ}$ + لو$_{أب}$ $\frac{١}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{أ}{ب}$　(ب) $\frac{ب}{أ}$　(جـ) −١　(د) ١

(١٦) المقدار $\frac{٣ لو ٢}{لو ٤ + لو ٣}$ يكافئ المقدار ....

(أ) لو$_٣$ ٢　(ب) لو$_٧$ ٢　(جـ) لو$_{١٢}$ ٨　(د) لو$_٧$ ٨

(١٧) إذا كان : ٣^س = ٥ فإن : س = ...

(أ) ٣　(ب) لو$_٣$ ٥　(جـ) لو$_٥$ ٣　(د) $\frac{٥}{٣}$

(١٨) مجموعة حل المعادلة : لو$_٢$ (٢$^{س − ٤}$) = ٥ − س هى ....

(أ) {٤}　(ب) {٥ ، ٤}　(جـ) {٥}　(د) {٤ ، ٥}

(١٩) مجموعة حل المعادلة : لو$_{\sqrt{٢}}$ س + لو$_{\sqrt{٢}}$ (س + ١) = ٢ هى ....

(أ) {١ ، ٢}　(ب) {−٢}　(جـ) {١ ، −٢}　(د) {١}

(٢٠) مجموعة حل المعادلة : ٢ لو ٢ − لو س = لو (س + ٣) − لو ٧ هى ....

(أ) {٧}　(ب) {٤}　(جـ) {٧ ، ٤}　(د) ∅

(٢١) إذا كان : لو$_ب$ س + لو$_ب$ ٣ = لو$_ب$ ٢٧ − ١ فإن قيمة س = ... بدلالة ب

(أ) ٩ ب　(ب) $\frac{١}{٩}$ ب　(جـ) $\frac{٩}{ب}$　(د) $\frac{١}{٩ ب}$

(٢٢) إذا كان : لو$_٢$ س = لو$_٤$ ٩ فإن : س = ...

(أ) ٣　(ب) ٤　(جـ) ٩　(د) ١٢

(٢٣) مجموعة حل المعادلة : لو$_{٢}$ س + لو$_{٤}$ س = ٣ هى ....

(أ) {٢}　　(ب) {٤}　　(جـ) {٢ ، ٤}　　(د) {٠}

(٢٤) إذا كان : لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ س^{٢} = ٦　　فإن : س = ...

(أ) ٢　　(ب) ٤　　(جـ) ٦　　(د) ٢١٦

(٢٥) مجموعة حل المعادلة : لو س^{٢} − (لو س)^{٢} = ٠ هى ....

(أ) {١}　　(ب) {١ ، ١٠}　　(جـ) {١ ، ١٠٠}　　(د) {١٠٠}

(٢٦) مجموعة حل المعادلة : (لو$_{٣}$ س)^{٢} − لو$_{٣}$ س^{٣} + ٢ = ٠　هى ....

(أ) {٣}　　(ب) {٣ ، ٩}　　(جـ) {٩}　　(د) {١ ، ٢}

(٢٧) مجموعة حل المعادلة : لو$_{٣}$ س − ٢ لو$_{س}$ ٣ = ١ فى ح هى ....

(أ) {٨ ، ٣}　　(ب) {٨ ، $\frac{١}{٣}$}　　(جـ) {٩ ، $\frac{١}{٣}$}　　(د) {٨}

(٢٨) إذا كان : س$^{لو_{س} س^{٢}}$ = لو$_{٢}$ ١٦　　فإن : س = ...

(أ) ٢　　(ب) −٢　　(جـ) ± ٢　　(د) ٤

(٢٩) أى العبارات الآتية صحيحة ؟

(أ) لو ٣ + لو ٣ = لو ٦　　(ب) ١ − لو ٥ = ٢

(جـ) لو ٢ × لو ٢ = لو ٤　　(د) لو (١ + ٢ + ٣) = لو ١ + لو ٢ + لو ٣

(٣٠) إذا كان : س = $\sqrt{ص ع}$ حيث س ، ص ، ع أعدادًا موجبة　فإن : لو ص = ...

(أ) $\frac{لو س^{٢}}{لو ع}$　　(ب) $\frac{٢ لو س}{لو ع}$　　(جـ) ٢ لو س − لو ع　　(د) ٢ (لو س − لو ع)

(٣١) إذا كان : لو ٢٣ = أ　　فإن : لو ٢٣٠٠ = ...

(أ) أ + ٢　　(ب) أ − ٢　　(جـ) ١٠٠ أ　　(د) أ^{٢}

(٣٢) إذا كان : لو$_{٣}$ ٥ = أ　　فإن : لو$_{١٥}$ ٥ = ...

(أ) أ^{٢}　　(ب) ٣ أ　　(جـ) $\frac{١}{أ + ٣}$　　(د) $\frac{أ}{أ + ١}$

(٣٣) إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٤ = ص　　فإن : لو ١٢ = ...

(أ) س + ص　　(ب) س ص　　(جـ) س − ص　　(د) لو س + لو ص

(٣٤) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ فيه : أ ب = (لو$_{٤}$ ٣) سم ، أ حـ = (لو$_{٣}$ ٦٤) سم

فإن مساحة Δ أ ب حـ = ... سم^{٢}

(أ) ١,٥　　(ب) ٣　　(جـ) لو ١٦　　(د) لو$_{٣}$ ١٦

(٣٥) إذا كان : $\frac{لو س}{لو ٥}$ = $\frac{لو ٣٦}{لو ٦}$ = $\frac{لو ٦٤}{لو ص}$　　فإن : س + ص = ...

(أ) ٢٥　　(ب) ٨　　(جـ) ١٧　　(د) ٣٣

(٣٦) إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : ٣ س^{٢} − ١٦ س + ١٢ = ٠

فإن قيمة : لو$_{٣}$ ل + لو$_{٢}$ م = ...

(أ) ٢　(ب) ٤　(ج) ١٢　(د) ١٦

(٣٧) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} + س لو$_{٣}$ أ = ٩ وكان : $\frac{ل + م}{ل م} = \frac{١}{٣}$

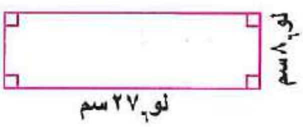
فإن : أ = ...

(أ) ١٢　(ب) ٢٤　(ج) ٢٧　(د) ٧٢٩

(٣٨) مجموعة حل المعادلة : لو$_{٥}$ (س + ٥) = لو$_{٥}$ س + لو$_{٥}$ ٥ في ح هي ....

(أ) {٥}　(ب) {٤}　(ج) {$\frac{٤}{٥}$}　(د) {$\frac{٥}{٤}$}

(٣٩) محيط الشكل المقابل = ... سم



(أ) ٢ لو$_{٣}$ ٣٥　(ب) لو$_{٣}$ ٧٠

(ج) ٣　(د) ٦

(٤٠) لو (حتا θ) + لو (قا θ) = ... حيث θ ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

(أ) ١　(ب) صفر　(ج) ٢　(د) −١

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتي :

(١) لو$_{٣}$ ٨١ × لو$_{٩}$ ٣ «٢»

(٢) لو$_{٢}$ ١٥ + لو$_{٢}$ ١٤ − لو$_{٢}$ ١٠٥ «١»

(٣) لو$_{٤}$ لو$_{٢}$ لو$_{٢}$ ٤ «صفر»

(٤) ١ + لو ٣ − لو ٢ − لو ١٥ «صفر»

(٥) ٢ لو ٢٥ + لو $\left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٥}\right)$ + ٢ لو ٣ − لو ٣٠ «٢»

(٦) لو ٢٥ + $\frac{لو ٨ × لو ١٦}{لو ٦٤}$ «٢»

(٧) $\frac{لو_{٢} ٢٥ + لو_{٢} ٤}{لو_{٢} ٣٠ − لو_{٢} ٣}$ «٢»

(٨) $\frac{(لو ٣)^{٢} − لو ٣^{٢}}{لو ٣ − لو ١٠٠}$ «لو ٣»

(٩) لو$_{٥}$ $\frac{١ − لو_{٣} ٢}{لو_{٣} \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٥}}$ «−١»

(١٠) لو$_{٣}$ (لو س^{١٨}) − لو$_{٣}$ (لو س^{٢}) «٢»

(١١) لو$_{أ ب ح}$ أ + لو$_{أ ب ح}$ ب + لو$_{أ ب ح}$ ح «١»

(١٢) $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ أ + $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ ب + ٢ لو$_{٣}$ ح − لو$_{٣}$ $\sqrt{أ ب}$ − لو$_{٣}$ ٣ ح^{٢} «−١»

(١٣) $\frac{١}{لو_{٢} ١٢} + \frac{١}{لو_{٨} ١٢} + \frac{١}{لو_{٩} ١٢}$ «٢»

٢ بدون استخدام حاسبة الجيب أثبت كلًا مما يأتى :

(١) ٢ لو$_{٣}$ ١٥ + لو$_{٣}$ $\frac{٧}{٣}$ − لو$_{٣}$ ١٧٥ = ٢ لو$_{٣}$ $\sqrt{٣}$

(٢) لو$_{٣}$ $\frac{٣}{١١}$ + لو$_{٣}$ $\frac{٢٩٧}{٩٨}$ − (٢ لو$_{٣}$ ٢ × لو$_{٣}$ $\frac{٩}{٧}$) = −١

(٣) (١ − لو ٥) (٢ − لو ٢٥) = ٢ (لو ٢)^{٢}

(٤) $\frac{\text{لو ٧٢٩ − لو ٦٤}}{\text{لو ٩ − لو ٤}}$ = ٣

(٥) $\frac{(\text{لو ٥})^{٢} - \text{لو ٥}^{٢}}{\text{لو ٥ − لو ١٠٠}}$ = ١ − لو ٢

(٦) $\frac{\text{لو}_{٢}\ \text{لو}_{٥}\ \text{لو}_{٣}\ ٢٤٣}{\text{لو}_{٧}\ \text{لو}_{٣}\ \text{لو}_{٢}\ ٥١٢}$ = صفر

---

٣ باستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين فى كل مما يأتى :

(١) ٣$^{س + ٢}$ = ٦ «−٠,٣٧»

(٢) ٣$^{٧ − ٢س}$ = ١٣,٤ «٢,٣٢»

(٣) ٧$^{س + ١}$ = ٣$^{س − ٢}$ «−٤,٨٩»

(٤) ٣$^{٢س − ٢}$ = ١١$^{١ − س}$ «١,٢٤»

(٥) س^{١,٦} = ٩٤,٥ «±١٧,١٧»

(٦) $\frac{٥}{(١٠)^{٢س}}$ = ٧ «−٠,٠٧»

(٧) ٧$^{س + ١}$ + ٧$^{س − ١}$ = ٣٠٠ «١,٩٢»

(٨) ٢^{س} × ٣ = ٢ × ٣$^{س + ٢}$ «−٤,٤٢»

(٩) ٣ × ٢$^{س − ١١}$ = ٨ × ٦$^{س − ١}$ «−٠,٨٢»

(١٠) ٢٥^{س} − ٢٧ × ٥^{س} + ٥٠ = ٠ «٠,٤٣ أ ٢»

(١١) ٨$^{٣ − ٥س}$ ÷ ٧$^{٤ + س}$ = ٢ «−٠,١٨»

(١٢) لو$_{٥}$ (٤$^{س + ١}$) = س − ٢ «٢٠,٦٤»

---

٤ إذا كان : لو$_{٣}$ ٥ ≃ ١,٤٦٥ فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة :

(١) لو$_{٣}$ ١٥ (٢) لو$_{٣}$ ١٣٥ (٣) لو$_{٣}$ $\frac{٥}{٩}$

---

٥ إذا كان : لو ٢ = س ، لو ٣ = ص أوجد بدلالة س ، ص كلًا من :

(١) لو ٦ (٢) لو$_{١٨}$ ١٢

---

٦ ناقش صحة كل مما يأتى مع تصحيح الخطأ منها ، [حيث س ، ص ∈ ح$^{+}$ ، أ ، ب ∈ ح$^{+}$ − {١} فى المسائل (٣) إلى (٧)]

(١) لو$_{س}$ س^{س} = س لكل س ∈ ح

(٢) لو س^{ن} = ن لو س لكل س ∈ ح

(٣) لو$_{أ}$ (س + ص) = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

(٤) لو$_{أ}$ (س + ص) = لو$_{أ}$ س × لو$_{أ}$ ص

(٥) لو$_{أ}$ (س ص) = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

(٦) لو$_{أ}$ ($\frac{س}{ص}$) = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص$^{−١}$

(٧) $\frac{\text{لو}_{أ}\ س}{\text{لو}_{أ}\ ص}$ = $\frac{\text{لو}_{ب}\ س}{\text{لو}_{ب}\ ص}$

(٨) إذا كان : س < صفر فإن : لو$_{أ}$ س^{٤} = ٤ لو$_{أ}$ س ، أ ∈ ح$^{+}$ − {١}

٧ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) لو$_{٣}$ (س + ٦) = ٢ لو$_{٣}$ س «{٣}»

(٢) لو$_{٤}$ س + لو$_{٤}$ (س + ٦) = ٣ «{−٣ + √٧٣}»

(٣) لو$_{٣}$ س + لو$_{٣}$ س^{٢} = ٣ «{٣}»

(٤) لو$_{٣}$ (س − ١) + لو$_{٣}$ (س + ١) = لو$_{٣}$ ٨ «{٣}»

(٥) لو (س + ٨) − لو (س − ١) = ١ «{٢}»

(٦) لو$_{٤}$ س = ١ − لو$_{٤}$ (س − ٣) «{٤}»

(٧) لو$_{٥}$ س^{٢} + لو$_{٥}$ ٢ = لو$_{٥}$ ١٨ «{٣ ، −٣}»

(٨) لو$_{٣}$ (٧ س^{٢} − ٤) = ٢ لو$_{٣}$ س + $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ ٩ «{١}»

(٩) ٥ لو$_{٢}$ (س + ٢) − لو$_{٢}$ (س − ١)^{٥} = لو$_{٢}$ ٣٢ «{٤}»

(١٠) لو (٨ − س) + ٢ لو √(س − ٦) = ٠ «{٧}»

(١١) لو (س + ٢) + لو (س − ٢) = ١ − لو ٢ «{٣}»

(١٢) لو ٧ × لو ٧٢٩ = لو ٤٩ × لو س^{٣} «{٣}»

(١٣) لو$_{٢}$ (س^{٢} + ٦ س + ٩) − لو$_{٢}$ (س − ١) = لو$_{٥}$ ٦٢٥ «{٥}»

(١٤) لو س = $\frac{(\text{لو } ٣)^{٢} - \text{لو } ٢٧}{\text{لو } ٠,٠٠٣}$ «{٣}»

(١٥) (لو س)^{٢} − لو س^{٢} = ٣ «{٠,١ ، ١٠٠٠}»

(١٦) (لو س)^{٢} + لو س^{٢} + ١ = (لو ٥)^{٢} «{$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٥٠}$}»

(١٧) ٢ لو$_{س}$ ٢ + لو$_{س}$ ١٤ − ٣ لو$_{س}$ ٣ = ٣ + لو$_{س}$ ٧ «{$\frac{٢}{٣}$}»

(١٨) لو ∛(٣س − ١) + لو ∛(س − ٢) = لو ٢٠ − ١ «{٣}»

---

٨ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) لو$_{٢}$ س = لو$_{٤}$ ٩ «{٣}»

(٢) ٣$^{\text{لو س}}$ = ٢$^{\text{لو ٣}}$ «{٢}»

(٣) س$^{\text{لو س}}$ = ١٠ «{٠,١ ، ١٠}»

(٤) لو$_{٣}$ س = لو$_{س}$ ٣ «{$\frac{١}{٣}$ ، ٣}»

(٥) س$^{\text{لو}_{س} \text{س}^{٢}}$ = لو ١٠^{٩} «{٣}»

(٦) ٢$^{\text{٢ لو س}}$ × ٥$^{\text{لو س}}$ = ٨٠٠٠ «{١٠٠٠}»

(٧) ٢$^{(\text{لو س})^{٢}}$ × ٦٤ = ٢$^{\text{٥ لو س}}$ «{١٠٠ ، ١٠٠٠}»

(٨) لو س − $\frac{١}{\text{لو س}}$ = $\frac{٣}{٢}$ «{$\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ، ١٠٠}»

(٩) لو$_{٢}$ س + لو$_{س}$ ٢ = ٢ «{٢}»

(١٠) لو س − لو$_{س}$ ١٠٠ = ١ «{١٠٠ ، $\frac{١}{١٠}$}»

(١١) لو $\frac{س}{٢}$ × لو $\frac{٢}{س}$ = −١ «{٠,٢ ، ٢٠}»

(١٢) (لو س)^{٣} = لو س^{٩} «{١ ، ١٠٠٠ ، ٠,٠٠١}»

(١٣) س$^{لو س}$ = ١٠٠ س «{١٠٠ ، $\frac{١}{١٠}$}»

(١٤) (لو س + ٢) (لو $\frac{س}{١٠٠}$) = ٥ «{١٠٠٠ ، ٠,٠٠١}»

(١٥) لو$_{٣}$ س + لو$_{٩}$ س^{٢} + ٣ = ٠ «{$\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$}»

(١٦) لو$_{٢}$ س = لو$_{٤}$ (س + ٦) «{٣}»

(١٧) لو$_{٢}$ س + لو$_{٤}$ س = $\frac{-٣}{٢}$ «{$\frac{١}{٢}$}»

(١٨) $\sqrt{\text{لو}_{٢} \text{س}}$ = لو$_{٢}$ $\sqrt{س}$ «{١ ، ١٦}»

(١٩) $\sqrt{\text{س}^{\text{لو}\sqrt{\text{س}}}}$ = ١٠ «{١٠٠ ، $\frac{١}{١٠٠}$}»

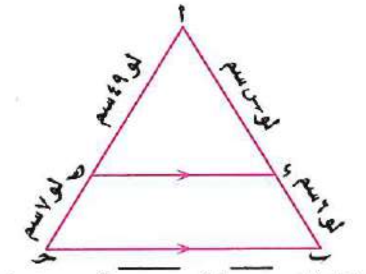
(٢٠) $\sqrt{\text{لو} (٩١ + ٣\sqrt[٢]{\text{س}})}$ = لو ١٠$\sqrt{٢}$ «{٨}»

(٢١) لو $\frac{١}{٢^{س} + س - ١}$ = س (لو ٥ − ١) «{١}»

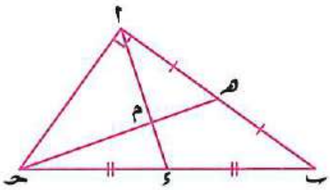
(٢٢) لو$_{٢٧}$ (س − ٢) + لو$_{٣}$ (س − ٢) = ٤ «{٢٩}»

---

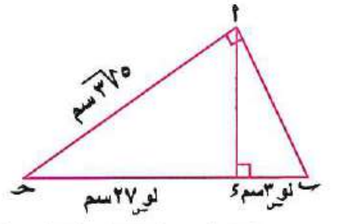
٩ في كل من الأشكال الآتية أوجد ما هو مطلوب أسفل كل شكل في أبسط صورة :



(١) إذا كان $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بحـ}$ أوجد قيمة س

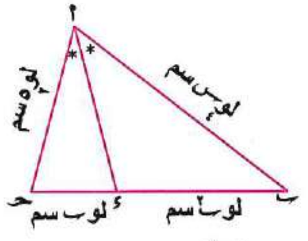


(٢) إذا كان م ء = لو$_{٨١}$ ٢٤٣ سم ، أوجد طول $\overline{بحـ}$



(٣) إذا كان $\overline{أب}$ ⊥ $\overline{أحـ}$ ، $\overline{أء}$ ⊥ $\overline{بحـ}$

أوجد قيمة س



(٤) إذا كان $\overleftarrow{أء}$ ينصف ∠ أ أوجد قيمة س

---

١٠ أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية آنيًا في ح × ح :

(١) لو س ص = ١ − لو ٥ ، لو ص^{٣} = ٣ − لو ١٢٥ «{(١ ، ٢)}»

(٢) لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ ص + لو$_{٢}$ ٤ = ٢ + لو$_{٢}$ ٩ ، س + ص = ١٠ «{(١ ، ٩) ، (٩ ، ١)}»

(٣) لو س^{٣} + لو ص^{٢} = ١١ ، لو س^{٢} − لو ص^{٣} = ٣ «{(١٠ ، ١٠٠٠)}»

١١ أجب عما يأتى :

(١) إذا كان : س ص = ٩ $\sqrt{٣}$ فأثبت أن : ٥ لو$_{٣}$ س + ٤ لو$_{٣}$ ص − لو$_{٣}$ س^{٣} ص^{٢} = ٥

(٢) إذا كان : $\frac{١}{٣}$ لو أ = $\frac{١}{٥}$ لو ب = لو حـ فأثبت أن : حـ^{٨} = أ ب

(٣) إذا كان : لو $\frac{س + ص}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) فأثبت أن : $\frac{س}{ص}$ + $\frac{ص}{س}$ = ٧

(٤) إذا كان : ٣$^{لو_{أ} س}$ = أ فأثبت أن : لو$_{أ}$ س معكوس ضربى للعدد لو$_{أ}$ ٣

ثم أوجد قيمة : لو$_{٩}$ س «٢»

(٥) أثبت أن : لو$_{أ^{٢}}$ ب^{٢} = لو$_{أ}$ ب ثم أثبت أن : لو$_{أ}$ ب^{٢} + لو$_{أ^{٢}}$ ب^{٤} = ٤ لو$_{أ}$ ب

(٦) إذا كان : ٣ لو س + ٤ لو ص − لو س ص^{٢} = ٢ (لو ٢ + لو ٣) فأثبت أن : س = $\frac{٦}{ص}$

(٧) إذا كان : س^{٢} + ص^{٢} = ٨ س ص

أثبت أن : ٢ لو (س + ص) = ١ + لو س + لو ص

(٨) إذا كان : لو (س + ص) = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) + لو٢ أثبت أن : س = ص

(٩) إذا كان : لو س ص^{٣} = ١ ، لو س^{٢} ص = ١ أوجد قيمة : لو س ص «$\frac{٣}{٥}$»

(١٠) أثبت أن : لو$_{ص}$ س = $\frac{١}{لو_{س} ص}$

ثم أوجد مجموعة حل المعادلة : لو$_{٣}$ س + ٣ لو$_{س}$ ٣ = ٤ «{٣ ، ٢٧}»

(١١) إذا كانت : س ، ص ، ع أعدادًا صحيحة موجبة

وكان $\frac{٤}{لو_{س} ص}$ + $\frac{٧}{لو_{ع} ص}$ = ٣ لو$_{ص}$ ع أوجد قيمة : س ع «١»

(١٢) إذا كان : ص = أ$^{لو_{أ} س}$ فأثبت أن : ص = س ومن ذلك أوجد قيمة : ٣$^{\frac{١}{٢} لو_{٣} ٤٩}$ «٧»

(١٣) أثبت أن : لو$_{أ^{ص}}$ أ^{س} = $\frac{س}{ص}$ ومن ذلك أوجد قيمة : لو$_{\sqrt{٥}}$ ١٢٥ × لو$_{٨}$ $\sqrt{٢}$ «$\frac{٣}{٢}$»

(١٤) أثبت أن : لو$_{ب}$ أ = $\frac{لو أ}{لو ب}$

ومن ثم استخدم العلاقة فى إثبات أن : (لو$_{أ}$ أ ب)$^{-١}$ + (لو$_{ب}$ أ ب)$^{-١}$ = ١

(١٥) إذا كان : لو$_{حـ}$ أ + لو$_{حـ}$ ب − ٢ لو$_{حـ}$ $\frac{أ + ب}{٢}$ = ٠ فأثبت أن : أ − ب = ٠

(١٦) إذا كان : (س$^{لو س}$)^{٢} × س^{٣} = ١٠^{٥} فأوجد قيمة : س «١٠ ، $\frac{١}{١٠٠ \sqrt{١٠}}$»

(١٧) بوضع أ^{س} = ص فى المعادلة : أ^{س} − أ$^{-س}$ = ١

أوجد قيمة ص ومن ذلك أثبت أن : س = لو$_{أ}$ $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ «$\frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$»

(١٨) إذا كانت : د (س) = لو $س^٢$

أوجد مجموعة حل المعادلة : د (س + ١) + د (س − ١) = د (٣) «{٢ ، −٢}»

(١٩) ابحث نوع الدالة د : د (س) = لو $(\sqrt{س^٢ + ١} - س)$ من حيث كونها زوجية أم فردية.

(٢٠) استخدم الآلة الحاسبة فى إيجاد عدد أرقام العدد $٤^{٤٧}$ «٢٩»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : لو س = ع + لو ص فإن : س = ...

(أ) ص × $١٠^ع$ (ب) $\frac{ع}{ص}$ (جـ) ع − $(١٠)^ص$ (د) $\frac{١}{ص} × (١٠)^ع$

(٢) $\frac{١}{١ + لو_ب ٢ + لو_ب حـ} + \frac{١}{١ + لو_حـ ٢ + لو_حـ ب} + \frac{١}{١ + لو_٢ ب + لو_٢ حـ}$ = ...

(أ) $لو_٢ ب حـ$ (ب) $لو_ب ٢ حـ$ (جـ) $لو_حـ ٢ ب$ (د) ١

(٣) مجموع جذرى المعادلة : $(٢٥)^س − ١٢ × ٥^س + ٢٧ = ٠$ يساوى ....

(أ) $لو_٥ ١٢$ (ب) ١٢ (جـ) $لو_٥ ٢٧$ (د) ٢٧

(٤) $٣^{لو س}$ = ...

(أ) ٣ لو س (ب) س لو ٣ (جـ) لو ٣ س (د) $س^{لو ٣}$

(٥) إذا كان : ٢ > ب > حـ > ١ فإن : $لو_حـ لو_ب لو_٢ ٢^{ب^حـ}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٢ ب حـ

(٦) إذا كان : $ب^س − ٢ ب^{−س} = ١$ حيث ب > ١ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) لو ٢ (جـ) $لو_ب ٢$ (د) $لو_٢ ب$

(٧) إذا كان : $\frac{١}{لو_٢ س} + \frac{١}{لو_٤ س} + \frac{١}{لو_٨ س} + \frac{١}{لو_{١٦} س} = ٥$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(٨) إذا كان : لو ٢ ∋]٠ ، ١[فإن : ٢ ∋ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ٢[(جـ)]١ ، ١٠[(د)]١ ، ∞[

(٩) إذا كان : ٢ ∋]٠ ، ٩] فإن : $لو_٣ ٢$ ∋ ....

(أ)]−∞ ، ٢] (ب)]٢ ، ٨١] (جـ) [٢ ، ∞[(د)]−∞ ، ٠]

(١٠) مجموعة حل المعادلة : $٢^{لو_٢ (س + ٤)} + ٣^{لو_٣ (س + ٥)} = (٢٥)^{لو_٥ ٧}$ هى ....

(أ) {٢ ، ٣} (ب) {-٤ ، -٥} (جـ) {٢ ، -٢} (د) {٢٠}

(١١) إذا كانت : س ، ص ∈ $ح^+$ - {١} وكان : $لو_ص س = لو_س ص$ فإن : ....

(أ) س = ص (ب) $س = \frac{١}{ص}$ (جـ) س = ± ١ (د) أ ، ب معًا.

(١٢) إذا كان : $٣^أ = ٥^ب = ٧^ج$ فإن : $\frac{أ}{ب} + \frac{أ}{ج}$ = ...

(أ) ٣٥ (ب) ٧ (جـ) $لو_٥ ٧$ (د) $لو_٣ ٣٥$

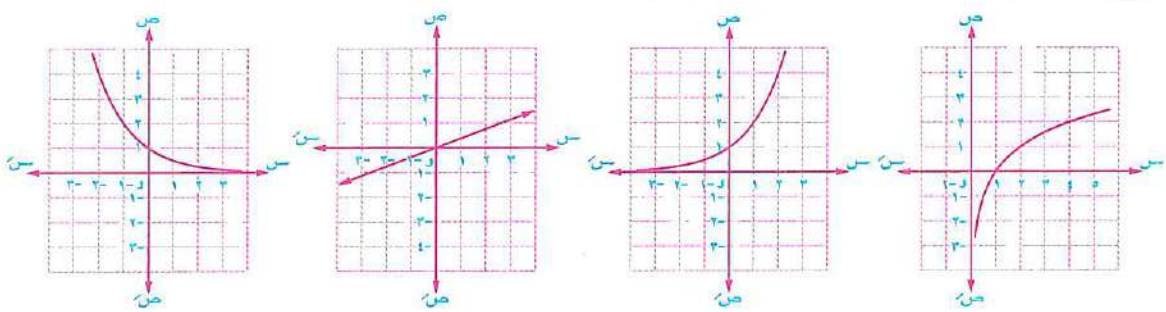
(١٣) إذا كان : $لو_٢ س + لو_٤ س + لو_٨ س = ١١$ فإن : س = ...

(أ) ٣٢ (ب) ٣٦ (جـ) ٦٤ (د) ١٢١

(١٤) إذا كان : $لو_٢ ٣ × لو_٣ ٤ × لو_٤ ٥ × ... × لو_ن (ن + ١) = ١٠$ فإن : ن = ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١٠٢٣ (د) ١٠٢٤

(١٥) الشكل البيانى الذى يمثل الدالة د : د (س) = $لو ٢^س$ هو ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) $لو_٣ \frac{١}{٢} + لو_٣ \frac{٢}{٣} + لو_٣ \frac{٣}{٤} + \cdots + لو_٣ \frac{٨٠}{٨١}$ «-٤»

(٢) لو (ظا ١°) + لو (ظا ٢°) + لو (ظا ٣°) + ··· + لو (ظا ٨٩°) «صفر»

(٣) لو ظا ١° × لو ظا ٢° × لو ظا ٣° × ··· × لو ظا ٧٣° «صفر»

٣ أثبت أن : $لو_ب س + لو_{ب^٢} س^٢ + لو_{ب^٣} س^٣ + ... + لو_{ب^ن} س^ن = لو_ب س^ن$

تطبيقات حياتية على الوحدة الثانية

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ الربط بالهندسة :

إذا كان طول نصف قطر كرة نق يعطى بدلالة الحجم ح من العلاقة نق = $\left(\frac{٣ ح}{٤ \pi}\right)^{\frac{١}{٣}}$

أوجد الزيادة فى طول نصف القطر عندما يتغير الحجم من $\frac{٣٢}{٣}\pi$ إلى ٣٦ π وحدة مكعبة. «١ وحدة طولية»

---

٢ الربط بالأعداد : إذا كان مجموع الأعداد ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ... + $٢^{ن}$

يعطى بالعلاقة $ح_{ن}$ = ٢ ($٢^{ن}$ − ١)

(١) أوجد مجموع العشرة أعداد الأولى فى النمط. «٢٠٤٦»

(٢) أوجد عدد الحدود فى النمط ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ١٣١٠٧٠ «١٦»

---

٣ الربط بالتعليم :

إذا كانت العلاقة بين درجات تذكر أحد الطلاب بالمعلومات التى درسها فى الصف الأول الثانوى وعدد الأشهر (ن) التى تبدأ من نهاية تدريس الصف هى :

د (ن) = ٧٠ − ٤ $لو_{٢}$ (ن + ١) **فأوجد درجات هذا الطالب :**

(١) فى نهاية تدريس الصف الأول الثانوى (ن = ٠) «٧٠ درجة»

(٢) بعد مرور ٧ أشهر من تدريس الصف الأول الثانوى. «٥٨ درجة»

---

٤ فى دراسة لقياس مدى احتفاظ الطلبة لما تم دراسته فى إحدى المواد يعاد امتحانهم من فترة إلى أخرى فى نفس المادة. فإذا كانت درجات أحد الطلبة تتبع العلاقة د (ن) = ٨٥ − ٢٥ لو (ن + ١)

حيث ن عدد الأشهر بعد اكتمال الدراسة، د (ن) درجة الطالب (نسبة مئوية). **أوجد :**

(١) درجة الطالب فى أول امتحان لهذه المادة. «٨٥ ٪»

(٢) درجة الطالب بعد مرور ٣ أشهر من دراسته لهذه المادة. «٦٩,٩٥ ٪»

(٣) درجة الطالب بعد مرور عام كامل من دراسته لهذه المادة. «٥٧,١٥ ٪»

---

٥ **تطبق إحدى الدول نظامًا ضريبيًا بحيث يدفع الممول الضريبة المستحقة سنويًا وفقًا للدالة :**

$$د (س) = \begin{cases} ١٠٪ س & \text{عندما } س \leq ٥٠٠٠ \\ ١٠٪ س + ١٠٠ \text{ لو } (س - ٤٩٩٩) & \text{عندما } س > ٥٠٠٠ \end{cases}$$

حيث س هى صافى الربح السنوى. **أوجد :**

(١) الضريبة المستحقة على أحد المولين الذين يبلغ صافى ربحهم السنوى ٣٦٠٠ جنيه.

(٢) الضريبة المستحقة على أحد المولين الذين يبلغ صافى ربحهم السنوى ٨٠٠٠ جنيه.

«٣٦٠ جنيهًا ، ١١٤٧,٧٢٦٦ جنيهًا»

---

٦ **الربط بالكيمياء :** يعرف الرقم الهيدروچينى للمحلول (PH) على أنه سالب لوغاريتم تركيز الهيدروچين فى المحلول (H^+) أى أن $PH = - \log (H^+)$

(١) احسب الرقم الهيدروچينى لمحلول تركيز الهيدروچين فيه 10^{-3}

(٢) احسب تركيز الهيدروچين فى محلول رقمه الهيدروچينى 9 «٣ ، $١٠^{-٩}$»

---

٧ **الربط بالسكان :** إذا كان عدد سكان إحدى المدن يتزايد بمعدل سنوى قدره ٧ ٪

(١) أوجد العلاقة التى توضح عدد السكان بعد عام.

(٢) بعد كم سنة يتضاعف عدد السكان إذا استمرت الزيادة بهذا المعدل ؟ «١٠ سنوات»

---

٨ إذا كان عدد سكان إحدى المدن ابتداءً من عام ٢٠١٠ يُعطى بالعلاقة

ع = $١٠^{٥}$ $(١,٣)^{ن - ٢٠١٠}$ ، حيث ع عدد السكان ، ن السنة.

(١) احسب عدد سكان هذه المدينة عام ٢٠١٥

(٢) فى أى سنة يصبح عدد سكان هذه المدينة ١,٤ مليون نسمة ؟ «٣٧١٢٩٣ نسمة ، ٢٠٢٠»

---

٩ إذا كانت درجة قوة الزلزال (د) على مقياس ريختر تحسب بالعلاقة د = لو $\frac{ش}{ش_٠}$

حيث ش هى شدة الزلزال ، $ش_٠$ هى الشدة الابتدائية.

(١) أوجد بمقياس ريختر درجة الزلزال الذى شدته تعادل ١,٥ × $١٠^{٦}$ مرة قدر الشدة الابتدائية.

(٢) إذا كانت درجة قوة الزلزال = ٨ درجات بمقياس ريختر أوجد كم مرة تعادل شدة هذا الزلزال من الشدة الابتدائية. «٦,٢ ، $١٠^{٨}$»

---

١٠ إذا كانت كفاءة عمل إحدى الآلات تتناقص سنويًا طبقًا للعلاقة ك = $ك_٠$ $(٠,٩)^{ن}$ حيث ك كفاءة الآلة ، $ك_٠$ الكفاءة الابتدائية للآلة ، ن عدد سنوات عمل الآلة. فإذا عُلِمَ أنَّ الآلة تتوقف عن العمل إذا بلغت كفاءتها ٤٠٪ من كفاءتها الابتدائية فما عدد السنوات التى تعملها هذه الآلة قبل أنْ تتوقف عن العمل ؟ «٩ سنوات»

---

١١ **الربط بالصناعة :** إذا كانت كفاءة آلة تتناقص سنويًا بمعدل ٥ ٪ فإذا علم أن الآلة تتوقف عن التشغيل إذا بلغت كفاءتها ٦٠ ٪ من كفاءتها الابتدائية.

فما عدد السنوات التى تعملها هذه الآلة ؟ «١٠ سنوات»



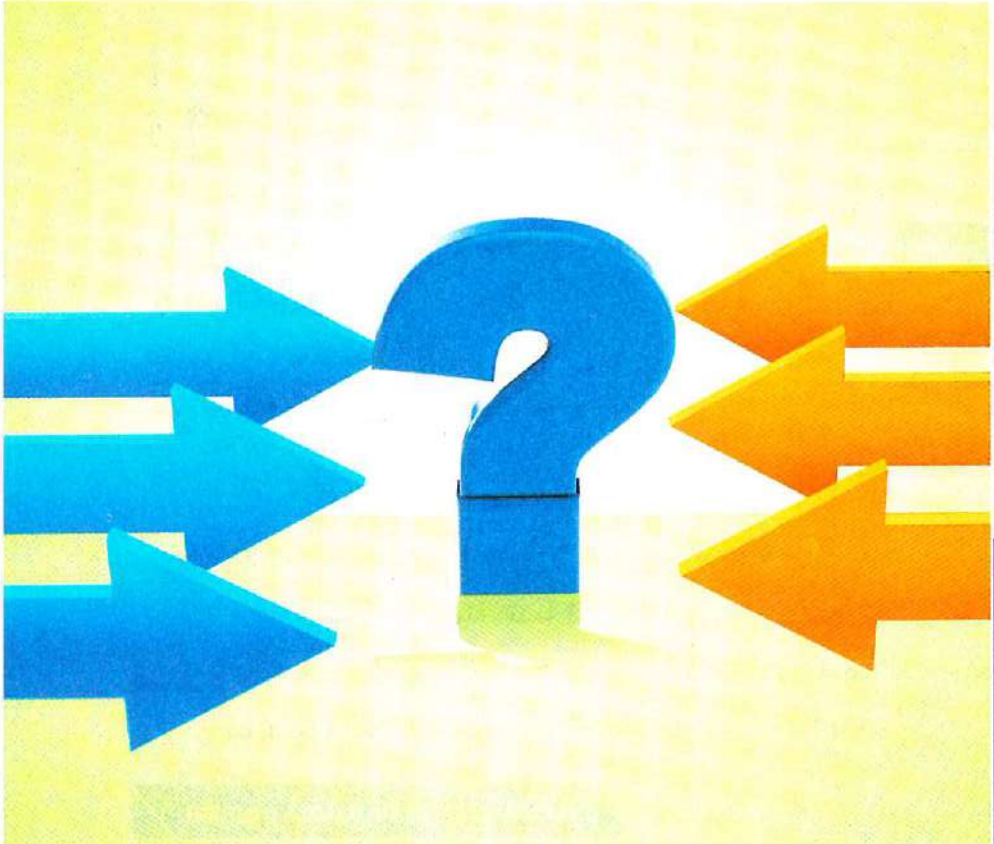
ثانيًا التفاضل وحساب المثلثات

الوحدة الثالثة

النهايات والاتصال



- الدرس 1 مقدمة فى النهايات «إيجاد النهاية عدديًا وبيانيًا».
- الدرس 2 إيجاد نهاية الدالة جبريًا.
- الدرس 3 نظرية (٤) «القانون».
- الدرس 4 نهاية الدالة عند اللا نهاية.
- الدرس 5 نهايات الدوال المثلثية.
- الدرس 6 بحث وجود نهاية للدالة مجزأة المجال.
- الدرس 7 الاتصال.



الدرس

1

مقدمة فى النهايات (إيجاد النهاية عدديًا وبيانيًا)

الكميات المعينة وغير المعينة وغير المعرفة

عند إجراء العمليات الحسابية على ح نتعرض إلى واحدة من ثلاثة أنواع من الكميات وهى :

١ الكمية المعينة : هى الكمية التى لها ناتج محدد :

فمثلًا : $\frac{٨}{٥}$ كمية معينة أى لها ناتج محدد هو ١,٦

لأن : العدد الحقيقى الذى إذا ضرب فى ٥ كان الناتج ٨ هو ١,٦

ومن أمثلة الكميات المعينة : $\frac{٠}{٣}$ ، ٥ ± ٠ ، ٧ × ٣ ، .....

٢ الكمية غير المعينة : هى الكمية التى ليس لها جواب محدد :

فمثلًا : $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة أى لها عدد لا نهائى فى ح من الإجابات الصحيحة

لأن : حاصل ضرب أى عدد حقيقى × صفر = صفر

مع ملاحظة أنه توجد كميات أخرى غير معينة سنتعرض لها فى دراستنا لاحقًا.

٣ الكمية غير المعرفة : هى الكمية التى ليس لها معنى :

فمثلًا : $\frac{٥}{\text{صفر}}$ كمية غير معرفة أى ليس لها معنى.

لأنه : لا يوجد عدد حقيقى إذا ضرب × صفر كان الناتج = ٥

وبصفة عامة : $\frac{أ}{\text{صفر}}$ حيث أ ∈ ح - {٠} كمية غير معرفة.

الرمزان ∞ ، - ∞

* الرمز ∞ (لا نهاية) ليس عددًا حقيقيًا ولكنه يعبر عن كمية أكبر من أى عدد حقيقى موجب يمكن إدراكه.

* الرمز - ∞ (سالب لا نهاية) ليس عددًا حقيقيًا ولكنه يعبر عن كمية أصغر من أى عدد حقيقى سالب يمكن إدراكه.

* والتعامل بالرمزين ∞ ، $-\infty$ عند إجراء العمليات الحسابية يخضع للخواص الآتية :

بفرض أن أ عدد حقيقى فإن :

(١) $\infty \pm$ أ $= \infty$ ، $-\infty \pm$ أ $= -\infty$

(٢) $\infty \times$ أ $=$ { ∞ عندما أ > 0 ، $-\infty$ عندما أ < 0 ، كمية غير معينة عندما أ $= 0$ }

، $-\infty \times$ أ $=$ { $-\infty$ عندما أ > 0 ، ∞ عندما أ < 0 ، كمية غير معينة عندما أ $= 0$ }

معلومة إثرائية

الصور غير المعينة سبع هى :

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $\infty \times$ صفر ، $(\text{صفر})^{\text{صفر}}$ ، $(\infty)^{\text{صفر}}$ ، $(1)^{\infty}$

فمثلًا : $\infty \pm 7 = \infty$ ، $-\infty \pm 2 = -\infty$ ، $\infty \times 15 = \infty$ ، $-\infty \times 7 = -\infty$ ، $\infty + \infty = \infty$ ، $-\infty \times -2 = \infty$

مفهوم نهاية الدالة عند نقطة

مثال توضيحى

إذا أردنا إيجاد قيمة الدالة د : د (س) $= \frac{س^2 - 1}{س - 1}$ عند س = ١ فإننا نجد أن : د (١) $= \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

وهى كمية غير معينة أى أننا لم نستطع تعيين قيمة للدالة عند س = ١

ولذلك نلجأ إلى دراسة اقتراب د (س) من قيمة معينة كلما اقتربت س من العدد ١

وذلك بإحدى الطريقتين التاليتين :

١ إيجاد النهاية عدديًا

أعطِ قيمًا للمتغير س تقترب شيئًا فشيئًا من العدد ١ من خلال قيم أكبر من ١ وقيم أصغر من ١ دون أن تأخذ س القيمة ١ وملاحظة ما يحدث لقيم د (س) المناظرة كما بالجدول التالى :

س تقترب من ١ (من اليمين) ⟵ ⟶ س تقترب من ١ (من اليسار)

س	١,٥	١,٤	١,٣	١,٢	١,١		٠,٩	٠,٨	٠,٧	٠,٦	٠,٥
د (س)	٢,٥	٢,٤	٢,٣	٢,٢	٢,١		١,٩	١,٨	١,٧	١,٦	١,٥

د (س) تقترب من ٢ ⟵ ⟶ د (س) تقترب من ٢

نجد أنه :

* كلما اقتربت س من العدد ١ من جهة اليمين أى (من خلال قيم للمتغير س أكبر من ١) وتكتب رياضيًا (س ⟵ 1^+) وتقرأ «س تؤول إلى ١ من اليمين»

فإن : د (س) تقترب من العدد ٢ ويسمى العدد ٢ بالنهاية اليمنى للدالة

وتكتب رياضيًا : $\underset{س \to 1^+}{\text{نهـا}}$ د (س) = ٢ ، أ د (1^+) = ٢

وتقرأ نهاية الدالة عندما (س ⟵ 1^+) تساوى ٢

* وكلما اقتربت س من العدد ١ من جهة اليسار أى (من خلال قيم للمتغير س أصغر من ١)

وتكتب رياضيًا : (س ← ١^-) وتقرأ «س تؤول إلى ١ من اليسار»

فإن : د (س) تقترب من العدد ٢ ويسمى العدد ٢ بالنهاية اليسرى للدالة.

وتكتب رياضيًا : $\underset{س \leftarrow ١^-}{نهـا}$ د (س) = ٢ أ، د (١^-) = ٢

وتقرأ نهاية الدالة عندما (س ← ١^-) تساوى ٢

تعريف

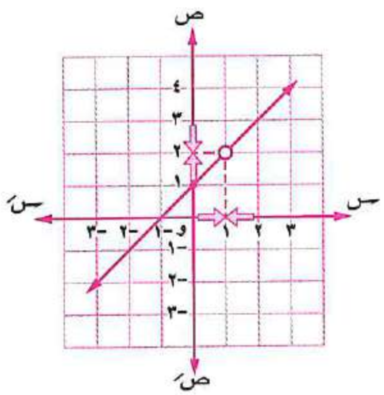
إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل عندما تقترب س من أ من جهتى اليمين واليسار

فإن نهاية د (س) تساوى ل وتكتب رمزيًا $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ د (س) = ل

أى أنه إذا كان : د $(أ^+)$ = د $(أ^-)$ = ل فإن : $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ د (س) = ل

ففى المثال السابق : ∵ د (١^+) = د (١^-) = ٢ ∴ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ د (س) = ٢

٢ إيجاد النهاية بيانيًا



∵ د (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ دالة غير معرفة عند س = ١

∴ د (س) = $\frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)}$ = س + ١ ، س ≠ ١

أى أنها تمثل بخط مستقيم به ثقب عند النقطة التى

إحداثيها السينى = ١ كما بالشكل المقابل

ومن الرسم نلاحظ أنه : عند س $\xleftarrow{\text{تؤول إلى}}$ ١ (من اليمين واليسار)

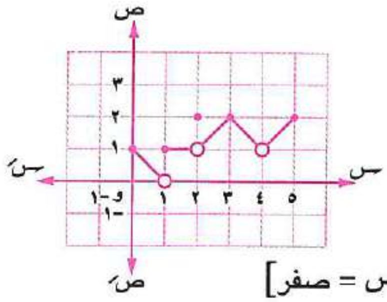
فإن : د (س) $\xleftarrow{\text{تؤول إلى}}$ ٢ أى أن : $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ د (س) = ٢

ملاحظتان

١ عند إيجاد $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ د (س) ليس من الضرورى أن تكون الدالة معرفة عند س = أ ، فقط يجب أن تكون معرفة فى فترة على يسار أ وفترة أخرى على يمين أ

٢ إذا كانت : د $(أ^+)$ ≠ د $(أ^-)$ فإن : $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ د (س) غير موجودة

ملاحظات هامة عند إيجاد نهاية الدالة بيانيًا :



١ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د (س) نجد أن :

أولًا : عند س = صفر :

$\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ د (س) = ١ ، $\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ د (س) غير موجودة

، $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ د (س) غير موجودة [لأن الدالة غير معرفة على يسار س = صفر]

ثانيًا : عند س = ١ : $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}$ د (س) = ٠ ، $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}$ د (س) = ١

∴ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د (س) غير موجودة [لأن النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى]

لاحظ أنه : بالرغم من أن د معرفة عند س = ١ «د (١) = ١» إلا أن النهاية غير موجودة

ثالثًا : عند س = ٢ : $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) = ١

[لاحظ أنه ليس من الضرورى أن قيمة الدالة تساوى قيمة النهاية حيث د (٢) = ٢]

رابعًا : عند س = ٣ : $\underset{س \leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـا}}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow ٣^{+}}{\text{نهـا}}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ د (س) = د (٣) = ٢

خامسًا : عند س = ٤ : $\underset{س \leftarrow ٤^{-}}{\text{نهـا}}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow ٤^{+}}{\text{نهـا}}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}$ د (س) = ١

[لاحظ أن د (٤) غير معرفة أى أن النهاية موجودة على الرغم من أن الدالة غير معرفة]

سادسًا : عند س = ٥ : $\underset{س \leftarrow ٥^{-}}{\text{نهـا}}$ د (س) = ٢

، $\underset{س \leftarrow ٥^{+}}{\text{نهـا}}$ د (س) ، $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ د (س) غير موجودتين [لأن الدالة غير معرفة على يمين س = ٥]

ملاحظــة

من الرسم البيانى للدالة فى الشكل السابق نجد أن :

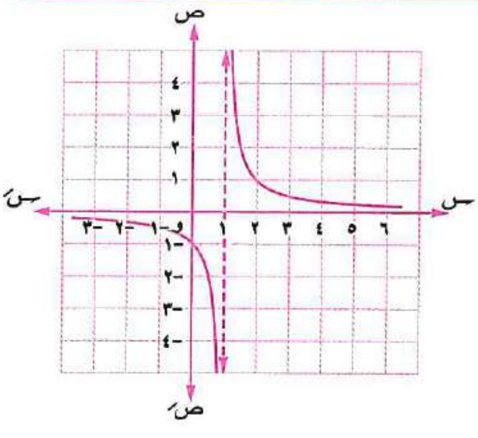
* النقطة التى تمثل بفجوة لا تؤثر فى وجود نهاية عندها كما فى ثالثًا وخامسًا.
* النقطة التى عندها قفزة تؤدى إلى عدم وجود نهاية كما فى ثانيًا.

٢ الشكل المقابل يمثل الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س - ١}$

ونجد أن : د (١^{+}) = ∞ ، د (١^{-}) = − ∞

∴ د (١^{+}) ≠ د (١^{-})

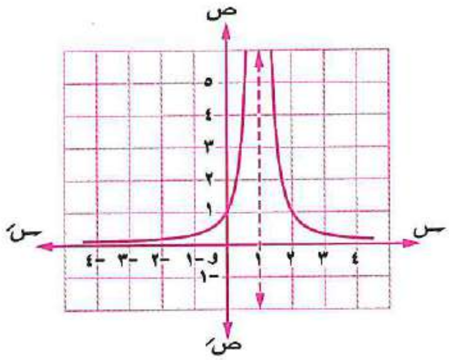
∴ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د (س) غير موجودة



٣ الشكل المقابل يمثل الدالة د : د (س) = $\frac{١}{(س - ١)^{٢}}$

ونجد أن : د (١^{+}) = ∞ ، د (١^{-}) = ∞

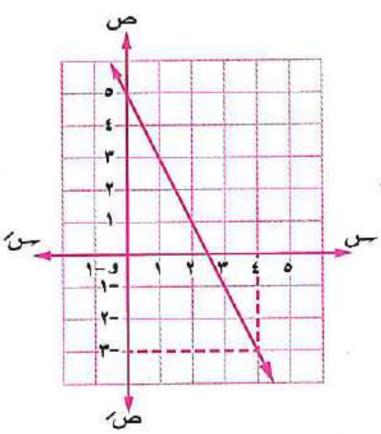
، نهـــا د (س) = ∞
س ← ١



مثال ١

أوجد : نهـــا (٥ - ٢ س) بيانيًا وعدديًا
س ← ٤

الحـــل



* بيانيًا : نمثل الدالة الخطية د : د (س) = ٥ - ٢ س كما بالشكل المقابل.

نلاحظ أنه عندما س ← ٤ فإن : د (س) ← –٣

أى أن : نهـــا (٥ - ٢ س) = –٣
س ← ٤

* عدديًا : نكون جدولًا لقيم د (س) وذلك باختيار قيم س

تقترب من العدد ٤ من اليمين واليسار كما يلى :

س	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١	.... ٤	٣,٩٩٩	٣,٩٩	٣,٩
د (س)	–٣,٢	–٣,٠٢	–٣,٠٠٢	.... –٣	–٢,٩٩٨	–٢,٩٨	–٢,٨

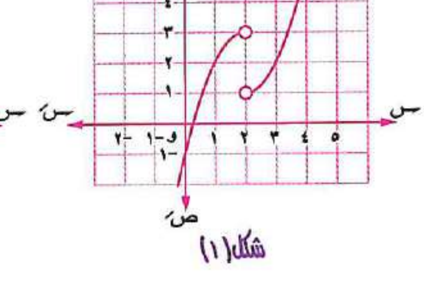
نلاحظ من الجدول أنه كلما تقترب س من العدد ٤ من اليمين أو اليسار

فإن : قيم د (س) تقترب من العدد –٣ ∴ نهـــا (٥ - ٢ س) = –٣
س ← ٤

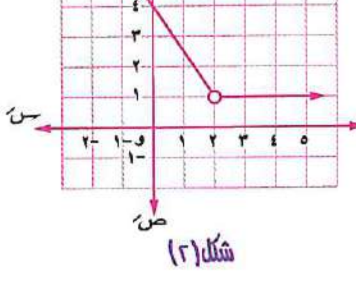
مثال ٢

ادرس كلًا من الأشكال الآتية التى تمثل منحنى الدالة د (س) ثم أوجد قيمة :

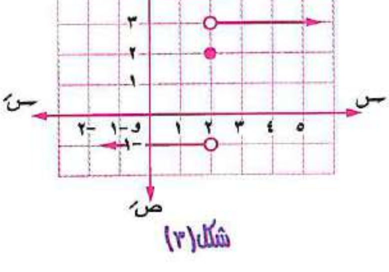
١ د (٢) ٢ نهـــا د (س) ($س \leftarrow ٢^{+}$) ٣ نهـــا د (س) ($س \leftarrow ٢^{-}$) ٤ نهـــا د (س) ($س \leftarrow ٢$)



شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)

الحـــل

فى شكل (١) : د (٢) غير معرفة ، نهـــا $_{س \to ٢^{+}}$ د (س) = ١ ، نهـــا $_{س \to ٢^{-}}$ د (س) = ٣

، نهـــا $_{س \to ٢}$ د (س) غير موجودة

فى شكل (٢) : د (٢) غير معرفة ، نهـــا $_{س \to ٢^{+}}$ د (س) = ١ ، نهـــا $_{س \to ٢^{-}}$ د (س) = ١ ، نهـــا $_{س \to ٢}$ د (س) = ١

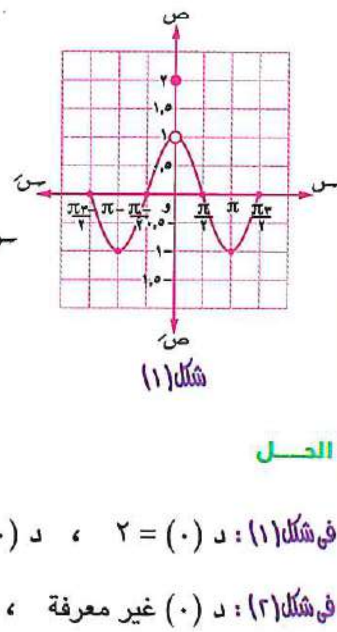
فى شكل (٣) : د (٢) = ٢ ، نهـــا $_{س \to ٢^{+}}$ د (س) = ٣ ، نهـــا $_{س \to ٢^{-}}$ د (س) = −١

، نهـــا $_{س \to ٢}$ د (س) غير موجودة.

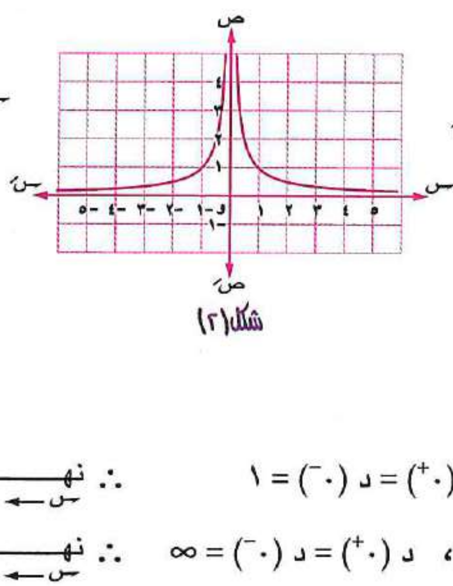
مثال ٣

ادرس كلاً من الأشكال الآتية ثم أوجد فى كل شكل قيمة :

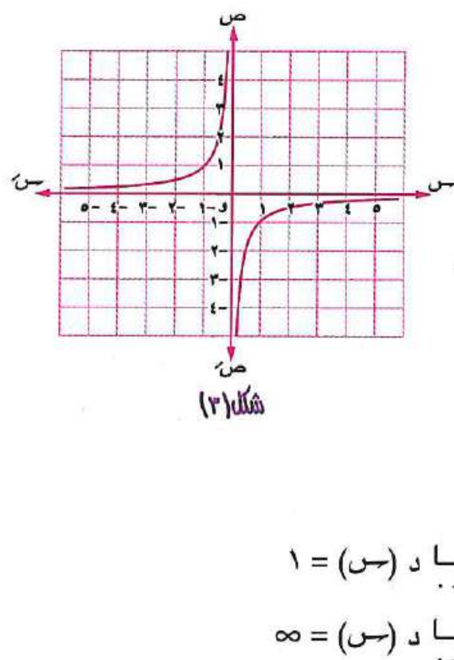
١ د (٠)	٢ د (٠^{+})
٣ د (٠^{-})	٤ نهـــا $_{س \to ٠}$ د (س)



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحـــل

فى شكل (١) : د (٠) = ٢ ، د (٠^{+}) = د (٠^{-}) = ١ ∴ نهـــا $_{س \to ٠}$ د (س) = ١

فى شكل (٢) : د (٠) غير معرفة ، د (٠^{+}) = د (٠^{-}) = ∞ ∴ نهـــا $_{س \to ٠}$ د (س) = ∞

فى شكل (٣) : د (٠) غير معرفة ، د (٠^{+}) = −∞ ، د (٠^{-}) = ∞

∴ نهـــا $_{س \to ٠}$ د (س) غير موجودة.

تمارين 12

على مقدمة فى النهايات
«إيجاد النهاية عدديًا وبيانيًا»

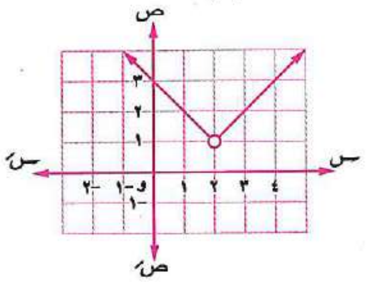
من أسئلة الكتاب المدرسى ● فهم ○ تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① كل الكميات الآتية غير معينة ماعدا ....

(أ) صفر ÷ صفر (ب) ∞ − ∞ (جـ) ∞ + ∞ (د) ∞ ÷ ∞

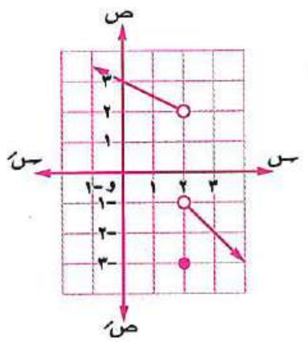


② **فى الشكل المقابل :**

نهـا (س ← ٢) د (س) = ...

(أ) ١ (ب) −١

(جـ) غير موجودة. (د) ٢



③ **فى الشكل المقابل :**

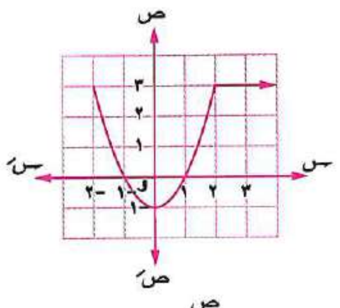
نهـا (س ← ٢) د (س) = ...

(أ) −٣

(ب) ٢

(جـ) −١

(د) غير موجودة.

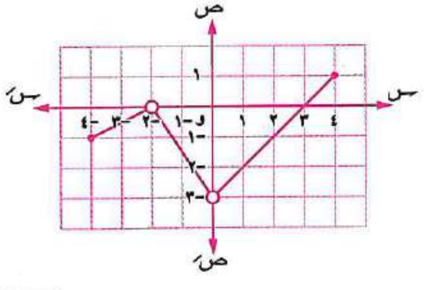


④ **فى الشكل المقابل :**

نهـا (س ← ٢) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) غير موجودة.



⑤ من الشكل البيانى المقابل :

أولًا : نهـا (س ← −٢) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −٣

(جـ) −٢ (د) غير موجودة.

ثانيًا : نهــا (س ← ٠) د (س) = ……………

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) −٣ (د) غير موجودة.

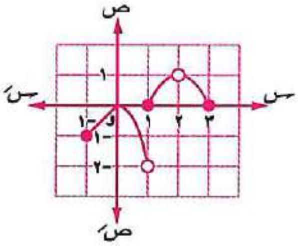
ثالثًا : نهــا (س ← −٤) د (س) = ……………

(أ) صفر (ب) −٤ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

رابعًا : نهــا (س ← ٤) د (س) = ……………

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

⑥ بالاستعانة بالشكل المقابل :



أولًا : نهــا (س ← ١⁺) د (س) = ……………

(أ) صفر (ب) −٢

(جـ) ١ (د) غير موجودة.

ثانيًا : نهــا (س ← ١⁻) د (س) = ……………

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

ثالثًا : نهــا (س ← ١) د (س) = ……………

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

رابعًا : نهــا (س ← −١⁺) د (س) = ……………

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) −٢ (د) غير موجودة.

خامسًا : نهــا (س ← −١) د (س) = ……………

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) −٢ (د) غير موجودة.

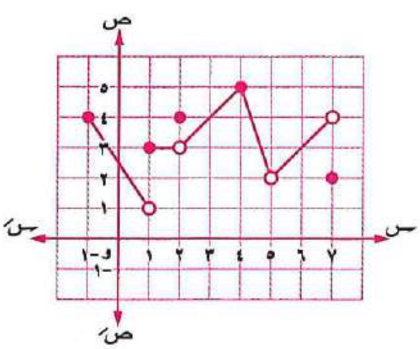
سادسًا : نهــا (س ← ٢) د (س) = ……………

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) غير موجودة.

سابعًا : نهــا (س ← ٠) د (س) = ……………

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

⑦ بالاستعانة بالشكل المقابل :



أولًا : نهــا (س ← −١⁺) د (س) = ……………

(أ) صفر (ب) −١

(جـ) ٤ (د) غير موجودة.

ثانيًا : نهــا (س ← −١⁻) د (س) = ……………

(أ) صفر (ب) −١

(جـ) ٤ (د) غير موجودة.

ثالثًا : نهـــا (س ← ١⁻) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

رابعًا : د (٢) = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) غير معرفة.

خامسًا : د (٥) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) غير معرفة.

سادسًا : نهـــا (س ← ٥⁻) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) غير موجودة.

سابعًا : نهـــا (س ← ٥⁺) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) غير موجودة.

ثامنًا : نهـــا (س ← ٥) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) غير موجودة.

تاسعًا : نهـــا (س ← ٧⁻) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

عاشرًا : نهـــا (س ← ٧) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

ثانيًا الأسئلة المقالية

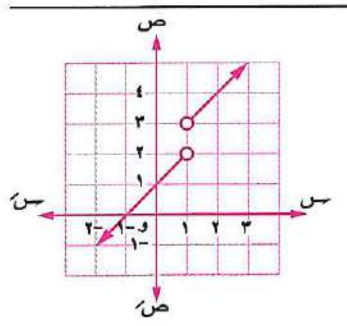
١ أكمل الجدول الآتى واستنتج : نهـــا (س ← ٢) د (س) حيث د (س) = ٥ س + ٤

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د (س)	....	....	....	←	؟	→	....	....	....

٢ أوجد كلًا من النهايتين الآتيتين بيانيًا وعدديًا :

(١) نهـــا (س ← ٢) (١ − ٣ س) (٢) نهـــا (س ← ٠) (س^{٢} − ٢)

٣ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د (س) أوجد :



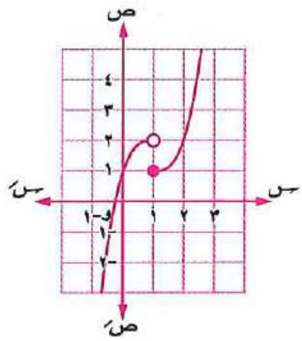
(١) د (١)

(٢) د (١⁺)

(٣) د (١⁻)

(٤) نهـــا (س ← ١) د (س)

٤ ادرس الشكل المقابل الذى يمثل منحنى الدالة د (س) ثم أوجد :



① د (١)

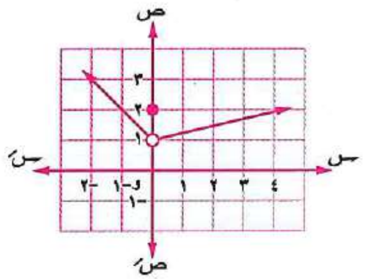
② د (١⁻)

③ د (١⁺)

④ نهـــا د (س) عندما س ← ١

---

٥ ادرس الشكل المقابل الذى يمثل منحنى الدالة د (س) ثم أوجد :



① د (٠)

② د (٠⁻)

③ د (٠⁺)

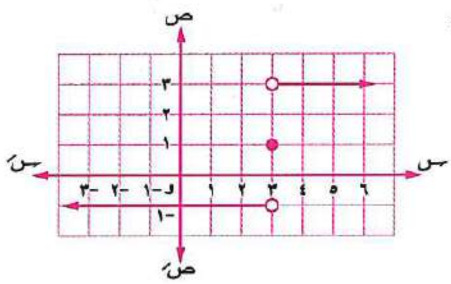
④ نهـــا د (س) عندما س ← ٠

⑤ د (٢)

⑥ نهـــا د (س) عندما س ← ٢

---

٦ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د (س) أوجد ما يأتى :



① د (٣)

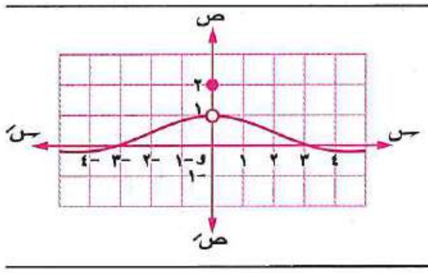
② نهـــا د (س) عندما س ← ٣⁻

③ نهـــا د (س) عندما س ← ٣⁺

④ نهـــا د (س) عندما س ← ٣

---

٧ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د (س) أوجد :



① د (٠)

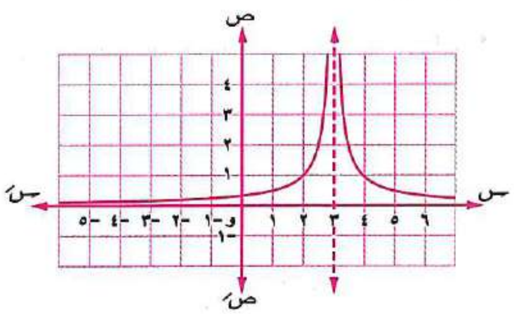
② د (٠⁺)

③ د (٠⁻)

④ نهـــا د (س) عندما س ← ٠

---

٨ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د (س) أوجد إن أمكن ما يلى :



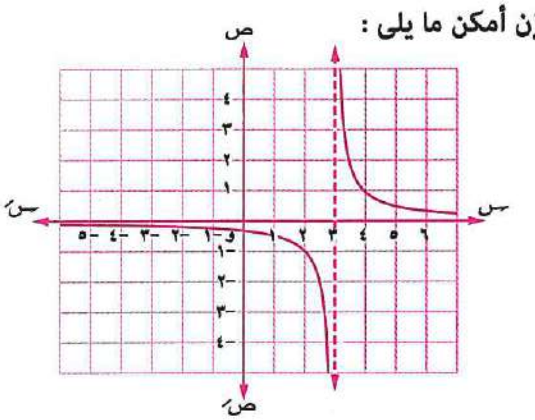
① د (٣)

② نهـــا د (س) عندما س ← ٣⁻

③ نهـــا د (س) عندما س ← ٣⁺

④ نهـــا د (س) عندما س ← ٣

٩ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د (س) أوجد إن أمكن ما يلى :



(١) د (٣)

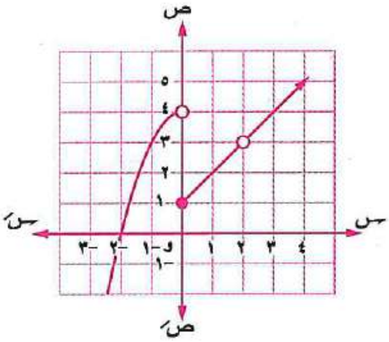
(٢) د (٣^+)

(٣) د (٣^-)

(٤) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ د (س)

---

١٠ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د (س) أوجد :



(١) د (٠)

(٢) د (٠^+)

(٣) د (٠^-)

(٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ د (س)

(٥) د (٢)

(٦) د (٢^+)

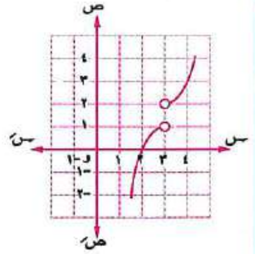
(٧) د (٢^-)

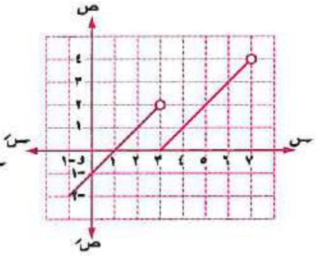
(٨) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س)

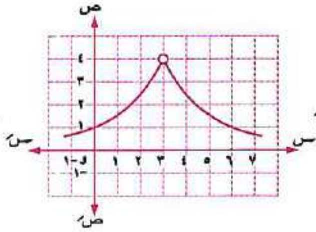
ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

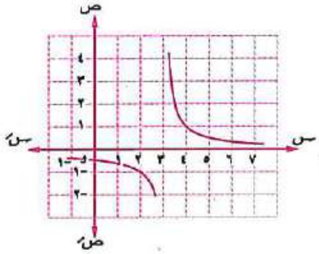
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية لها نهاية عند س = ٣ ؟

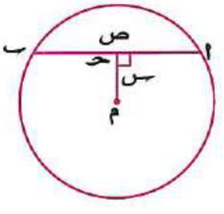

(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

(٢) الشكل المقابل يمثل دائرة م



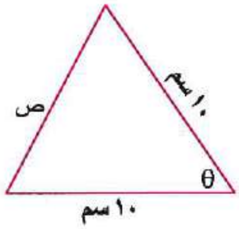
طول نصف قطرها ٥ سم ، $\overline{مح} \perp \overline{أب}$

، طول $\overline{مح}$ = س ، طول $\overline{أب}$ = ص عندما س ⟵ ٠

فإن : ص ⟵ .... سم

(أ) ٢,٥ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

③ فى الشكل المقابل :



عندما $\theta \to \frac{\pi}{٢}$ فإن : ص ← .... سم

(أ) صفر (ب) ٥

(جـ) ١٠ (د) $١٠\sqrt{٢}$

④ إذا قطع منحنى الدالة د الكثيرة الحدود محور السينات عند س = ٣ فإن : ....

(أ) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}$ د (س) = صفر (ب) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}$ د (س) = ٣

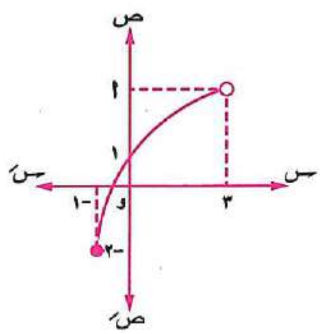
(جـ) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}$ د (س) = صفر (د) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}$ د (س) = ٣

⑤ إذا قطع منحنى الدالة د الكثيرة الحدود محور الصادات عند ص = ٣ فإن : ....

(أ) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}$ د (س) = صفر (ب) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}$ د (س) = ٣

(جـ) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}$ د (س) = صفر (د) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}$ د (س) = ٣

⑥ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د (س)



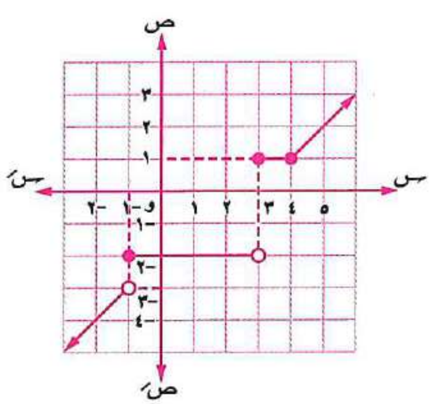
وكان : $\underset{س \to ٠}{\text{نها}}$ د (س) = $\underset{س \to -١^+}{\text{نها}}$ د (س) + $\underset{س \to ٢^-}{\text{نها}}$ د (س)

فإن : ا = ...

(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٦

⑦ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د (س)



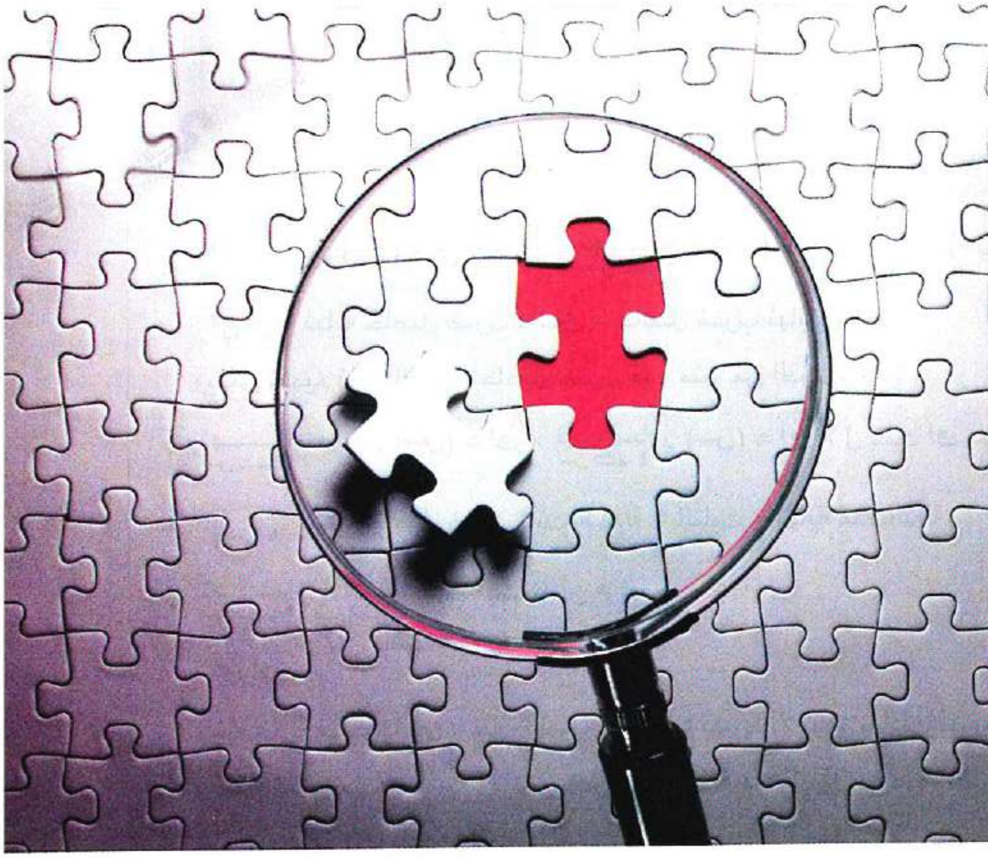
وكان : $\underset{س \to ا^-}{\text{نها}}$ د (س) = $\underset{س \to -١^-}{\text{نها}}$ د (س)

+ $\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}}$ د (س)

فإن أكبر قيمة للعدد ا = ...

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤



الدرس

2

إيجاد نهاية الدالة جبريًا

سنعرض الآن بعض النظريات والنتائج التى تساعد فى إيجاد نهاية دالة دون اللجوء إلى الرسم البيانى أو دراسة قيم الدالة.

نظرية ١ نهاية الدالة كثيرة الحدود

إذا كانت : د (س) كثيرة حدود فى المتغير س فإن : نهـــا (س ← أ) د (س) = د (أ)

فمثلًا : نهـــا (س ← ٢) (٢ س + ٥) = د (٢) = ٢ × ٢ + ٥ = ٩

، نهـــا (س ← ١) (س^{٢} − ٣ س + ٢) = د (١) = ١ − ٣ + ٢ = ٠

نتيجة

نهاية الدالة الثابتة

إذا كانت : د (س) = ك حيث ك ثابت فإن : نهـــا (س ← أ) د (س) = نهـــا (س ← أ) ك = ك

فمثلًا : نهـــا (س ← ٣) ٤ = ٤ ، نهـــا (س ← −١) −٥ = −٥

نظرية ٢

إذا كانت د ، ر دالتين فى المتغير س وكانت : نهـــا (س ← أ) د (س) = ل

، نهـــا (س ← أ) ر (س) = م حيث ل ، م ∈ ح فإن :

١ نهـــا (س ← أ) [د (س) ± ر (س)] = نهـــا (س ← أ) د (س) ± نهـــا (س ← أ) ر (س) = ل ± م

أى أن نهاية المجموع الجبرى لدالتين = المجموع الجبرى لنهايتيهما

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة للمجموع الجبرى لعدد منته من الدوال.

٢ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} [د(س) \times ر(س)] = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} د(س) \times \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} ر(س) = ل \times م$

أى أن نهاية حاصل ضرب دالتين = حاصل ضرب نهايتيهما

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لحاصل ضرب عدد منته من الدوال.

٣ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} ك \times د(س) = ك \times \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} د(س) = ك \times ل$ حيث ك مقدار ثابت.

أى أن نهاية حاصل ضرب ثابت × دالة = الثابت × نهاية هذه الدالة.

٤ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{د(س)}{ر(س)} = \frac{ل}{م}$ بشرط أن $م \neq ٠$

أى أن

نهاية خارج قسمة دالتين = خارج قسمة نهايتيهما بشرط ألا تكون نهاية المقسوم عليه = ٠

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لحاصل ضرب عدد منته من الدوال مقسومًا على حاصل ضرب عدد منته من الدوال بشرط أن أيًا من نهايات المقسوم عليه لا يساوى الصفر.

٥ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} [د(س)]^ن = [\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} د(س)]^ن = ل^ن$ ، $ن \in ص^+$

مثال ١

أوجد كلاً من النهايات الآتية :

١ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (س^٢ + ٣س - ٢)$

٢ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{(س + ١)}{(٣س - ١)}$

الحل

١ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} س^٢ + ٣س - ٢ = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} س^٢ + \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} ٣س - \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} ٢ = ٠ + ٠ - ٢ = -٢$

٢ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س + ١}{٣س - ١} = \frac{\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} (س + ١)}{\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} (٣س - ١)} = \frac{٢}{٢} = ١$

يمكنك حل المثال السابق مباشرة باستخدام التعويض المباشر دون تقسيم النهايات.

ملاحظة

يمكن استخدام التعويض المباشر وتكون $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} د(س) = د(١)$

إذا كانت الدالة د كثيرة حدود أو دالة كسرية مقامها ≠ صفر عند التعويض عن س = ١

نظرية ٣

إذا كانت : د ، ع دالتين فى المتغير س وكانت : د(س) = ع(س) لجميع قيم $س \in ح - \{١\}$

وكانت : $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} ع(س) = ل$ فإن : $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} د(س) = ل$

استخدام النظرية السابقة :

تستخدم هذه النظرية لإيجاد نهاية دالة كسرية جبرية

(أى نهاية كسر كل من بسطه ومقامه عبارة عن دالة كثيرة حدود)

ولتكن د (س) عندما س ← أ وذلك عندما يكون كل من البسط والمقام يساوى صفر عند س = أ وهذا معناه أن (س − أ) يكون عاملًا مشتركًا بين البسط والمقام.

> **لاحظ أن**
> س ← أ تعنى أن
> (س − أ) ← صفر
> **أى أن** (س − أ) ≠ صفر
> ولهذا السبب تم الاختصار

ولإيجاد $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}}$ د (س) فى هذه الحالة فإننا نختصر العامل (س − أ) وذلك عن طريق التحليل أو القسمة المطولة فنحصل على دالة جديدة ولتكن ر (س) تكون مساوية للدالة د (س) عندما س ≠ أ

فتكون $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}}$ د (س) = $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}}$ ر (س) والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - ١٦}{\text{س} - ٤}$ ٢ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}$ ٣ $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{(٢\text{س} + ٣)^٢ - ١}{\text{س}^٢ + \text{س}}$

الحل

١ بفرض $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢ - ١٦}{\text{س} - ٤}$ $\therefore \text{د}(٤) = \dfrac{٤^٢ - ١٦}{٤ - ٤} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$\therefore \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - ١٦}{\text{س} - ٤} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٤)}{\text{س} - ٤} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} (\text{س} + ٤) = ٤ + ٤ = ٨$$

٢ بفرض $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}$ $\therefore \text{د}(٢) = \dfrac{٢^٣ - ٨}{٢^٢ - ٥(٢) + ٦} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$\therefore \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤}{\text{س} - ٣} = \dfrac{٢^٢ + ٢(٢) + ٤}{٢ - ٣} = -١٢$$

٣ بفرض $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{(٢\text{س} + ٣)^٢ - ١}{\text{س}^٢ + \text{س}}$ $\therefore \text{د}(-١) = \dfrac{(-٢ + ٣)^٢ - ١}{(-١)^٢ - ١} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$\therefore \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{(٢\text{س} + ٣)^٢ - ١}{\text{س}^٢ + \text{س}} = \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{(٢\text{س} + ٣ - ١)(٢\text{س} + ٣ + ١)}{\text{س}(\text{س} + ١)}$$

$$= \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{(٢\text{س} + ٢)(٢\text{س} + ٤)}{\text{س}(\text{س} + ١)} = \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{٢(\text{س} + ١) \times ٢(\text{س} + ٢)}{\text{س}(\text{س} + ١)}$$

$$= \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{٤(\text{س} + ٢)}{\text{س}} = \dfrac{٤(-١ + ٢)}{-١} = -٤$$

مثال ٣

أوجد : $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٧س + ٦}{٣س^{٣} - ٨س^{٢} + ٤}$ ... $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٧س + ٦}{٣س^{٢} - ٨س + ٤}$

الحل

بفرض د $(س) = \frac{س^{٣} - ٧س + ٦}{٣س^{٢} - ٨س + ٤}$

$\therefore$ د $(٢) = \frac{(٢)^{٣} - ٧(٢) + ٦}{٣(٢)^{٢} - ٨(٢) + ٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\therefore (س - ٢)$ عامل مشترك بين البسط والمقام

وبإجراء قسمة مطولة للبسط على $(س - ٢)$

$\therefore$ $س^{٣} \quad - ٧س + ٦$ ÷ $(س - ٢)$ = $س^{٢} + ٢س - ٣$

$\ominus س^{٣} \oplus ٢س^{٢}$

$٢س^{٢} - ٧س + ٦$

$\ominus ٢س^{٢} \oplus ٤س$

$-٣س + ٦$

$\oplus ٣س \ominus ٦$

.. ..

$\therefore$ البسط $= (س - ٢)(س^{٢} + ٢س - ٣)$

$\therefore \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٧س + ٦}{٣س^{٢} - ٨س + ٤} = \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س - ٣)}{(س - ٢)(٣س - ٢)} = \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{٣س - ٢}$

$= \frac{٤ + ٤ - ٣}{٦ - ٢} = \frac{٥}{٤}$

تذكر أنه

فى عملية القسمة المطولة :

(١) نرتب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه بحسب قوى س ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا بنفس الطريقة مع ترك مكان فارغ للقوى غير الموجودة.

(٢) نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه ونكتب ناتج القسمة.

(٣) نضرب ناتج القسمة فى المقسوم عليه وبطرح الناتج من المقسوم للحصول على الباقى.

(٤) نستمر بنفس الطريقة حتى الانتهاء من عملية القسمة.

ملاحظـة

يمكن فى حالة القسمة على مقدار من الدرجة الأولى ومعامل س = ١ أى على الصورة (س − ٢) استخدام طريقة القسمة التركيبية كتسهيل لطريقة القسمة المطولة ويمكن استخدامها فى المثال السابق كما يلى لقسمة $(س^{٣} - ٧س + ٦)$ على $(س - ٢)$

١ نرتب المعاملات حسب قوى س التصاعدية أو التنازلية مع وضع (٠) كمعامل للقوى غير الموجودة مع وضع الـ ٢ (وهى صفر المقسوم عليه) فى خانة المقسوم عليه.

١	٠	−٧	٦	٢
	☐	☐	☐	
☐	☐	☐	☐	

٢ يترك معامل أكبر قوى لينزل للصف الثالث مباشرة ثم يضرب فى الـ ٢ ونضع ناتج الضرب فى خانة الصف الثانى بالعمود المجاور مباشرة.

١	٠	−٧	٦	٢
	٢ (× ٢)	☐	☐	
١	☐	☐	☐	

٣ اجمع معامل القوة التالية مع ناتج الضرب الذى حصلت عليه توًا.

١	٠	−٧	٦	٢
	٢	☐	☐	
١	٢	☐	☐	

٤ كـرر الضرب والجمع لتحصل على معاملات خارج القسـمة وهى ١ ، ٢ ، −٣

١	٠	−٧	٦	٢
	٢	٤	−٦	
١	٢	−٣	٠	

∴ خارج القسمة هو $\text{س}^2 + 2\,\text{س} - 3$

حل آخر للمثال السابق :

يمكن استخدام التحليل بالتقسيم وذلك بمعلومية أن (س − ٢) عامل من عوامل البسط كالتالى.

$$\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^3 - 7\,\text{س} + 6}{3\,\text{س}^2 - 8\,\text{س} + 4} = \underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{(\text{س}^3 - 8) + (-7\,\text{س} + 14)}{(\text{س} - 2)(3\,\text{س} - 2)}$$

$$= \underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - 2)(\text{س}^2 + 2\,\text{س} + 4) - 7(\text{س} - 2)}{(\text{س} - 2)(3\,\text{س} - 2)}$$

$$= \underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س} - 2)}(\text{س}^2 + 2\,\text{س} + 4 - 7)}{\cancel{(\text{س} - 2)}(3\,\text{س} - 2)} = \frac{2^2 + 2 \times 2 - 3}{3 \times 2 - 2} = \frac{5}{4}$$

ملاحظـة هامة

فى حالة وجود فرق بين جذرين تربيعيين لمقدارين جبريين (فى البسط أ ، فى المقام أ ، فى كليهما) فإننا نضرب كلاً من البسط والمقام فى مرافق (البسط أ ، المقام أ ، كليهما) وذلك عندما تكون نتيجة التعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال ٤

أوجد كلاً مما يأتى : ١ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2 + 2\,\text{س}}{\sqrt{\text{س} + 9} - 3}$ ٢ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\sqrt{4 + \text{س}} - 2}{\sqrt{9 + \text{س}} - \sqrt{9 - \text{س}}}$

الحـل

بالتعويض عن س = ٠ فى كل من الدالتين السابقتين سنجد أن قيمة كل منهما = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

١ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2 + 2\,\text{س}}{\sqrt{\text{س} + 9} - 3} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2 + 2\,\text{س}}{\sqrt{\text{س} + 9} - 3} \times \frac{\sqrt{\text{س} + 9} + 3}{\sqrt{\text{س} + 9} + 3}$

(وذلك بالضرب بسطًا ومقامًا فى مرافق المقام)

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{س}(\text{س} + 2)\left(\sqrt{\text{س} + 9} + 3\right)}{(\text{س} + 9) - 9}$$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} (\text{س} + 2)\left(\sqrt{\text{س} + 9} + 3\right) = (0 + 2)\left(\sqrt{0 + 9} + 3\right) = 12$$

٢ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\sqrt{٤ + \text{س}} - ٢}{\sqrt{٩ + \text{س}} - \sqrt{٩ - \text{س}}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\left(\sqrt{٤ + \text{س}} - ٢\right)\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)\left(\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}\right)}{\left(\sqrt{٩ + \text{س}} - \sqrt{٩ - \text{س}}\right)\left(\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}\right)\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)}$

(وذلك بالضرب بسطًا ومقامًا فى مرافق البسط ومرافق المقام)

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{(٤ + \text{س} - ٤)\left(\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}\right)}{(٩ + \text{س} - ٩ + \text{س})\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س}\left(\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}\right)}{٢\text{س}\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}}{٢\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)} = \dfrac{\sqrt{٩ + ٠} + \sqrt{٩ - ٠}}{٢\left(\sqrt{٤ + ٠} + ٢\right)} = \dfrac{٣}{٤}$

مما سبق نستنتج أن

لإيجاد $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}}$ د (س) نوجد د (أ) بالتعويض المباشر عن س = أ فى الدالة فإذا كان الناتج :

١ عدد حقيقى ب فإن : $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}}$ د (س) = ب

٢ $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ «كمية غير معينة» نقوم بقسمة كل من البسط والمقام على (س − أ)

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\lim\limits_{\text{س} \to -٢} \dfrac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ + ١}$

٢ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \left(\dfrac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س} - ٢} - \dfrac{٢}{\text{س} - ٢}\right)$

الحل

التعويض المباشر يعطى عددًا حقيقيًا

١ ∵ د (−٢) = $\dfrac{-٢ - ٣}{(-٢)^٢ + ١} = -١$ ∴ $\lim\limits_{\text{س} \to -٢} \dfrac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ + ١} = -١$

٢ بفرض د (س) = $\dfrac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س} - ٢} - \dfrac{٢}{\text{س} - ٢}$ ∴ د (س) = $\dfrac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢}{\text{س} - ٢}$

∴ د (٢) = $\dfrac{٤ - ٢ - ٢}{٢ - ٢} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

التعويض المباشر يعطى $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ «كمية غير معينة»

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \left(\dfrac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س} - ٢} - \dfrac{٢}{\text{س} - ٢}\right) = \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢}{\text{س} - ٢}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)}{\text{س} - ٢}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٢} (\text{س} + ١) = ٢ + ١ = ٣$

مثال ٦

إذا كانت : $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{د (س)} - ٧}{\text{س} - ٣} = ٤$ **فأوجد** : $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \text{ د (س)}$

الحــل

$\because \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{د (س)} - ٧}{\text{س} - ٣}$ موجودة وتساوى ٤

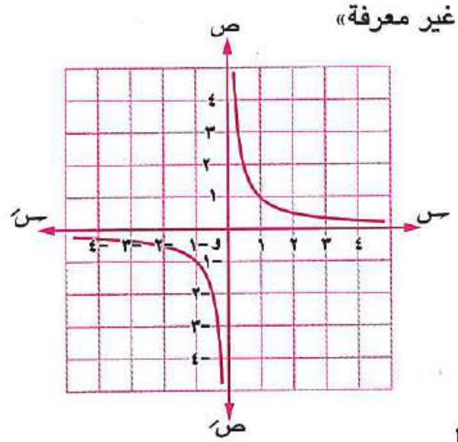
، $\because \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} (\text{س} - ٣) = \text{صفر}$ $\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} (\text{د (س)} - ٧) = \text{صفر}$

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \text{ د (س)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} (٧) = ٧$

معلومة إثرائية

النهاية التى يعطى فيها التعويض المباشر $\dfrac{\text{عدد حقيقى} \neq \text{صفر}}{\text{صفر}}$ «كمية غير معرفة»

الشكل المقابل :



يمثل الدالة د : د (س) $= \dfrac{١}{\text{س}}$ بيانيًا ونلاحظ منه أن :

١ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^+}{\text{نهـــا}} \dfrac{١}{\text{س}} = \infty$

٢ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^-}{\text{نهـــا}} \dfrac{١}{\text{س}} = -\infty$

٣ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{١}{\text{س}}$ غير موجودة لأن د $(٠)^+ \neq$ د $(٠)^-$

ومما سبق يمكن ايجاد نهايات آخرى التعويض المباشر فيها يعطى $\dfrac{\text{عدد حقيقى} \neq \text{صفر}}{\text{صفر}}$ دون الاستعانة بالتمثيل البيانى كالتالى.

١ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{١}{\text{س} - ٢} = \underset{(\text{س} - ٢) \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{١}{(\text{س} - ٢)}$

$\underset{(\text{س} - ٢) \leftarrow ٠^+}{\text{نهـــا}} \dfrac{١}{(\text{س} - ٢)} = \infty$

$\underset{(\text{س} - ٢) \leftarrow ٠^-}{\text{نهـــا}} \dfrac{١}{(\text{س} - ٢)} = -\infty$

$\therefore$ النهاية اليمنى $\neq$ النهاية اليسرى. $\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{١}{\text{س} - ٢}$ غير موجودة.

٢ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{١}{\text{س}^٢}$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٠^+}{\text{نهـــا}} \left(\dfrac{١}{\text{س}}\right)^٢ = \left(\underset{\text{س} \leftarrow ٠^+}{\text{نهـــا}} \dfrac{١}{\text{س}}\right)^٢ = (\infty)^٢ = \infty$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٠^-}{\text{نهـــا}} \left(\dfrac{١}{\text{س}}\right)^٢ = \left(\underset{\text{س} \leftarrow ٠^-}{\text{نهـــا}} \dfrac{١}{\text{س}}\right)^٢ = (-\infty)^٢ = \infty$

$\therefore$ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى. $\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{١}{\text{س}^٢} = \infty$

٣ $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \dfrac{٣\text{س} + ٤}{\text{س} + ١}$

$= \underset{\text{س} + ١ \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} (٣\text{س} + ٤) \times \dfrac{١}{(\text{س} + ١)}$

$\underset{(\text{س} + ١) \leftarrow ٠^+}{\text{نهـــا}} (٣\text{س} + ٤) \times \dfrac{١}{(\text{س} + ١)} = ١ \times \infty = \infty$

$\underset{(\text{س} + ١) \leftarrow ٠^-}{\text{نهـــا}} (٣\text{س} + ٤) \times \dfrac{١}{(\text{س} + ١)} = ١ \times -\infty = -\infty$

$\therefore$ النهاية اليمنى $\neq$ النهاية اليسرى. $\therefore \underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \dfrac{٣\text{س} + ٤}{\text{س} + ١}$ غير موجودة.

تمارين 13 على إيجاد نهاية الدالة جبريًا

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}}{نهـا} (١٠) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) ٥ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ (د) $١٠\frac{١}{٢}$

(٢) $\underset{س \leftarrow ٤}{نهـا} (٣ س - \sqrt{س}) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د) ١٦

(٣) $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} (٣ أ^٢) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) $٣ أ^٢$ (د) ١٢

(٤) $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} (٢ س^٢ - أ س - أ^٢) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ حيث $أ \in ح$

(أ) صفر (ب) أ (جـ) $٤ أ^٢$ (د) $أ^٢ - ٢ أ$

(٥) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{نهـا} (٢ س - جا س) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) π (ب) $\pi + ١$ (جـ) $\pi - ١$ (د) $٢ \pi - ١$

(٦) $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \sqrt{\frac{٣ + ٢ س}{٤ س - ١}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) -٣ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $-\frac{١}{٢}$

(٧) $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{٢ س - ٦}{٧ س - ٢١} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٧}$ (جـ) $\frac{٣}{٧}$ (د) ٣

(٨) $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{س^٢ - س}{س} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) غير موجودة. (د) ١

(٩) $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٢ - ٧ س + ١٢}{س - ٣} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٧ (د) -٢

(١٠) $\underset{س \leftarrow -١}{نهـا} \frac{س^{٢} + س}{س^{٣} + ١} =$ ....

(أ) صفر (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) -١ (د) ليس لها وجود.

(١١) $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^{٢} - س - ٦}{س^{٢} + س - ١٢} =$ ....

(أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (جـ) -١ (د) -٥

(١٢) $\underset{س \leftarrow -٤}{نهـا} \frac{٣س^{٢} - ٤٨}{س + ٤} =$ ....

(أ) ٣٢ (ب) -٣٢ (جـ) ٢٤ (د) -٢٤

(١٣) $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٤} =$ ....

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{-٢}{٥}$

(١٤) $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{٣س + ٢س^{-١}}{س + ٤س^{-١}} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(١٥) $\underset{س \leftarrow \sqrt{٥}}{نهـا} \frac{س^{٤} - س^{٢} - ٢٠}{س - \sqrt{٥}} =$ ....

(أ) ٩ (ب) $٢\sqrt{٥}$ (جـ) $٩\sqrt{٥}$ (د) $١٨\sqrt{٥}$

(١٦) $\underset{س \leftarrow ٤}{نهـا} \frac{(س - ٣)^{٢} - ١}{س - ٤} =$ ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٧) $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س} =$ ....

(أ) صفر (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ليس لها وجود.

(١٨) $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣} =$ ....

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٦ (د) $\frac{١}{٦}$

(١٩) $\underset{س \leftarrow ٩}{نهـا} \frac{\sqrt{٢} - \sqrt{س - ٧}}{س - ٩} =$ ....

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ (جـ) $\frac{-\sqrt{٢}}{٤}$ (د) $-٢\sqrt{٢}$

(٢٠) $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{٤ - \sqrt{س + ١٥}}{١ - س^{٢}} =$ ....

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٨}$ (جـ) $\frac{١}{١٦}$ (د) -٤

(٢١) $\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{\sqrt{س} - ٢}{٥ س^{٢} - ٢٣ س + ١٢} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٩٢}$ (ب) $\frac{١}{٦٨}$ (جـ) ٦٨ (د) ٩٢

(٢٢) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{(س - ٣)^{٢} - ١}{\sqrt{س + ٢} - ٢} =$ ....

(أ) −٦ (ب) −٨ (جـ) −٢ (د) غير موجودة.

(٢٣) $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{\sqrt{٢ س - ١} - ١}{\sqrt{٣ س + ١} - ٢} =$ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٢٤) $\lim\limits_{س \to ١} \left(\dfrac{س^{٢}}{س - ١} - \dfrac{١}{س - ١}\right) =$ ....

(أ) صفر (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) غير موجودة.

(٢٥) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س^{٣} - ٧ س + ٦}{٣ س^{٢} - ٨ س + ٤} =$ ....

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{١}{٣}$

(٢٦) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{٣ (س - ٢)^{٣} + ٢ س^{٢} - ٨}{س - ٢} =$ ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(٢٧) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{٧ + ٢ س}{\text{جتا} س} =$ ....

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١

(٢٨) 📖 $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٤}} \dfrac{\text{ظا} س}{س} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{٤}{\pi}$ (د) ليس لها وجود.

(٢٩) إذا كان : $\lim\limits_{س \to ٥} د(س) = ٤$ فإن : $\lim\limits_{س \to ٥} [د(س) - ٤] =$ ....

(أ) ٤ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ٨

(٣٠) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س - ٣}{س - ٢} =$ ....

(أ) −١ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ليس لها وجود.

(٣١) إذا كانت : $\lim\limits_{س \to م} \dfrac{٢ س^{٢} - س - ٣}{٤ س^{٢} - ٩} = \dfrac{٥}{١٢}$ فإن : م = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{-٢}{٣}$

(٣٢) إذا كانت : $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2 + 3\text{س} - 4}{\text{س} + \text{أ}} = 5$ فإن : أ = ...

(أ) -1 (ب) 1 (جـ) صفر (د) 4

(٣٣) 📖 إذا كانت : $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2 - 4\text{أ}}{\text{س} - 2}$ لها وجود فإن : أ = ...

(أ) -1 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 4

(٣٤) إذا كان : $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2 - 2\text{س} + \text{ك}}{\text{س}^2 - 9} = \text{م}$ حيث م $\in$ ع فإن : ك × م = ...

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) -3 (جـ) -2 (د) -1

(٣٥) إذا كانت : $\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2 + \text{ك}\,\text{س} + \text{م}}{\text{س}^2 - 1} = 3$ فإن : ك + م = ...

(أ) -4 (ب) -5 (جـ) -8 (د) -9

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{\text{س}\to 5}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2 - 25}{\text{س} - 5}$ «١٠»

(٢) $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2 - 8\text{س} + 15}{\text{س} - 3}$ «-2»

(٣) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2}{3\text{س}^3 - 2\text{س}^2}$ «$\frac{-1}{2}$»

(٤) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{5\text{س} - 10}{4\text{س} - 8}$ «$\frac{5}{4}$»

(٥) $\underset{\text{س}\to 4}{\text{نها}} \frac{4\text{س}^2 - 64}{\text{س} - 4}$ «٣٢»

(٦) 📖 $\underset{\text{س}\to 4}{\text{نها}} \frac{2\text{س} - 8}{\text{س}^2 - \text{س} - 12}$ «$\frac{2}{7}$»

(٧) 📖 $\underset{\text{س}\to -3}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2 + 4\text{س} + 3}{\text{س}^2 - 9}$ «$\frac{1}{3}$»

(٨) 📖 $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2 - 2\text{س}}{\text{س}^2 - \text{س} - 2}$ «$\frac{2}{3}$»

(٩) $\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2 - 3\text{س} - 4}{\text{س}^2 - \text{س} - 2}$ «$\frac{5}{3}$»

(١٠) $\underset{\text{س}\to \frac{1}{2}}{\text{نها}} \frac{2\text{س}^2 - 5\text{س} + 2}{2\text{س} - 1}$ «$\frac{-3}{2}$»

(١١) 📖 $\underset{\text{س}\to 9}{\text{نها}} \frac{9 - \text{س}}{\text{س}^2 - 81}$ «$-\frac{1}{18}$»

(١٢) 📖 $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{3\text{س}^2 + \text{س} - 4}{\text{س}^2 - 1}$ «$\frac{7}{2}$»

(١٣) $\underset{\text{س}\to \frac{3}{4}}{\text{نها}} \frac{16\text{س}^2 - 9}{8\text{س} - 6}$ «٣»

(١٤) $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \frac{2\text{س}^2 - 5\text{س} - 3}{2\text{س}^2 - 3\text{س} - 9}$ «$\frac{7}{9}$»

(١٥) $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 15}{5\text{س}^2 - 45}$ «$\frac{4}{15}$»

(١٦) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^3 - 8}{3\text{س}^2 - 12}$ «١»

٢ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{(\text{س} + 2)^2 - 4}{\text{س}^2 + \text{س}}$ «٤»

(٢) 📖 $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{(2\text{س} - 1)^2 - 1}{5\text{س}}$ «$\frac{-4}{5}$»

(٣) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٣)^{٢} - ١}{٢س^{٢} - ٣س - ٢}$ «$-\frac{٢}{٥}$»

(٤) $\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)^{٣} + ١}{٢س^{٢} + ٦س}$ «$-\frac{١}{٢}$»

(٥) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} + س^{٢} - ٢٠}{س - ٢}$ «٣٦»

(٦) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س^{٢} - ٤)^{٢}}{س - ٢}$ «صفر»

(٧) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٢س - ٢}{(س - ١)^{٥} + ٢س - ٢}$ «١»

(٨) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س + ٢}{س^{٤} - ١٦}$ «$-\frac{١}{٣٢}$»

(٩) $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \frac{س + \sqrt{س} - ١٢}{س - ٩}$ «$\frac{٧}{٦}$»

(١٠) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{س + ٢} - \frac{١}{٢}}{س}$ «$-\frac{١}{٤}$»

(١١) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ٢س^{٣} - ٦س + ١٢}{س^{٢} + س - ٦}$ «$\frac{٢}{٥}$»

(١٢) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \left(\frac{٥}{س} + \frac{س^{٢} - ٣س}{س - ٣} \right)$ «$\frac{١٤}{٣}$»

(١٣) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \left(\frac{س^{٢}}{س^{٢} - ١} - \frac{٣س + ٤}{س^{٢} - ١} \right)$ «$\frac{٥}{٢}$»

(١٤) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{س - ١} - \frac{٣}{س^{٣} - ١} \right)$ «١»

---

٣ أوجد كلاً مما يأتي :

(١) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ١٥س - ٤}{س - ٤}$ «٣٣»

(٢) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٢س + ١}{س^{٢} + س - ٢}$ «$\frac{١}{٣}$»

(٣) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ٢١س^{٢} + ٢٠س}{س - ٤}$ «١٠٨»

(٤) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{٢س^{٣} + ٣س^{٢} + ٤}{س^{٣} + ٨}$ «١»

(٥) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ٤س + ٤}{س^{٣} + س^{٢} - ٨س - ١٢}$ «$-\frac{١}{٥}$»

(٦) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٥س^{٢} + ٧س - ٣}{س^{٣} - ٢س^{٢} + س}$ «-٢»

---

٤ أوجد كلاً مما يأتي :

(١) $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩}$ «$\frac{١}{٦}$»

(٢) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$ «$\frac{١}{٤}$»

(٣) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س + ١}{\sqrt{س + ٥} - ٢}$ «٤»

(٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٣ - ٢س} - \sqrt{٣}}{س}$ «$-\frac{١}{\sqrt{٣}}$»

(٥) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢س + ٩} - ٣}{س^{٢} + س}$ «$\frac{١}{٣}$»

(٦) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣}$ «٣٠»

(٧) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}{\sqrt{٥\text{س} - ٦} - ٣}$ «٦»

(٨) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\sqrt{١ + \text{س}} - \sqrt{١ - \text{س}}}{٢\text{س}}$ «$\frac{١}{٢}$»

(٩) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\text{س} - ١}{\sqrt{٣\text{س} - ٢} - \sqrt{\text{س}}}$ «١»

(١٠) 🕮 $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ + ٨} - ٣}{\text{س} + ١}$ «$-\frac{١}{٣}$»

(١١) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{١ - \text{س}}{٢ - \sqrt{\text{س}^٢ + ٣}}$ «٢»

(١٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ١} - ٢}{\sqrt{\text{س} - ٢} - ١}$ «$\frac{١}{٢}$»

(١٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \dfrac{\sqrt{٢٤ - ٥\text{س}} - ٢}{٣ - \sqrt{\text{س} + ٥}}$ «٧,٥»

(١٤) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س} - ٣}{\text{س} - \sqrt{\text{س} + ٦}}$ «$\frac{٦}{٥}$»

---

٥ 🕮 إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{د}(\text{س}) - ٥}{\text{س} - ٢} = ١$ **فأوجد :** $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س})$ «٥»

---

٦ 🕮 إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{د}(\text{س})}{\text{س}^٢} = ٥$ **فأوجد :**

(١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د}(\text{س})$ (٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{د}(\text{س})}{\text{س}}$ «صفر ، صفر»

---

٧ إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{\text{س}^٢ - (\text{أ} - ١)\text{س} - \text{أ}}{\text{س} + ١} = ٤$ **أوجد :** قيمة أ «−٥»

---

٨ إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\text{س}^٢ + \text{أ}\text{س} + \text{ب}}{\text{س} - ١} = ٥$ **أوجد :** قيمة كل من أ ، ب «٣ ، −٤»

---

٩ 🕮 **الربط بالتجارة :** وجدت شركة أنها لو أنفقت س من الجنيهات للدعاية لمنتجها ، فإن ربحها يعطى بالعلاقة $\text{د}(\text{س}) = ٢,٠ \,\text{س}^٢ + ٤٠\,\text{س} + ١٥٠$ ، أوجد مقدار ربح الشركة عندما يقترب إنفاقها على الدعاية من ١٠٠ جنيه. «٦١٥٠ جنيهًا»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كانت د دالة تحقق أن : $\text{س}\left(\text{د}(\text{س}) + ١\right) = \text{د}(\text{س}) + \text{س}^٢$

فإن : $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{د}(\text{س}) = $ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(٢) إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\sqrt{\text{م}\text{س} + \text{ك}} - ٣}{\text{س}} = ٢$ فإن : $\dfrac{\text{م}}{\text{ك}} = $ ....

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) $\frac{٤}{٣}$

③ إذا كانت : $\underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهـا}} \left(٢\,\text{د}(\text{س}) - ٥\,\text{هـ}(\text{س})\right) = ١٠$

، $\underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهـا}} \left(\text{د}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\right) = ٦$ فإن : $\underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})} = $ ....

(أ) $\frac{٤٠}{٧}$ (ب) $\frac{٢}{٧}$ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

④ إذا كانت : ى(س) دالة وكانت $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{ى}(\text{س}) - ٨}{\text{س} - ٢} = ٧$

فإن : $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^٢ - \text{ى}(\text{س})}{\text{س} - ٢} = $ ....

(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٥

---

٢ أوجد كلاً مما يأتي :

① $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ٥}{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٥}\right)^٢$ «$\frac{٩}{٤}$»

② $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - \text{س}}}$ «٢»

③ $\underset{\text{س} \to \sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - ٢}{\text{س}^٢ + \sqrt{٢}\,\text{س} - ٤}$ «$\frac{٢}{٣}$»

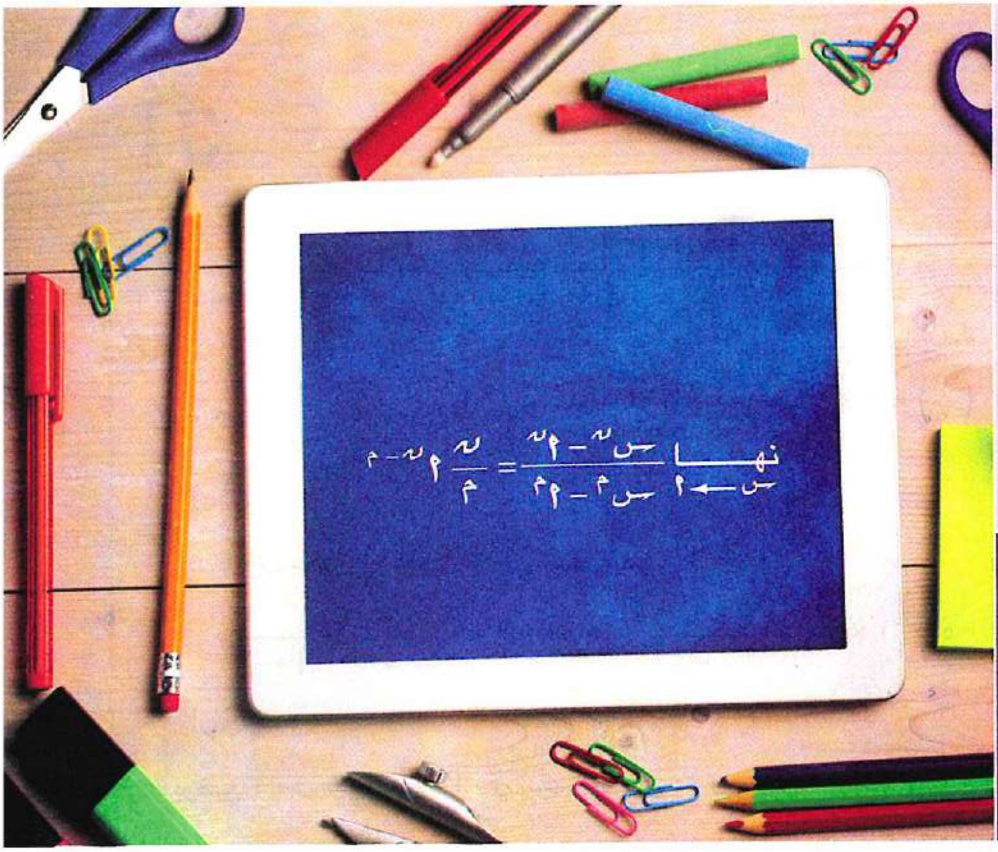
④ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٥\text{س}^{-٣} + ٢\text{س}^{-١} - ٧}{٣\text{س}^{-٢} + \text{س}^{-٣} - ٤}$ «$\frac{١٧}{٩}$»

⑤ $\underset{\text{طاس} \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا}^٢\text{س} - ٢\,\text{طاس} - ٣}{\text{طا}^٢\text{س} - ٤\,\text{طاس} + ٣}$ «٢»

⑥ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}^٢\text{س} - ٥\,\text{جتاس} + ٤}{\text{جا}^٢\text{س}}$ «$\frac{٣}{٢}$»

⑦ $\underset{(\text{س} - ٤) \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢)(\sqrt[٣]{\text{س}^٢} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤)}{\text{س}^٢ - ٦٤}$ «$\frac{١}{١٦}$»

⑧ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{\sqrt{\text{س}^٢ + ٣} + ٢}{\text{س}^٢ - \text{س}} - \frac{٢}{\sqrt{\text{س}^٢ + ٣} - ٢}\right)$ «-٢»



الدرس 3

نظرية (٤) «القانون»

نظرية ٤

$$\underset{س \to أ}{\text{نها}} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن أ^{ن-١} \text{ لكل } ن \in ح - \{٠\}$$

ولاستخدام هذه النظرية يراعى الآتى :

١ أن تكون الدالة على الصورة (أو يمكن وضعها على الصورة) $\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ}$

٢ أن يكون المطلوب إيجاد النهاية عندما $س \to أ$

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - ٨١}{س - ٣}$

٢ $\underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نها}} \frac{س^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{س - \sqrt{٥}}$

٣ $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{س^{٥} + ٣٢}{س^{٢} + ٥ س + ٦}$

٤ $\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نها}} \frac{٣٢ س^{٥} - ١}{٢ س - ١}$

الحل

١ $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - ٨١}{س - ٣} = \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - ٣^{٤}}{س - ٣} = ٤ \times ٣^{٣} = ١٠٨$

لاحظ أن : **التعويض المباشر يعطى** $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

٢ $\underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نها}} \frac{س^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{س - \sqrt{٥}} = \underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نها}} \frac{س^{٧} - (\sqrt{٥})^{٧}}{س - \sqrt{٥}} = ٧ \times (\sqrt{٥})^{٦} = ٨٧٥$

٣ $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{س^{٥} - ٣٢}{(س + ٢)(س + ٣)} = \underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{س^{٥} - (-٣٢)}{س - (-٢)} \times \underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{١}{س + ٣}$

$= \underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{س^{٥} - (-٢)^{٥}}{س - (-٢)} \times ١ = ٥ \times (-٢)^{٤} = ٨٠$

٤ $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٣٢ \text{س}^{٥} - ١}{٢ \text{س} - ١} = \underset{\text{س} \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٣٢ \left[\text{س}^{٥} - \frac{١}{٣٢}\right]}{٢ \left[\text{س} - \frac{١}{٢}\right]} = ١٦ \times \underset{\text{س} \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥}}{\text{س} - \frac{١}{٢}}$

$$= ١٦ \underset{\text{س} \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥}}{\text{س} - \frac{١}{٢}} = ١٦ \times ٥ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} = ٥$$

حل آخر :

عندما $\text{س} \leftarrow \frac{١}{٢}$ فإن : $٢ \text{س} \leftarrow ١$

$$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٣٢ \text{س}^{٥} - ١}{٢ \text{س} - ١} = \underset{٢\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{(٢ \text{س})^{٥} - (١)^{٥}}{٢ \text{س} - ١} = ٥ \times ١^{٤} = ٥$$

حل ثالث :

بوضع $٢ \text{س} = \text{ص}$ فعندما $\text{س} \leftarrow \frac{١}{٢}$ فإن : $\text{ص} \leftarrow ١$

$$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٣٢ \text{س}^{٥} - ١}{٢ \text{س} - ١} = \underset{\text{س} \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{(٢ \text{س})^{٥} - (١)^{٥}}{(٢ \text{س}) - ١}$$

$$= \underset{\text{ص} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{(\text{ص})^{٥} - (١)^{٥}}{\text{ص} - ١} = ٥ \times ١^{٤} = ٥$$

نتيجتان

١ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + \text{م})^{\text{ن}} - \text{م}^{\text{ن}}}{\text{س}} = \text{ن} \, \text{م}^{\text{ن} - ١}$

٢ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{م}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{م}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{م}^{\text{م}}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}} \text{م}^{\text{ن} - \text{م}}$ حيث $\text{ن} \in \text{ح} - \{٠\}$ ، $\text{م} \in \text{ح} - \{٠\}$ ، $\text{م} \in \text{ح} - \{٠\}$

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} - ١}{\text{س}^{٣} - ١}$

٢ $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} + ٢٤٣}{\text{س}^{٤} - ٨١}$

٣ $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٤} - ٢٧ \text{س}}{٣ \text{س}^{٤} - ٢٤٣}$

٤ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + ١)^{٦} - ٦٤}{(\text{س} + ١)^{٣} - ٨}$

الحـــل

١ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} - ١}{\text{س}^{٣} - ١} = \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} - ١^{٥}}{\text{س}^{٣} - ١^{٣}} = \frac{٥}{٣} \times ١^{٥ - ٣} = \frac{٥}{٣}$

٢ $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} + ٢٤٣}{\text{س}^{٤} - ٨١} = \underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} - (-٣)^{٥}}{\text{س}^{٤} - (-٣)^{٤}} = \frac{٥}{٤} \times (-٣)^{٥ - ٤} = -\frac{١٥}{٤}$

٣ $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٤ - ٢٧\text{س}}{٣\text{س}^٤ - ٢٤٣} = \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}(\text{س}^٣ - ٢٧)}{٣(\text{س}^٤ - ٨١)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}}{٣} \times \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٣ - ٣^٣}{\text{س}^٤ - ٣^٤}$

$= \frac{٣}{٣} \times \frac{٣}{٤} \times ٣^{٣-٤} = \frac{١}{٤}$

٤ $\because \text{س} \leftarrow ١ \qquad \therefore \text{س} + ١ \leftarrow ٢$

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} + ١)^٦ - ٦٤}{(\text{س} + ١)^٣ - ٨} = \underset{\text{س}+١ \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} + ١)^٦ - ٢^٦}{(\text{س} + ١)^٣ - ٢^٣} = \frac{٦}{٣} \times ٢^{٦-٣} = ١٦$

حل آخر :

بتحليل البسط كفرق بين مربعين :

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} + ١)^٦ - ٦٤}{(\text{س} + ١)^٣ - ٨} = \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{[(\text{س} + ١)^٣ - ٨][(\text{س} + ١)^٣ + ٨]}{(\text{س} + ١)^٣ - ٨}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left((\text{س} + ١)^٣ + ٨\right) = (١ + ١)^٣ + ٨ = ١٦$

مثال ٣

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} + ٥)^٤ - ٦٢٥}{\text{س}}$ ٢ $\underset{\text{س} \leftarrow ٦}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} - ٥)^٧ - ١}{\text{س} - ٦}$ ٣ $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{(\text{أ} + ٢\text{هـ})^٦ - \text{أ}^٦}{٥\text{هـ}}$

الحـــل

١ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} + ٥)^٤ - ٦٢٥}{\text{س}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} + ٥)^٤ - ٥^٤}{\text{س}} = ٤ \times ٥^٣ = ٥٠٠$

٢ $\underset{\text{س} \leftarrow ٦}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} - ٥)^٧ - ١}{\text{س} - ٦} = \underset{\text{س}-٥ \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} - ٥)^٧ - ١^٧}{(\text{س} - ٥) - ١} = ٧ \times ١^٦ = ٧$

٣ $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{(\text{أ} + ٢\text{هـ})^٦ - \text{أ}^٦}{٥\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\frac{٢}{٥}[(\text{أ} + ٢\text{هـ})^٦ - \text{أ}^٦]}{\frac{٢}{٥} \times ٥\text{هـ}} = \underset{٢\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\frac{٢}{٥}[(\text{أ} + ٢\text{هـ})^٦ - \text{أ}^٦]}{٢\text{هـ}}$

$= \frac{٢}{٥} \times ٦ \times \text{أ}^٥ = \frac{١٢}{٥}\text{أ}^٥$

ملاحظتان

- $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} = \text{أ}^{\frac{١}{\text{ن}}}$ حيث $\text{ن} \in \text{ص}^+ - \{١\}$ ، $\text{أ} \in \text{ح}^+$

فمثلاً : $\sqrt{\text{س}} = \text{س}^{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt[٣]{٨} = ٨^{\frac{١}{٣}} = ٢$

- $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}^\text{م}} = \text{أ}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ حيث $\text{ن} \in \text{ص}^+ - \{١\}$ ، $\text{أ} \in \text{ح}^+$ ، $\text{م} \in \text{ص}$

فمثلاً : $\sqrt[٤]{\text{س}^٥} = \text{س}^{\frac{٥}{٤}}$ ، $\sqrt[٥]{٦٤} = \sqrt[٥]{٢^٦} = ٢^{\frac{٦}{٥}}$

مثال ٤

أوجد كلاً مما يأتى :

[١] $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩}$

[٢] $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٥]{س} - ١}{\sqrt[٣]{س} - ١}$

[٣] $\underset{س \to ١٦}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٤]{س^{٥}} - ٣٢}{\sqrt{س^{٣}} - ٦٤}$

الحل

[١] $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} = \underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{\frac{١}{٢}} - ٩^{\frac{١}{٢}}}{س - ٩} = \dfrac{١}{٢} \times ٩^{\frac{١}{٢} - ١} = \dfrac{١}{٢} \times ٩^{-\frac{١}{٢}} = \dfrac{١}{٢\sqrt{٩}} = \dfrac{١}{٦}$

حل آخر :

بتحليل المقام كفرق بين مربعين :

$\therefore \underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} = \underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س} - ٣}{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)} = \underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{(\sqrt{س} + ٣)}$

$= \dfrac{١}{\sqrt{٩} + ٣} = \dfrac{١}{٦}$

[٢] $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٥]{س} - ١}{\sqrt[٣]{س} - ١} = \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{\frac{١}{٥}} - ١^{\frac{١}{٥}}}{س^{\frac{١}{٣}} - ١^{\frac{١}{٣}}} = \dfrac{\frac{١}{٥}}{\frac{١}{٣}} \times ١^{\frac{١}{٥} - \frac{١}{٣}} = \dfrac{٣}{٥}$

[٣] $\underset{س \to ١٦}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٤]{س^{٥}} - ٣٢}{\sqrt{س^{٣}} - ٦٤} = \underset{س \to ١٦}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{\frac{٥}{٤}} - (١٦)^{\frac{٥}{٤}}}{س^{\frac{٣}{٢}} - (١٦)^{\frac{٣}{٢}}}$

$= \dfrac{\frac{٥}{٤}}{\frac{٣}{٢}} \times ١٦^{(\frac{٥}{٤} - \frac{٣}{٢})}$

$= \dfrac{٥}{٦} \times ١٦^{-\frac{١}{٤}} = \dfrac{٥}{١٢}$

لاحظ أن

$١٦^{\frac{٥}{٤}} = (٢^{٤})^{\frac{٥}{٤}} = ٢^{٤ \times \frac{٥}{٤}}$

$= ٢^{٥} = ٣٢$

أى أن $٣٢ = ١٦^{\frac{٥}{٤}}$

وكذلك : $٦٤ = ١٦^{\frac{٣}{٢}}$

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتى :

[١] $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} + س^{٢} - ٣٦}{س^{٤} - ٨١}$

[٢] $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٤]{٢س + ١٤} - ٢}{س - ١}$

[٣] $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{٣س + ٢} - ٢}{\sqrt[٥]{س - ٣} + ١}$

الحـــل

١

$$\lim_{\text{س}\to 3}\frac{\text{س}^3+\text{س}^2-36}{\text{س}^4-81}=\lim_{\text{س}\to 3}\frac{\text{س}^3-27+\text{س}^2-9}{\text{س}^4-81}$$

$$=\lim_{\text{س}\to 3}\frac{\text{س}^3-3^3}{\text{س}^4-3^4}+\lim_{\text{س}\to 3}\frac{\text{س}^2-3^2}{\text{س}^4-3^4}$$

$$=\frac{3}{4}\times 3^{3-4}+\frac{2}{4}\times 3^{2-4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{18}=\frac{11}{36}$$

٢

$$\lim_{\text{س}\to 1}\frac{\sqrt[4]{2\text{س}+14}-2}{\text{س}-1}=\lim_{\text{س}\to 1}\frac{(2\text{س}+14)^{\frac{1}{4}}-(16)^{\frac{1}{4}}}{\text{س}-1}\times\frac{2}{2}$$

$$=2\lim_{2\text{س}+14\to 16}\frac{(2\text{س}+14)^{\frac{1}{4}}-(16)^{\frac{1}{4}}}{(2\text{س}+14)-16}$$

$$=2\times\frac{1}{4}(16)^{\frac{1}{4}-1}=\frac{1}{16}$$

٣

$$\lim_{\text{س}\to 2}\frac{\sqrt[3]{3\text{س}+2}-2}{\sqrt[5]{\text{س}-3}+1}=\lim_{\text{س}\to 2}\frac{(3\text{س}+2)^{\frac{1}{3}}-8^{\frac{1}{3}}}{3\text{س}+2-8}\times\frac{3\text{س}+2-8}{(\text{س}-3)^{\frac{1}{5}}+1}$$

$$=\lim_{3\text{س}+2\to 8}\frac{(3\text{س}+2)^{\frac{1}{3}}-8^{\frac{1}{3}}}{(3\text{س}+2)-8}\times\lim_{\text{س}\to 2}\frac{3(\text{س}-2)}{(\text{س}-3)^{\frac{1}{5}}+1}$$

$$=\frac{1}{3}\times 8^{\frac{1}{3}-1}\times 3\lim_{\text{س}\to 2}\frac{\text{س}-2}{(\text{س}-3)^{\frac{1}{5}}-(-1)^{\frac{1}{5}}}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{\text{س}-3\to -1}\frac{(\text{س}-3)-(-1)}{(\text{س}-3)^{\frac{1}{5}}-(-1)^{\frac{1}{5}}}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{\frac{1}{5}}\times(-1)^{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}$$

تمـارين 14

على نظرية (٤) «القانون»

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي | ● فهـم | ○ تطبيق | مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \dfrac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\dfrac{\text{م}}{\text{ن}}$ (ب) $\dfrac{\text{م}}{\text{ن}} (\text{أ})^{\text{م} - \text{ن}}$ (ج) $\dfrac{\text{ن}}{\text{م}} (\text{أ})^{\text{م} - \text{ن}}$ (د) $\dfrac{\text{ن}}{\text{م}} (\text{أ})^{\text{ن} - \text{م}}$

② $\lim\limits_{\text{ص} \to ٢} \dfrac{\text{ص}^{٥} - ٣٢}{\text{ص} - ٢} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $٣١ \text{ ص}^{٤}$ (ب) ٣٢×٢^{٤} (ج) ٦٤ (د) ٥×٢^{٤}

③ $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\text{س}^{١٠} - ١}{\text{س} - ١} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٩ (د) ١٠

④ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^{-١} - ٢^{-١}}{\text{س}^{-٤} - ٢^{-٤}} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ٢ (ب) $\dfrac{١}{٢}$ (ج) $\dfrac{١}{٣٢}$ (د) ٨

⑤ $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{\text{س}^{٥} + ١}{\text{س} + ١} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ٥ (ب) ٤ (ج) -٥ (د) -٤

⑥ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^{٥} - ٣٢}{\text{س}^{٣} - ٨} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ٤ (ب) $\dfrac{٥}{٣}$ (ج) صفر (د) $٦\dfrac{٢}{٣}$

⑦ $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{١}{٢}} \dfrac{٤ \text{س}^{٢} - ١}{٣٢ \text{س}^{٥} - ١} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\dfrac{٢}{٥}$ (ب) $\dfrac{٥}{٢}$ (ج) $\dfrac{٢}{٩}$ (د) $\dfrac{١}{٨}$

⑧ $\lim\limits_{\text{س} \to -٢} \dfrac{\text{س}^{٧} + ١٢٨}{\text{س}^{٤} - ١٦} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ٩ (ب) -٩ (ج) -١٤ (د) ١٤

⑨ $\lim\limits_{\text{س} \to ١٦} \dfrac{\sqrt[٤]{\text{س}^{٥}} - ٣٢}{\text{س} - ١٦} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ٥ (ب) $\dfrac{٥}{٢}$ (ج) $\dfrac{٥}{٤}$ (د) $\dfrac{٥}{٨}$

(١٠) $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + \text{هـ})^{٧} - \text{س}^{٧}}{\text{هـ}}$ = ...

(أ) $\text{س}^{٧}$ (ب) $٧\,\text{س}^{٦}$ (جـ) صفر (د) ١

(١١) $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢ - ٣\,\text{هـ})^{٧} - ١٢٨}{٤\,\text{هـ}}$ = ...

(أ) ٣٣٦ (ب) −٣٣٦ (جـ) ٤٤٨ (د) −٤٤٨

(١٢) $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(٣\,\text{هـ} - ١)^{٥} + ١}{٥\,\text{هـ}}$ = ...

(أ) −٣ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) ٣ (د) ٥

(١٣) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٦} - ٦٤}{\text{س} - ٢}$ = ...

(أ) $٦\,(٢)^{٥}$ (ب) ١٢٨ (جـ) $٦٤\,(٢)^{٥}$ (د) ٦٣

(١٤) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\frac{١٣}{٢}} - \text{س}^{\frac{١}{٢}}}{\text{س}^{\frac{٧}{٢}} - \text{س}^{\frac{١}{٢}}}$ = ...

(أ) $\frac{١٣}{٧}$ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) س

(١٥) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س}^{-٢}}{\text{س} - \text{س}^{-١}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) −٢ .

(١٦) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ٢)^{٥} - ٣٢}{\text{س}}$ = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٦٤ (جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

(١٧) $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} - ٣)^{٧} - ١٢٨}{\text{س} - ٥}$ = ...

(أ) ٧ (ب) ٢٨ (جـ) ٦٤ (د) ٤٤٨

(١٨) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ١)^{٤} - ٨١}{\text{س} - ٢}$ = ...

(أ) ١٨ (ب) ٨١ (جـ) −١٠٨ (د) ١٠٨

(١٩) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{أ}} - \text{س}^{\text{جـ}}}{\text{س}^{\text{أ}} - \text{س}^{\text{د}}}$ = ...

(أ) $\dfrac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{أ} + \text{د}}$ (ب) $\text{أ}\,\text{س}^{\text{جـ} - \text{د}}$ (جـ) $\dfrac{\text{أ} - \text{جـ}}{\text{أ} - \text{د}}$ (د) $\dfrac{\text{جـ}}{\text{د}}$

(٢٠) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \sqrt[\text{ن}]{\text{س}}}{١ - \sqrt[\text{م}]{\text{س}}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\dfrac{\text{ن}}{\text{م}}$ (جـ) −١ (د) $\dfrac{\text{م}}{\text{ن}}$

(٢١) $\lim_{س \to ٩} \frac{٣ - \sqrt{س}}{٢٧ - \sqrt{س^٣}} = \dots\dots$

(أ) $\frac{١}{٩}$ (ب) $\frac{١}{٢٧}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{-١}{٢٧}$

(٢٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{(س + ٣)^٥ - ١}{س^٢ - ٤} = \dots\dots$

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $-\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $-\frac{١}{٤}$

(٢٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٣٢}{س^٢ + ٣س - ١٠} = \dots\dots$

(أ) ٨٠ (ب) $\frac{٨٠}{٧}$ (جـ) $\frac{٧}{٨٠}$ (د) $\frac{١}{٨٠}$

(٢٤) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٥]{س} + ٢\sqrt{س} - ٣}{س - ١} = \dots\dots$

(أ) $\frac{٦}{٥}$ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٣

(٢٥) إذا كان : $د(س) = س^٥$ ، $ر(س) = س^٢ - ٤$

فإن : $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٣٢}{ر(س)} = \dots\dots$

(أ) −٢٠ (ب) ٢٠ (جـ) ± ٢٠ (د) ٣٢

(٢٦) إذا كان : $\lim_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م}$ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ن (جـ) م (د) $\frac{م}{ن}$

(٢٧) إذا كانت : $\lim_{س \to ٢} \frac{(س)^ن - (٢)^ن}{س - ٢} = ٣٢$ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٢٨) إذا كانت : $\lim_{س \to أ} \frac{س^٨ - أ^٨}{س^٦ - أ^٦} = ٤٨$ فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ± ٤ (د) ± ٦

(٢٩) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt[٣]{س + ٣} - ٢}{س - ٥} = \dots\dots$

(أ) $\frac{١}{١٢}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) ١

(٣٠) $\lim_{س \to ٠} \frac{(١ + س)^{\frac{٥}{٢}} - ١}{س} = \dots\dots$

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) ليس لها وجود.

(٣١) $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)^٦ - ٦٤}{س^٢ + ١٦س} = \dots\dots$

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٦٤

(٣٢) $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}^{6} - \text{س}^{7} + \text{س}^{8} - \text{س}^{9}}{\text{س} - 1} \right) = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ٣٠ (ب) −٢ (جـ) ٣ (د) ٩

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{3} - 8}{\text{س} - 2}$ «١٢»

(٢) 📖 $\underset{\text{س} \to -5}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{4} - 625}{\text{س} + 5}$ «−٥٠٠»

(٣) $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{5} - \text{أ}^{5}}{\text{س} - \text{أ}}$ «٥ أ٤»

(٤) 📖 $\underset{\text{س} \to -3}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{4} - 81}{\text{س}^{5} + 243}$ «$-\frac{4}{15}$»

(٥) $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{6} - 64}{\text{س}^{7} - 128}$ «$\frac{3}{7}$»

(٦) $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \frac{2\,\text{س}^{6} - 128}{\text{س}^{2} - 4}$ «٩٦»

(٧) $\underset{\text{س} \to -2}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{6} - 64}{3\,\text{س} + 6}$ «−٦٤»

(٨) $\underset{\text{س} \to -1}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{10} + \text{س}}{\text{س}^{7} - \text{س}}$ «$\frac{-3}{2}$»

(٩) $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهـا}} \frac{1 - \text{س}^{9}}{\text{س}^{7} - 1}$ «$\frac{-9}{7}$»

(١٠) $\underset{\text{س} \to -\frac{1}{2}}{\text{نهـا}} \frac{32\,\text{س}^{5} + 1}{64\,\text{س}^{6} - 1}$ «$\frac{-5}{6}$»

(١١) $\underset{\text{س} \to \frac{-2}{3}}{\text{نهـا}} \frac{243\,\text{س}^{5} + 32}{27\,\text{س}^{3} + 8}$ «$\frac{20}{3}$»

(١٢) $\underset{2\text{س} \to 3}{\text{نهـا}} \frac{16\,\text{س}^{5} - 81\,\text{س}}{2\,\text{س}^{3} - 3\,\text{س}^{2}}$ «٧٢»

---

٢ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-7} - (2)^{-7}}{\text{س} - 2}$ «$\frac{-7}{256}$»

(٢) $\underset{\text{س} \to -1}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-4} - 1}{\text{س}^{-18} - 1}$ «$\frac{2}{9}$»

(٣) $\underset{\text{س} \to \sqrt{2}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{7} - 8\sqrt{2}}{\text{س}^{2} - 2}$ «$14\sqrt{2}$»

(٤) $\underset{\text{س} \to -\sqrt{2}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{8} - 16}{\text{س}^{5} + 4\sqrt{2}}$ «$\frac{-16\sqrt{2}}{5}$»

(٥) $\underset{\text{س} \to \frac{-3}{\sqrt{2}}}{\text{نهـا}} \frac{8\,\text{س}^{6} - 729}{\sqrt{2}\,\text{س} + 3}$ «−١٤٥٨»

(٦) $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{6}}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}^{3}\text{س} - \frac{1}{8}}{\text{حا}\,\text{س} - \frac{1}{2}}$ «$\frac{3}{4}$»

(٧) $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-5} - \frac{1}{32}}{\text{س}^{-7} - \frac{1}{128}}$ «$\frac{20}{7}$»

(٨) $\underset{\text{س} \to -2}{\text{نهـا}} \frac{8\,\text{س}^{-3} + 1}{\text{س}^{-8} - \frac{1}{256}}$ «−٩٦»

(٩) 📖 $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-8} - (16)^{-2}}{\text{س} - 2}$ «$\frac{-1}{64}$»

(١٠) $\underset{\text{س} \to 4}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\frac{7}{2}} - 128}{\text{س}^{\frac{5}{2}} - 32}$ «$\frac{28}{5}$»

(١١) 📖 $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[7]{\text{س}} - 1}{\text{س} - 1}$ «$\frac{1}{7}$»

(١٢) $\underset{\text{س} \to 4}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}^{3}} - 8}{\text{س}^{2} - 16}$ «$\frac{3}{8}$»

(١٣) 📖 $\underset{\text{س} \to 16}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[4]{\text{س}^{7}} - 128}{\text{س} - 16}$ «١٤»

(١٤) $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}\sqrt[5]{\text{س}} - 1}{\text{س}^{2} - 1}$ «$\frac{3}{5}$»

(١٥) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{\frac{٢١}{٢}} - س^{\frac{١}{٢}}}{س^{\frac{١٤}{٣}} - س^{\frac{٢}{٣}}}$ «$\frac{٥}{٢}$»

(١٦) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٢} س^{٤} - ١٢٨}{س - ٤}$ «١٢٨»

(١٧) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - \frac{١}{س^{٤}}}{س^{٣} - \frac{١}{س^{٣}}}$ «$\frac{-٤}{٣}$»

(١٨) $\underset{٢س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٥ س^{٤} - \frac{٥}{١٦}}{٢ س - ١}$ «$\frac{٥}{٤}$»

(١٩) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{١٠} - ١٠٢٤}{س^{٢} - ٣ س + ٢}$ «٥١٢٠»

(٢٠) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{١٧} - ١}{٣ س^{٢} + ٢ س - ٥}$ «$\frac{١٧}{٨}$»

---

٣ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ + س)^{١٠} - ١}{(١ + س)^{٧} - ١}$ «$\frac{١٠}{٧}$»

(٢) 📖 $\underset{س \to ٦}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٥)^{٧} - ١}{س - ٦}$ «٧»

(٣) 📖 $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٣)^{٥} - ١}{س + ٢}$ «٥»

(٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)^{٥} - ٣٢}{س}$ «٨٠»

(٥) 📖 $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(٣ + هـ)^{٤} - ٨١}{٦ هـ}$ «١٨»

(٦) $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ + ٤ هـ)^{٨} - ١}{هـ}$ «٣٢»

(٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ - ٢ س)^{٥} - ١}{٥ س}$ «-٢»

(٨) $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٣ هـ)^{٥} - س^{٥}}{هـ}$ «$١٥ س^{٤}$»

(٩) 📖 $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٢ هـ)^{١٧} - س^{١٧}}{٥١ هـ}$ «$-\frac{٢}{٣} س^{١٦}$»

(١٠) $\underset{س + ١ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(٣ س + ٢)^{٩} + ١}{س + ١}$ «٢٧»

(١١) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{١ + ٣ س} - ١}{٢ س}$ «$\frac{١}{٢}$»

(١٢) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{٢٦ + س} - ٣}{س - ١}$ «$\frac{١}{٢٧}$»

(١٣) 📖 $\underset{س \to ٧}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٥]{س + ٢٥} - ٢}{س - ٧}$ «$\frac{١}{٨٠}$»

(١٤) 📖 $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٤)^{٥} + ٣٢}{س - ٢}$ «٨٠»

(١٥) 📖 $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٣)^{٥} - ١}{س^{٢} - ٤}$ «$-\frac{٥}{٤}$»

(١٦) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{١٩} + س^{٨} - ٢}{س - ١}$ «٢٧»

(١٧) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٧} + س^{٩} + ٢}{س + ١}$ «١٦»

(١٨) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س} + \sqrt[٣]{س} - ٢}{س - ١}$ «$\frac{٥}{٦}$»

(١٩) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} + س^{٢} - ٣٦}{س - ٢}$ «٨٤»

(٢٠) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٣)^{٥} - ٣٢}{س^{٢} - ٥ س}$ «١٦»

(٢١) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(٢ س - ٣)^{٥} + ٢٤٣}{٣ س (س - ٢)}$ «-١٣٥»

٤ **أوجد قيمة أ إذا كانت :** $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{١٢} - أ^{١٢}}{س^{١٠} - أ^{١٠}} = ٣٠$ «± ٥»

---

٥ **أوجد قيمة ك إذا كانت :** $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{١٥} + ١}{س + ١} = \underset{س \leftarrow ك}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٥} - ك^{٥}}{س^{٣} - ك^{٣}}$ «± ٣»

---

٦ إذا كانت : $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{ن} - ٦٤}{س - ٢} = ل$ **أوجد قيمتي : ن ، ل** «٦ ، ١٩٢»

---

٧ إذا كانت : $د(س) = \dfrac{١}{س^{٤}}$ **أوجد :** $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{د(س) - د(٢)}{س - ٢}$ «$\dfrac{-١}{٨}$»

---

٨ **أوجد كلاً مما يأتى :**

(١) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{س^{٣} - ٨}{س^{٥} - ٣٢} + \dfrac{س^{٤} - ١٦}{س^{٧} - ١٢٨} \right)$ «$\dfrac{٣١}{١٤٠}$»

(٢) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{س^{٥} - ٢٤٣}{س^{٢} - ٤} \times \dfrac{س - ٢}{س - ٣} \right)$ «٨١»

(٣) $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{س^{٤} - ٨١}{س^{٣} + ٢٧} \right)^{٣}$ «-٦٤»

(٤) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(س^{٢٥} - ١)^{٢}}{س^{٢} - ٢س + ١}$ «٦٢٥»

(٥) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{١٢} - ٢س^{٦} + ١}{س^{٢} - ٢س + ١}$ «٣٦»

(٦) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left[\dfrac{(س^{٤} - ١٦)^{٤}}{(س^{٣} - ٨)^{٣}} \times \dfrac{١}{س^{٨} - ٢٥٦} \right]$ «$\dfrac{١٦}{٢٧}$»

(٧) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(\sqrt[٣]{س} - ١)(\sqrt[٥]{س^{٢}} - ١)}{(س - ١)^{٢}}$ «$\dfrac{٢}{١٥}$»

(٨) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(١ + س)^{١٥} - (١ - س)^{١٥}}{(١ + س)^{٩} - (١ - س)^{٩}}$ «$\dfrac{٥}{٣}$»

(٩) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{١٢} - ١}{س^{٣} - س^{٢} + س - ١}$ «٦»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

أوجد كلاً مما يأتي :

(١) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{س^{٣}} - \sqrt{س}}{\sqrt{س^{١١}} - \sqrt{س}}$ «$\frac{١}{٥}$»

(٢) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(١ + ٥ س)^{١٠} - ١}{(١ + ٧ س)^{٨} - ١}$ «$\frac{٢٥}{٢٨}$»

(٣) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{س + ٨} - ٢}{(س + ٣)^{٥} - ٢٤٣}$ «$\frac{١}{٤٨٦٠}$»

(٤) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{٢ س - ٣} - ١}{\sqrt[٥]{٣ س - ٥} - ١}$ «$\frac{١٠}{٩}$»

(٥) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س^{٢} - ٣)^{٥} - ١}{س - ٢}$ «٢٠»

(٦) $\lim\limits_{س \to -١} \frac{(٤ س + ٥)^{٦} + ٧ س + ٦}{س + ١}$ «٣١»

(٧) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{(٥ س - ٤)^{١٠} + ٤ س - ٥}{س - ١}$ «٥٤»

(٨) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٥]{س + ١} - \sqrt[٤]{س + ١}}{س}$ «$\frac{-١}{٢٠}$»

(٩) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٥]{س + ١} - (س + ١)^{٧}}{س}$ «$-٦\frac{٤}{٥}$»

(١٠) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{٥\sqrt{س - ١} + \sqrt[٣]{س - ١} - ٦}{س - ٢}$ «$\frac{١٧}{٦}$»

(١١) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{٧} + س^{٩} + س^{١١} - ٣}{س - ١}$ «٢٧»

(١٢) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{٤} (س - ١)^{٦} - ١٦}{س - ٢}$ «١٢٨»

(١٣) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{٥} \sqrt[٣]{س + ٦} - ٦٤}{س - ٢}$ «$١٦٢\frac{٢}{٣}$»



الدرس 4

نهاية الدالة عند اللا نهاية

المقصود ببحث نهاية الدالة عند اللانهاية هو التعرف على سلوك هذه الدالة عندما تكبر س (المتغير المستقل) كبرًا بلا حد ، فإذا كانت د (س) تقترب من عدد حقيقى معين (ل مثلاً) كلما كبرت س فإننا نقول إن الدالة د لها نهاية ل عندما تقترب س من اللانهاية ونكتب $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{د(س)} = \text{ل}$

مثال توضيحى ١

إذا كانت د : د (س) = $\frac{\text{٢س + ١}}{\text{س}}$ وأردنا دراسة سلوك الدالة د عندما تكبر س بدون حد أى عندما تقترب س من اللانهاية فإننا نفرض أن س تأخذ القيم ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ ، ... إلخ فنحصل على الجدول الآتى :

س	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	....
د (س) = $\frac{\text{٢س + ١}}{\text{س}}$	٣	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	....

ومن هذا الجدول نلاحظ أنه عندما تأخذ س قيمًا متدرجة فى الكبر فإن د (س) تقترب أكثر وأكثر من القيمة ٢ وبلغة النهايات فإننا نقول إن د (س) ← ٢ عندما س ← ∞

ونكتب $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{د(س)} = ٢$

ونلاحظ فى هذا المثال :

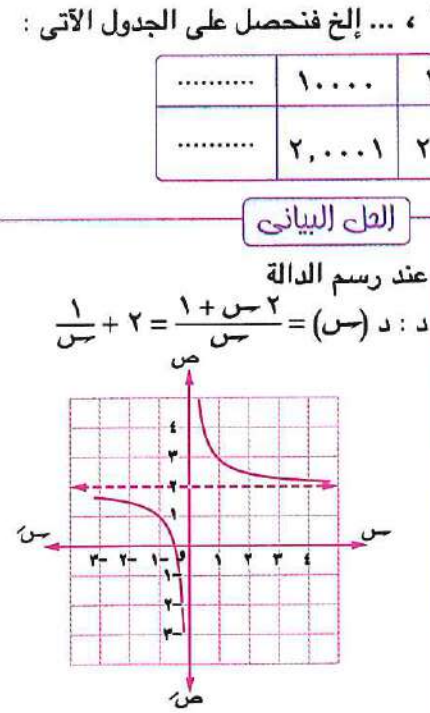
أننا لا نستطيع الحصول على نفس النتيجة عن طريق التعويض المباشر عن س = ∞

حيث سنحصل على $\frac{\infty}{\infty}$ (كمية غير معينة).

الحل البيانى

عند رسم الدالة

د : د (س) = $\frac{\text{٢س + ١}}{\text{س}} = ٢ + \frac{١}{\text{س}}$



نلاحظ من الرسم أنه عندما س ← ∞

فإن د (س) ← ٢

مثال توضيحى ٢

إذا أردنا دراسة سلوك الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ عندما تأخذ س قيمًا متدرجة فى الكبر فإننا نكون الجدول التالى :

س	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	....
د (س) = $\frac{١}{\text{س}}$	١	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	....

ونلاحظ من هذا الجدول أن :

د (س) ⟵ صفر

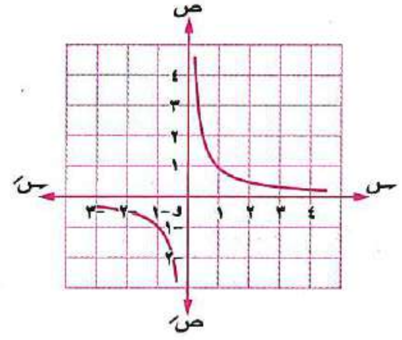
عندما س ⟵ ∞

أى أن : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{١}{\text{س}}$ = صفر

وهذا المثال التوضيحى يقودنا للنظرية الآتية :

الحل البيانى

عند رسم الدالة د : د (س) = $\frac{١}{\text{س}}$



نلاحظ من الرسم أنه عندما س ⟵ ∞

فإن د (س) ⟵ صفر

نظرية ٥

$\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{١}{\text{س}}$ = صفر

نتيجتان

إذا كانت : أ ∈ ح فإن :

١ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{أ}}{\text{س}}$ = صفر

٢ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{أ}}{\text{س}^{\text{ن}}}$ = صفر ، ن ∈ ح_+

قواعد أساسية

* $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{حـ}$ = حـ حيث حـ ثابت

* $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{س}^{\text{ن}} = \infty$ حيث ن عدد موجب

* نظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضرب أو قسمة دالتين عند س = أ السابق دراستها صحيحة عندما نضع س ⟵ ∞ بدلًا من س ⟵ أ

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتى : ١ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{\text{س}} + ٢\right)$ ٢ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٣ - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)$

الحـــل

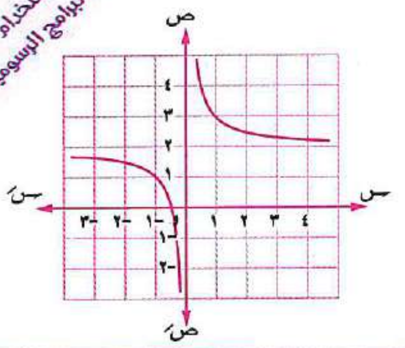
١ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{\text{س}} + ٢\right)$

$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}} + \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} ٢$

$= ٠ + ٢ = ٢$

الرسم للاطلاع فقط

باستخدام أحد البرامج الرسومية



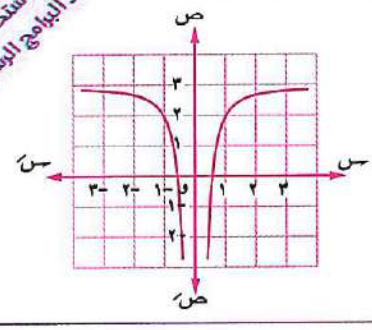
٢ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٣ - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)$

$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} ٣ - \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}^{٢}}$

$= ٣ - \text{صفر} = ٣$

الرسم للاطلاع فقط

باستخدام أحد البرامج الرسومية



إيجاد نهاية دالة كسرية جبرية عند اللانهاية

إذا كان التعويض المباشر عن س = ∞ يعطى $\frac{\infty}{\infty}$ فإننا نقسم كلاً من البسط والمقام على المتغير س مرفوعًا لأعلى قوة فى المقام (درجة المقام) ، ثم نستخدم النظرية ونتيجتيها لإيجاد النهاية (إن وجدت)

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س} - ٥}{٣\text{س} - ٧}$

٢ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٦}{٢\text{س} - ٧\text{س}^{٢}}$

٣ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}{٢\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ١}$

٤ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} - ٢\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٣} - ١}$

الحـــل

١ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\therefore \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س} - ٥}{٣\text{س} - ٧} = \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢ - \frac{٥}{\text{س}}}{٣ - \frac{٧}{\text{س}}} = \frac{٢ - ٠}{٣ - ٠} = \frac{٢}{٣}$

٢ بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{5\text{س}^2 - 3\text{س} + 6}{2\text{س} - 7\text{س}^2} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{5 - \frac{3}{\text{س}} + \frac{6}{\text{س}^2}}{\frac{2}{\text{س}} - 7} = -\frac{5}{7}$$

٣ بقسمة كل من البسط والمقام على س^3

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{3\text{س}^2 - 5\text{س}}{2\text{س}^3 - 6\text{س}^2 + 4\text{س} - 1} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{3}{\text{س}} - \frac{5}{\text{س}^2}}{2 - \frac{6}{\text{س}} + \frac{4}{\text{س}^2} - \frac{1}{\text{س}^3}}$$
$$= \frac{0}{2} = 0$$

٤ بقسمة كل من البسط والمقام على س^4

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^5 - 2\text{س}^2}{\text{س}^4 + 3\text{س}^3 - 1} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س} - \frac{2}{\text{س}^2}}{1 + \frac{3}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}^4}} = \frac{\infty - 0}{1 + 0 - 0} = \infty$$

ملاحظة هامة

* عند إيجاد $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ر}(\text{س})}$ حيث كل من د (س) ، ر (س) دالة كثيرة حدود فإن :

١ النهاية = عدد حقيقى لا يساوى الصفر «إذا كانت درجة البسط = درجة المقام».

٢ النهاية = صفر «إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام».

٣ النهاية = ± ∞ «إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام».

مثال ٣

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(\text{س} - 1)(\text{س}^2 + 1)}{\text{س}^2 (5\text{س} - 1)}$

٢ $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(3\text{س}^2 + 2)^2 (\text{س}^2 - 1)^3}{\text{س}^5 (\text{س} + 1)^7}$

الحل

١ بقسمة كل من البسط والمقام على س^3

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(\text{س} - 1)(\text{س}^2 + 1)}{\text{س}^2 (5\text{س} - 1)} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{\text{س}}\right)\left(1 + \frac{1}{\text{س}^2}\right)}{1 \left(5 - \frac{1}{\text{س}}\right)} = \frac{1 \times 1}{1 \times 5} = \frac{1}{5}$$

٢ بقسمة كل من البسط والمقام على س^{12}

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(3\text{س}^2 + 2)^2 (\text{س}^2 - 1)^3}{\text{س}^5 (\text{س} + 1)^7} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\left(3 + \frac{2}{\text{س}^2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\text{س}^2}\right)^3}{1 \left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)^7}$$
$$= \frac{3^2 \times 1^3}{1 \times 1^7} = 9$$

مثال ٤

أوجد كلًّا مما يأتى : [١] $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^٣ - ٩}{|٣س|^٣ + ٧}$ ‏ [٢] $\lim_{س \to \infty} \frac{٥س - ٦}{\sqrt{٩س^٢ + ٧}}$

[٣] $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨س^٣ - ٥س + ١}}{٣س - ٢}$ ‏ [٤] $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٥]{س^٥ + س^٣}}{\sqrt[٧]{س^٧ - س^٢}}$

[٥] $\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^٢ - س + ١} - \sqrt{س^٢ + س + ١}\right)$

الحـــل

[١] ∵ س ← ∞ ‏ ∴ |س| = س ‏ ∴ النهاية = $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^٣ - ٩}{٢٧س^٣ + ٧}$

وبقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

∴ $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^٣ - ٩}{٢٧س^٣ + ٧} = \lim_{س \to \infty} \frac{٢ - \frac{٩}{س^٣}}{٢٧ + \frac{٧}{س^٣}} = \frac{٢}{٢٧}$

[٢] بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^٢}$

∴ $\lim_{س \to \infty} \frac{٥س - ٦}{\sqrt{٩س^٢ + ٧}} = \lim_{س \to \infty} \frac{٥ - \frac{٦}{س}}{\sqrt{٩ + \frac{٧}{س^٢}}}$

$= \frac{٥}{\sqrt{٩}} = \frac{٥}{٣}$

لاحـظ أنه

عندما س ← ∞

فإن : $س = |س| = \sqrt{س^٢}$

$= \sqrt[٣]{س^٣} = \sqrt[٤]{س^٤} = ...$

[٣] بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt[٣]{س^٣}$

∴ $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨س^٣ - ٥س + ١}}{٣س - ٢} = \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨ - \frac{٥}{س^٢} + \frac{١}{س^٣}}}{٣ - \frac{٢}{س}} = \frac{\sqrt[٣]{٨}}{٣} = \frac{٢}{٣}$

[٤] بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt[٥]{س^٥} = \sqrt[٧]{س^٧}$

∴ $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٥]{س^٥ + س^٣}}{\sqrt[٧]{س^٧ - س^٢}} = \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٥]{١ + \frac{١}{س^٢}}}{\sqrt[٧]{١ - \frac{١}{س^٥}}} = \frac{\sqrt[٥]{١}}{\sqrt[٧]{١}} = ١$

[٥] $\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^٢ - س + ١} - \sqrt{س^٢ + س + ١}\right)$

$= \lim_{س \to \infty} \left[\left(\sqrt{س^٢ - س + ١} - \sqrt{س^٢ + س + ١}\right) \times \frac{\sqrt{س^٢ - س + ١} + \sqrt{س^٢ + س + ١}}{\sqrt{س^٢ - س + ١} + \sqrt{س^٢ + س + ١}}\right]$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{س^٢ - س + ١ - (س^٢ + س + ١)}{\sqrt{س^٢ - س + ١} + \sqrt{س^٢ + س + ١}}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{-٢س}{\sqrt{س^٢ - س + ١} + \sqrt{س^٢ + س + ١}}$

وبقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^٢}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{-٢}{\sqrt{١ - \frac{١}{س} + \frac{١}{س^٢}} + \sqrt{١ + \frac{١}{س} + \frac{١}{س^٢}}} = \frac{-٢}{\sqrt{١} + \sqrt{١}} = -١$

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٥}{\text{س}^{٢}} - \frac{٧ \text{س}^{٣}}{\text{س}^{٤}} + ٢ \right)$

٢ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٤ \text{س}^{٢} + ٣ \text{س} + ٧ \right)$

٣ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٥ \text{س}^{٤} - \text{س}^{٣} - ٣ \right)$

٤ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٤ \text{س}^{٢} - ٥ \text{س}^{٣} + ١٣ \right)$

الحـــل

١ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٥}{\text{س}^{٢}} - \frac{٧ \text{س}^{٣}}{\text{س}^{٤}} + ٢ \right) = \text{صفر} - \text{صفر} + ٢ = ٢$

٢ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٤ \text{س}^{٢} + ٣ \text{س} + ٧ \right)$ [لاحظ التعويض المباشر يعطى $\infty + \infty + ٧$]

$\therefore \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٤ \text{س}^{٢} + ٣ \text{س} + ٧ \right) = \infty$

٣ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٥ \text{س}^{٤} - \text{س}^{٣} - ٣ \right)$ [لاحظ التعويض المباشر يعطى $\infty - \infty - ٣$ أى كمية غير معينة]

$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \text{س}^{٤} \left(٥ - \frac{١}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^{٤}} \right)$ [نأخذ س عامل مشترك بأكبر أس]

$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \text{س}^{٤} \times \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٥ - \frac{١}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^{٤}} \right) = \infty \times ٥ = \infty$

٤ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٤ \text{س}^{٢} - ٥ \text{س}^{٣} + ١٣ \right)$ [لاحظ التعويض المباشر يعطى $\infty - \infty$ أى كمية غير معينة]

$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \text{س}^{٣} \left(\frac{٤}{\text{س}} - ٥ + \frac{١٣}{\text{س}^{٣}} \right)$ [نأخذ س عامل مشترك بأكبر أس]

$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \text{س}^{٣} \times \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٤}{\text{س}} - ٥ + \frac{١٣}{\text{س}^{٣}} \right) = \infty \times -٥ = -\infty$

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٣}{\text{س}^{٢}} - ٢\right) = $ ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) −٣ (د) −٢

② $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}}{٤\text{س} + ٥} = $ ....

(أ) ∞ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) صفر

③ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٢} + ١}{\text{س}^{٢} + ١} = $ ....

(أ) صفر (ب) غير موجودة. (جـ) ∞ (د) ٢

④ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} + ٥}{٦} = $ ....

(أ) صفر (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) ١ (د) ∞

⑤ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}} - ٣}{\text{س}} = $ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −٢ (د) ∞

⑥ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} (٣\text{س}^{-٥} + ٤\text{س}^{-٢} + ٥) = $ ....

(أ) ١٢ (ب) ∞ (جـ) ٥ (د) صفر

⑦ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}^{-٣} + ٤\text{س}^{-٢} - ٢}{٧\text{س}^{-٣} - \text{س}^{-٢} + ٦} = $ ....

(أ) ∞ (ب) صفر (جـ) $\frac{٣}{٧}$ (د) $\frac{-١}{٣}$

⑧ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٧} - ٢\text{س}^{٣}}{٢\text{س}^{٤} - ٣\text{س}^{٢} - ١} = $ ....

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ∞ (د) $\frac{١}{٢}$

⑨ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}^{٢}}{\text{س}(٢\text{س} - ١)} = $ ....

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) صفر (د) ٣

⑩ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{٣ + ٢\text{س}}{٤\text{س} - ١}} = $ ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(١١) 📖 $\displaystyle \lim_{س \to \infty} \frac{س^{3} + 5}{س\,(2س^{2} + 3)}$ = ...

(أ) $\frac{5}{8}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{5}{3}$

(١٢) $\displaystyle \lim_{س \to \infty} \frac{1}{س}\sqrt{8 + 9س^{2}}$ = ...

(أ) $2\sqrt{2}$ (ب) ٣ (جـ) $-2\sqrt{2}$ (د) -3

(١٣) $\displaystyle \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{64س^{3} + 7س - 2}}{3س + 2}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{4}{3}$

(١٤) $\displaystyle \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8س^{3} + 1}}{|س|}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) صفر (د) ٤

(١٥) $\displaystyle \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{9س^{2} + 3}}{\sqrt[3]{1 - 8س^{3}}}$ = ...

(أ) $\frac{-2}{3}$ (ب) $\frac{-9}{8}$ (جـ) $\frac{3}{2}$ (د) $\frac{-3}{2}$

(١٦) $\displaystyle \lim_{س \to \infty} \frac{4 - 3س^{3}}{\sqrt{س^{6} + 9}}$ = ...

(أ) -3 (ب) ١ (جـ) صفر (د) ∞

(١٧) $\displaystyle \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س + 2} + \sqrt{س + 3}}{\sqrt{2س + 5}}$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ١ (جـ) $\sqrt{2}$ (د) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

(١٨) $\displaystyle \lim_{س \to \infty} \left(\frac{3س^{2} + 2س + 1}{س^{2} - 3س + 2}\right)^{4}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

(١٩) $\displaystyle \lim_{س \to \infty} س\left[\left(أ + \frac{1}{س}\right)^{ن} - أ^{ن}\right]$ = ...

(أ) $ن\,أ$ (ب) $ن\,أ^{ن-1}$ (جـ) صفر (د) غير موجودة.

(٢٠) $\displaystyle \lim_{س \to \infty} \frac{(12)^{\frac{1}{س}}}{س + 7}$ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{12}{7}$ (د) ∞

(٢١) $\displaystyle \lim_{س \to \infty} \frac{ك^{\frac{1}{س}}}{3}$ = ... حيث ك ثابت موجب.

(أ) $\frac{ك}{3}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (جـ) ٣ (د) $3ك$

(٢٢) إذا كانت $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{أ^2 س + 7}{2 س - 5} = 8$ فإن : أ = ... حيث أ ∈ ح

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) ± ٤ (د) ± ٨

(٢٣) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{أ س^2 - 5 س}{2 س + 3 س^2} = 3$ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٢٤) إذا كان : م ∈ ح وكان : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{(م + 2) س^2 - س + 4}{2 م س^2 - 2 س + 5} = 2$ فإن : م = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{1}{3}$ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) ١

(٢٥) $\lim\limits_{س \to \infty} (3 + 2 س - 5 س^2) = ...$

(أ) ∞ (ب) $-\infty$ (جـ) صفر (د) ٧

(٢٦) $\lim\limits_{س \to \infty} (س^3 + 7 س^2 + 8) = ...$

(أ) ∞ (ب) صفر (جـ) $-\infty$ (د) ١

(٢٧) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2 + س} - س\right) = ...$

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) صفر (جـ) $\sqrt{2}$ (د) ليس لها وجود.

(٢٨) $\lim\limits_{س \to \infty} س^{ن} =$ صفر إذا كانت ن ∈ ....

(أ) ط (ب) $ص^-$ (جـ) $ح^+$ (د) $ح^-$

(٢٩) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt{4 س + \sqrt{س + \sqrt{س}}}}{8 \sqrt{س}} = ...$

(أ) ١ (ب) $\frac{1}{4}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{8}$

(٣٠) إذا كان : أ > ب فإن : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^{أ}}{س^{ب}} = ...$

(أ) صفر (ب) ∞ (جـ) ١ (د) أ − ب

(٣١) إذا كان : أ < ب < صفر فإن : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^{أ}}{س^{ب}} = ...$

(أ) ∞ (ب) $-\infty$ (جـ) صفر (د) أ − ب

(٣٢) إذا كانت : د (س) كثيرة حدود من الدرجة الثالثة ، ر (س) كثيرة حدود من الدرجة الخامسة

فإن : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{ر(س)}{س^2 \, د(س)} = ...$

(أ) $\pm\infty$ (ب) صفر

(جـ) عدد حقيقى ≠ صفر (د) ليس لها وجود.

ثانيًا / الأسئلة المقالية

١ أوجد كلاً من النهايات الآتية :

(١) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢س - ٥}{٣س + ٨}$ «$\frac{٢}{٣}$»

(٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢س - ٥}{٣س^{٢} + ٨}$ «صفر»

(٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢س^{٢} - ٥}{٣س + ٨}$ «∞»

(٤) 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥ - ٦س - ٣س^{٢}}{٢س^{٢} + س + ٤}$ «$-\frac{٣}{٢}$»

(٥) 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س^{٣} - ٢}{|س|^{٣} + ١}$ «١»

(٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٧س^{٢} + ١}{٤س^{٣} - ٨س + ١}$ «صفر»

(٧) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥س^{٧} + ٢س - ١}{٦س^{٤} + ١٣}$ «∞»

(٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥ - ٧س^{٨} + ٣س^{١٤}}{٧ - ٦س^{١٤} + ٢س^{٦}}$ «$\frac{-١}{٢}$»

(٩) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\frac{٧}{س^{٢}} + \frac{٢}{س} - ٣\right)$ «−٣»

(١٠) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥س^{-٣} + ٤س^{-٢} - ٣}{٧س^{-٣} - ٢س^{-٢} + ٨}$ «$\frac{-٣}{٨}$»

(١١) 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥س^{٣} - ٤س^{٢} + ٢}{٧ - س + |٢س|^{٣}}$ «$\frac{٥}{٨}$»

(١٢) 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} (س^{٣} + ٥س^{٢} + ١)$ «∞»

(١٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left[\sqrt{س^{٢} + ٥س + ٧} + س\right]$ «∞»

(١٤) 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} (٥ + س - س^{٢})$ «−∞»

٢ أوجد كلاً مما يأتي :

(١) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٣س^{٢} - ٤س + ٥}{(س + ٢)^{٢}}$ «٣»

(٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٦س^{٢} - ٥س}{(٣ - س)(٢ + س)}$ «−٦»

(٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٨س^{٣} - س + ١}{(س + ١)(٢س^{٢} - ٣)}$ «٤»

(٤) 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س^{٣} - ٤س + ٥}{(٢س - ١)^{٣}}$ «$\frac{١}{٨}$»

(٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(٢س + ٣)(٤س^{٢} - ٥)}{(٣س^{٢} - ٨)(٥س - ٣)}$ «$\frac{٨}{١٥}$»

(٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(٢س + ٣)(٥س - ١)(س - ٢)}{س(س + ١)(٣س - ١)}$ «$\frac{١٠}{٣}$»

(٧) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(٧ + \sqrt{س})(٣ + \sqrt{س})}{٤س - ٣}$ «$\frac{١}{٤}$»

(٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(٦س - ٥)(٣س - ٤)^{٢}}{(٣س - ٢)^{٣}}$ «٢»

(٩) 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(س + ٢)^{٣}(٣ - ٢س^{٢})}{٣س(س^{٢} + ٧)^{٢}}$ «$-\frac{٢}{٣}$»

(١٠) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(٣س^{٢} - ١)^{٣}}{١٨س^{٦} + س^{٢} + ١}$ «$\frac{٣}{٢}$»

٣ أوجد كلاً مما يأتي :

(١) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢س + ٣}{\sqrt{٩س^{٢} + ٢٥}}$ «$\frac{٢}{٣}$»

(٢) 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{١}{س}\sqrt{٣ + ٤س^{٢}}$ «٢»

(٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢س + ١}{\sqrt{٤س^{٢} + ٣س - ٤}}$ «١»

(٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢س - ٣}{\sqrt[٣]{١٢٥س^{٣} + ٥}}$ «$\frac{٢}{٥}$»

(٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨س^{٣} + ٥س - ٢}}{٣س + ٢}$ «$\frac{٢}{٣}$»

(٦) 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٤ - ٣س^{٣}}{\sqrt{س^{٦} + ٩}}$ «−٣»

(٧) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{9س^2 - 3س + 8}}{\sqrt[3]{3س^2 + 125س^3 + 2}}$ «$\frac{3}{5}$»

(٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س^2 + 1}}{\sqrt[4]{س^4 + 2}}$ «1»

(٩) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[3]{8س^3 + 1}}{\sqrt[5]{32س^5 + س}}$ «1»

(١٠) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[3]{8س^2 + 1}}{\sqrt[6]{س^4 - 3}}$ «2»

(١١) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{3س - 2} - \sqrt{12س + 7}}{\sqrt{27س - 5}}$ «$\frac{-1}{3}$»

(١٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{4س^2 + 7} + 3س}{2س + 9}$ «$\frac{5}{2}$»

(١٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[4]{س^6 + 8} - \sqrt[6]{س^2 + 4}}{\sqrt{س^3 + 9}}$ «1»

(١٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{3س^2 - س - 7}{(س + 1)\sqrt{25س^2 + 1}}$ «$\frac{3}{5}$»

---

٤ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left[7 + \dfrac{2س^2}{(س + 3)^2}\right]$ «9»

(٢) 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left[\dfrac{س}{2س + 1} + \dfrac{3س^2}{(س - 3)^2}\right]$ «$\frac{7}{2}$»

(٣) 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{3س}{2س + 7}\right)$ «$\frac{-5}{6}$»

(٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\dfrac{2س^3}{2س^2 + 1} - س\right)$ «صفر»

(٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\dfrac{س^2 - 1}{س + 2} - \dfrac{س^2 + 1}{س - 2}\right)$ «-4»

(٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\sqrt{س^2 - 2} - \sqrt{س^2 + س}\right)$ «$-\frac{1}{2}$»

(٧) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{1}{س}\left(\sqrt{4س^2 + 1} - \sqrt{س^2 + 1}\right)$ «1»

(٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\sqrt{س^2 + 5س} - س\right)$ «$\frac{5}{2}$»

(٩) 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} س\left(\sqrt{4س^2 + 1} - 2س\right)$ «$\frac{1}{4}$»

(١٠) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{(2س - 1)^5 (س^2 + 3)^6}{(س + 1)^7 (س^2 - 5)^5}$ «32»

(١١) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س + 1} - \sqrt{س - 1}}{\sqrt{4س + 1} - \sqrt{4س - 1}}$ «2»

---

٥ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\dfrac{3س^2 - 5س + 1}{4س^2 - 7}\right)^{\frac{1}{س}}$ «1»

(٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \left(\dfrac{س + 1}{\sqrt{س^2 - 1}} + أ^{\frac{1}{س}}\right)$ حيث أ موجبة. «2»

③ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\dfrac{٢س - ٣}{\sqrt[3]{٢٧س^{٣} - ١٥س + ٢}} + ٨^{\frac{١}{س}} \right)$ «$١\frac{٢}{٣}$»

④ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\dfrac{٥س^{٢}}{١ - س^{٢}} - \sqrt[س]{١٣} \right)$ «−٦»

---

٦ أوجد قيمتي أ ، ن إذا كانت $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٤أس^{ن} - ٤س + ٥}{٣ - ٩س + ٨س^{٢}} = ٣$ «٢ ، ٦»

---

٧ أوجد قيمة أ إذا كانت $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{أس^{٣} + ٣}}{\sqrt{٤س^{٢} + ٧}} = -١$ «−٨»

---

٨ إذا كانت $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\sqrt{أس^{٢} + ٣ب س + ٥} - ٢س \right) = ٣$

أوجد قيمة كل من : أ ، ب «٤ ، ٤»

---

٩ أوجد قيمتي أ ، ب إذا كانت $\lim\limits_{س \to \infty} د(س) = ٥$ ، $\lim\limits_{س \to -٢} د(س) = ٢$

حيث $د(س) = \dfrac{٢ - أس^{٢}}{٣ - ب س + س^{٢}}$ «−٥ ، ٢»

---

١٠ إذا كانت : $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\dfrac{س^{٢} + ١}{س + ١} - أس - ب \right) = ٢$ **أوجد قيمتي : أ ، ب** «١ ، −٣»

---

١١ أوجد قيمتي أ ، ب إذا كانت $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{س^{٣} + ٢س + ١}{(أ + ١)س^{٤} + (٧ - ب)س^{٣} + س^{٢}} = \infty$ «−١ ، ٧»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

أوجد كلاً مما يأتي :

① $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{س^{-٢} + س^{-٤}}{(٢س + ٣)^{-٢}}$ «٤»

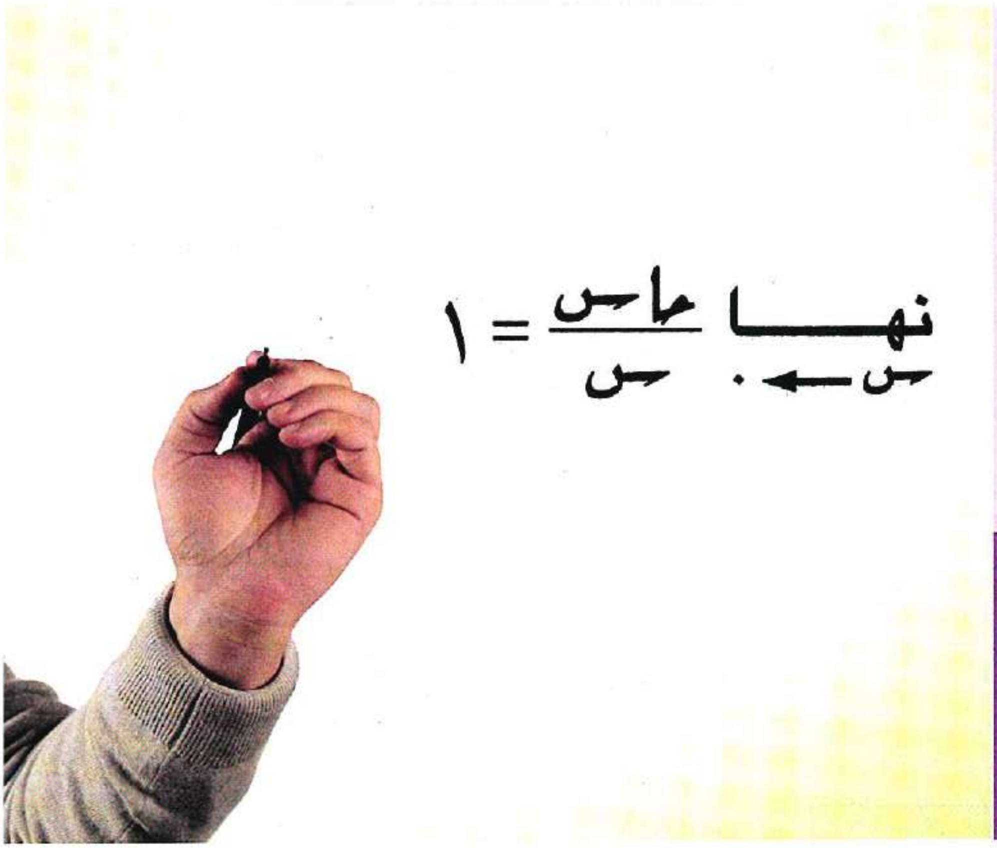
② $\lim\limits_{ن \to \infty} ن\left[\left(أ + \dfrac{١}{ن}\right)^{٤} - أ^{٤} \right]$ «٤أ^{٣}»

③ $\lim\limits_{س \to \infty} س\left[\left(٣ + \dfrac{١}{س}\right)^{٥} - ٢٤٣ \right]$ «٤٠٥»

④ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^{٢} + ٢} - س \right) \sqrt{٢س^{٢} + ١}$ «$\sqrt{٢}$»

⑤ $\lim\limits_{س \to \infty} (٢س^{-١} - س^{-٢}) \sqrt{٤س^{٢} + ١}$ «٤»

⑥ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٥س\sqrt{س} + ١٦س - ٣\sqrt{س^{٢} - ١}}{س + \sqrt{٤س^{٣} + ١}}$ «$\frac{٥}{٢}$»



الدرس

5

نهايات الدوال المثلثية

نظريـة

إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى فإن :

١ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$ ٢ $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$

* عند دراسة قيم الدالة د : د (س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ عندما س ← ٠

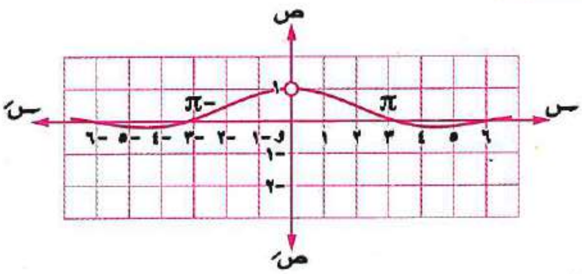
حيث س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى نكون الجدول الآتى :

س	± ١	± ٠,١	± ٠,٠١	صفر
$\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$	٠,٨٤١٥	٠,٩٩٨٣	←------	١

ونلاحظ أنه

«كلما اقتربت س من الصفر كلما اقتربت النسبة $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ من الواحد الصحيح»

والشكل المقابل يوضح ذلك بيانيًا.



أى أن $\underset{س \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$

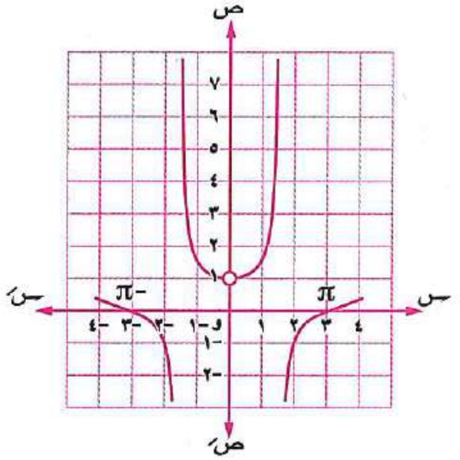
* بالمثل عند دراسة قيم الدالة د : د (س) = $\frac{\text{ظا س}}{\text{س}}$ عندما س ← ٠

حيث س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى نكون الجدول الآتى :

س	± ١	± ٠,١	± ٠,٠١	صفر
$\frac{\text{ظا س}}{\text{س}}$	١,٥٥٧٤	١,٠٠٣٣	←------	١

ونلاحظ أنه

«كلما اقتربت س من الصفر كلما اقتربت النسبة $\frac{\text{طا س}}{\text{س}}$ من الواحد الصحيح» والشكل المقابل يوضح ذلك بيانيًا.



أى أن $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا س}}{\text{س}} = \text{١}$

ملاحظتان

١ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{جا س}} = \text{١}$

٢ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{طا س}} = \text{١}$ حيث س بالتقدير الدائرى.

نتيجة ١

إذا كانت س قياس زاوية بالتقدير الدائرى فإن :

١ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا أس}}{\text{س}} = \text{أ}$ ومنها $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ب س}}{\text{جا أس}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

٢ $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا أس}}{\text{س}} = \text{أ}$ ومنها $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ب س}}{\text{طا أس}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

فمثلًا : * $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٣س}}{\text{س}} = \text{٣}$ * $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا ٢س}}{\text{س}} = \text{٢}$ * $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{-٥س}}{\text{جا ٣س}} = \frac{\text{-٥}}{\text{٣}}$

* $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٢س}}{\text{٥س}} = \frac{\text{٢}}{\text{٥}}$ * $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا ٤س}}{\text{٣س}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ * $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{طا ٧س}} = \frac{\text{١}}{\text{٧}}$

ملاحظتان

١ جا س ، جتا س معرفتان لجميع قيم س $\in$ ح أما طا س فهى معرفة لجميع قيم س عدا عند س $= \frac{\text{٢ن+١}}{\text{٢}}\pi$ ، ن $\in$ ص لذلك فإن :

* $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}} \text{جا س} = \text{جا أ}$ ، أ $\in$ ح * $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}} \text{جتا س} = \text{جتا أ}$ ، أ $\in$ ح

* $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}} \text{طا س} = \text{طا أ}$ ، أ $\neq \frac{\text{٢ن+١}}{\text{٢}}\pi$ ، ن $\in$ ص

٢ لاحظ الفرق بين : $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا أس}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ ، $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{ أس}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

حيث : $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا أس}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \text{أ}$ بينما $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{ أس}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{جا أس}}{\text{س}}\right)^{\text{٢}} = \text{أ}^{\text{٢}}$

فمثلًا : $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٣س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \text{٣}$ بينما $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{ ٣س}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{جا ٣س}}{\text{س}}\right)^{\text{٢}} = \text{٣}^{\text{٢}} = \text{٩}$

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتى :

١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٢ \text{ س}}{٣ \text{ س}}$

٢) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٤ \text{ س}}{\text{حا } ٥ \text{ س}}$

٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٥ \text{ س}}{٢ \text{ حا } ٣ \text{ س}}$

٤) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا س}}{\text{حا } ٢ \text{ س}}$

الحـــل

١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٢ \text{ س}}{٣ \text{ س}} = \frac{٢}{٣}$

٢) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٤ \text{ س}}{\text{حا } ٥ \text{ س}} = \frac{٤}{٥}$

٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٥ \text{ س}}{٢ \text{ حا } ٣ \text{ س}} = \frac{١}{٢} \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{حا } ٥ \text{ س}}{\text{س}}}{\frac{\text{حا } ٣ \text{ س}}{\text{س}}} = \frac{١}{٢} \times \frac{\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٥ \text{ س}}{\text{س}}}{\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٣ \text{ س}}{\text{س}}} = \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٣} = \frac{٥}{٦}$

٤) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا س}}{\text{حا } ٢ \text{ س}} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{طا س}}{\text{س}}}{\frac{\text{حا } ٢ \text{ س}}{\text{س}}} = \frac{١}{٢}$

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا}^٢ ٢ \text{ س}}{٣ \text{ س}^٢}$

٢) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٣ \text{ س}^٢ \text{ حتا س}^٢}{٥ \text{ س}^٢}$

الحـــل

١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا}^٢ ٢ \text{ س}}{٣ \text{ س}^٢} = \frac{١}{٣} \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{طا } ٢ \text{ س}}{\text{س}}\right)^٢ = \frac{١}{٣} \times ٢^٢ = \frac{٤}{٣}$

٢) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٣ \text{ س}^٢ \text{ حتا س}^٢}{٥ \text{ س}^٢} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٣ \text{ س}^٢}{٥ \text{ س}^٢} \times \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ حتا س}^٢ = \frac{٣}{٥} \times ١ = \frac{٣}{٥}$

مثال ٣

أوجد كلاً مما يأتى :

١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢ \text{ س} - ٣ \text{ حا س}}{٣ \text{ س} + \text{طا س}}$

٢) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ + ٥ \text{ طا}^٢ ٣ \text{ س}}{٤ \text{ س}^٢ - \text{حا } ٢ \text{ س}^٢}$

الحـــل

١) بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\therefore \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢ \text{ س} - ٣ \text{ حا س}}{٣ \text{ س} + \text{طا س}} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢ - ٣ \frac{\text{حا س}}{\text{س}}}{٣ + \frac{\text{طا س}}{\text{س}}} = \frac{٢ - ٣}{٣ + ١} = -\frac{١}{٤}$

[٢] بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

$$\therefore \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}^2 + 5\,\text{ظا}^2\,3\text{س}}{4\,\text{س}^2 - \text{جا}\,2\,\text{س}^2} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 + 5\left(\frac{\text{ظا}\,3\text{س}}{\text{س}}\right)^2}{4 - \frac{\text{جا}\,2\,\text{س}^2}{\text{س}^2}}$$

$$= \frac{1 + 5(3)^2}{4 - 2} = \frac{46}{2} = 23$$

نتيجة ②

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}} = \text{صفر}$$

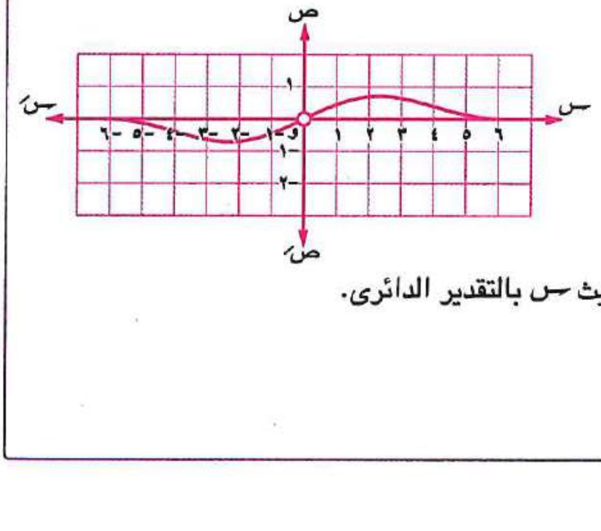
إثبات نتيجة ②

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}} \times \frac{1 + \text{جتا}\,\text{س}}{1 + \text{جتا}\,\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^2\,\text{س}}{\text{س}\,(1 + \text{جتا}\,\text{س})} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}^2\,\text{س}}{\text{س}\,(1 + \text{جتا}\,\text{س})}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}} \times \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}\,\text{س}}{1 + \text{جتا}\,\text{س}}$$

$$= 1 \times \text{صفر} = \text{صفر}$$



* الشكل المقابل يمثل

الدالة د : د $(\text{س}) = \frac{1 - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}}$ ونلاحظ

فى الشكل أنه كلما اقتربت س من الصفر

كلما اقتربت النسبة $\frac{1 - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}}$ من الصفر أيضًا حيث س بالتقدير الدائرى.

أى أن $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}} = \text{صفر}$

مثال ④

أوجد كلاً مما يأتى : [١] $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}}$ [٢] $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}^2}$

الحل

[١] $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \left(\frac{1 - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}}\right) = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}} \times \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}}$

$= \text{صفر} \times 1 = \text{صفر}$

[٢] $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}^٢} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \left(\frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}^٢} \times \frac{١ + \text{جتا س}}{١ + \text{جتا س}}\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \left(\frac{١ - \text{جتا}^٢\text{ س}}{\text{س}^٢} \times \frac{١}{١ + \text{جتا س}}\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \left(\frac{\text{جا}^٢\text{ س}}{\text{س}^٢} \times \frac{١}{١ + \text{جتا س}}\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \left(\frac{\text{جا س}}{\text{س}}\right)^٢ \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \left(\frac{١}{١ + \text{جتا س}}\right) = (١)^٢ \times \frac{١}{١ + ١} = \frac{١}{٢}$

تذكر أن

- $\text{جا}^٢\text{ س} + \text{جتا}^٢\text{ س} = ١$
- $١ + \text{ظا}^٢\text{ س} = \text{قا}^٢\text{ س}$
- $١ + \text{ظتا}^٢\text{ س} = \text{قتا}^٢\text{ س}$

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتى :

[١] $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا}(٣\text{س} - ١٢)}{\text{س} - ٤}$

[٢] $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جتا س}}{٢\text{س} - \pi}$

[٣] $\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ظا س}}{\pi - \text{س}}$

[٤] $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهـــا}} \text{س جا س}^{-١}$

الحــل

[١] $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا}(٣\text{س} - ١٢)}{\text{س} - ٤} = \underset{(\text{س} - ٤)\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا}\left[٣(\text{س} - ٤)\right]}{\text{س} - ٤} = ٣$

[٢] $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جتا س}}{٢\text{س} - \pi} = \underset{(\frac{\pi}{٢} - \text{س})\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س})}{-٢(\frac{\pi}{٢} - \text{س})} = -\frac{١}{٢}$

[٣] $\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ظا س}}{\pi - \text{س}} = \underset{(\pi - \text{س})\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{-\text{ظا}(\pi - \text{س})}{\pi - \text{س}} = -١$

[٤] $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهـــا}} \text{س جا س}^{-١} = \underset{\frac{١}{\text{س}}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا}\frac{١}{\text{س}}}{\frac{١}{\text{س}}} = ١$

مثال ٦

أوجد كلاً مما يأتى :

[١] $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} ٤\text{س قتا }٥\text{س}$

[٢] $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س})}{\text{س}}$

[٣] $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جتا س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٢}}$

الحــل

[١] $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} ٤\text{س قتا }٥\text{س} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{٤\text{س}}{\text{جا }٥\text{س}} = \frac{٤}{٥}$

[٢] $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س})}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$

[٣] $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جتا س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٢}} = \underset{(\frac{\pi}{٢} - \text{س})\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س})}{-(\frac{\pi}{٢} - \text{س})} = -١$

معلومة

إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الستينى فإن :

[١] $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = \frac{\pi}{١٨٠}$

[٢] $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = \frac{\pi}{١٨٠}$

تمارين 16 على نهايات الدوال المثلثية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\lim\limits_{س \to ٠}$ طا س = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) π

(٢) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ حا ٢ س = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) ١ (د) $\frac{\pi}{٢}$

(٣) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢ س}{حا ٣ س}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

(٤) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{طا \pi س}{٦ س}$ = ...

(أ) π (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) غير موجودة.

(٥) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{حا \frac{٣}{٤} \sqrt[٥]{س}}{\sqrt[٥]{س}}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\sqrt[٥]{\frac{٣}{٤}}$

(٦) $\lim\limits_{(٢ س - ٣) \to ٠} \frac{طا (٢ س - ٣)}{٢ س - ٣}$ = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

(٧) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{حا ٣ هـ^٢}{٤ هـ^٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٨) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٣ س^٥}{طا ٤ س^٥}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) ١ (د) صفر

(٩) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ - حتا س}{٣ س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) غير موجودة.

(١٠) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٤ + ٥ س}}{\text{جتا ٣ س}}$ = ...

(أ) −٤　　(ب) ٤　　(جـ) ٣　　(د) −٣

(١١) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } \frac{\text{س}}{\text{٣}}}{\text{٢ س}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$　　(ب) $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$　　(جـ) $\frac{\text{١}}{\text{٦}}$　　(د) $\frac{\text{١}}{\text{١٢}}$

(١٢) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ س + جا ٣ س}}{\text{ظا ٥ س}}$ = ...

(أ) ٥　　(ب) $\frac{\text{٦}}{\text{٥}}$　　(جـ) ١　　(د) صفر

(١٣) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٢ س + ٥ جا ٣ س}}{\text{س}}$ = ...

(أ) ٧　　(ب) ٥　　(جـ) ١٧　　(د) ١٠

(١٤) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ س + جا ٣ س}}{\text{٥ س + ظا ٢ س}}$ = ...

(أ) ١　　(ب) $\frac{\text{٥}}{\text{٧}}$　　(جـ) $\frac{\text{٧}}{\text{٥}}$　　(د) −١

(١٥) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٣ س}}{\text{٥ س}^{\text{٢}}\text{ − ٤ س}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$　　(ب) $\frac{\text{−٣}}{\text{٤}}$　　(جـ) ٣　　(د) $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$

(١٦) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س جا ٢ س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ = ...

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) ٤

(١٧) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٢ س جتا ٣ س}}{\text{٦ س}}$ = ...

(أ) ١　　(ب) ٣　　(جـ) $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$　　(د) صفر

(١٨) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٣ س}}{\text{ظا } \frac{\text{١}}{\text{٣}} \text{ س}}$ = ...

(أ) ٩　　(ب) $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$　　(جـ) ٣　　(د) ١

(١٩) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ س}}{\text{جا } \frac{\text{٣}}{\text{٤}} \text{ س}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{١}}{\text{٦}}$　　(ب) $\frac{\text{٣}}{\text{٨}}$　　(جـ) $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$　　(د) $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

(٢٠) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}^{\text{٢}}\text{ ٢ س}}{\text{س جا ٣ س}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{٤}}{\text{٩}}$　　(ب) $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$　　(جـ) $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$　　(د) $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$

(٢١) $\underset{\text{س} \to \cdot}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} + \text{حا}^{٢}\ \text{٢ س}}{\text{س طا ٢ س}} = $ ....

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (جـ) ١ (د) ٥

(٢٢) $\underset{\text{س} \to \cdot}{\text{نها}} \left(\frac{\text{حا ٢ س}}{\text{٣ س}} + \frac{\text{س حا س}^{٢}}{\text{حا س}^{٣}} \right) = $ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

(٢٣) $\underset{\text{س} \to \cdot}{\text{نها}} \frac{\text{حا}^{٢}\ \text{٩ س} + \text{طا ١٦ س}^{٢}}{\text{٤ س}^{٢}} = $ ....

(أ) $\frac{٩٧}{٤}$ (ب) $\frac{٩٧}{١٦}$ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) ٤

(٢٤) $\underset{\text{س} \to \cdot}{\text{نها}}\ \text{٣ س قتا ٢ س} = $ ....

(أ) ٦ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) غير موجودة.

(٢٥) $\underset{\text{س} \to \cdot}{\text{نها}} \frac{\text{حا ٢ س طا ٣ س}}{\text{٤ س}^{٢}} = $ ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٦

(٢٦) $\underset{\text{س} \to \cdot}{\text{نها}} \frac{\text{١} - \text{طا س}}{\text{حا س} - \text{حتا س}} = $ ....

(أ) ١ (ب) ١− (جـ) صفر (د) ليس لها وجود.

(٢٧) $\underset{\text{س} \to \cdot}{\text{نها}} \frac{\text{١٢} - \text{١٢ حتا س}}{\text{س}} = $ ....

(أ) صفر (ب) ١٢ (جـ) ١ (د) ٢٤

(٢٨) $\underset{\text{س} \to \cdot}{\text{نها}} \frac{\text{حا س} - \text{حا س حتا س}}{\text{س}^{٢}} = $ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٩) $\underset{\text{س} \to \cdot}{\text{نها}} \frac{\text{حتا س} + \text{٢ س} - \text{١}}{\text{٣ س}} = $ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) صفر

(٣٠) $\underset{\text{س} \to \cdot}{\text{نها}} \frac{\text{١} - \text{حتا س} + \text{حا ٣ س}}{\text{١} - \text{حتا س} + \text{طا ٢ س}} = $ ....

(أ) صفر (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ١ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٣١) $\underset{\text{س} \to \cdot}{\text{نها}} \frac{\text{١} - \text{قا س}}{\text{حتا س} - \text{١}} = $ ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ١−

(٣٢) إذا كان : $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(أ + ٣)\ س}{\text{حا}\ أ\ س} = \frac{٢}{٥}$ فإن : أ = ...

(أ) −٥ (ب) −٣ (جـ) −١ (د) ٣

(٣٣) إذا كانت : $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}^{٢}\ أ\ س - \text{ظا}\ ٢\ أ\ س^{٢}}{س^{٢}} = -١$ فإن : أ = ...

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٤

(٣٤) إذا كان : $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}\ أ\ س}{ب\ س} = \frac{١}{٣}$ ، $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}\ ب\ س}{جـ\ س} = \frac{٤}{٣}$ فإن : $\frac{أ}{جـ}$ = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٩}$ (د) $\frac{١}{١٢}$

(٣٥) إذا كان : $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}\ أ\ س}{\text{حا}\ ب\ س} = \frac{٣}{٥}$ فإن : $\frac{أ + ب}{أ - ب}$ = ...

(أ) −٤ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) ٤

(٣٦) إذا كان : $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}^{٢}\ ٤\ س^{٣}}{س^{ن}} = ١٦$ فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

(٣٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{حا}\ س + \text{جتا}\ س)^{٢} - ١}{٣\ س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) صفر

(٣٨) $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{حا}^{٢}\ س}{\text{جتا}^{٢}\ س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}\pi$ (د) صفر

(٣٩) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}\ (س - ١)}{(\sqrt{س} - ١)}$ = ...

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) −٢ (د) $\frac{١}{٢}$

(٤٠) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}\ (س - ١)}{س^{٢} - ١}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) −١ (د) صفر

(٤١) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}\ (س - ٣)}{س^{٢} - س - ٦}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٨}{٣}$ (جـ) ٣ (د) −٣

(٤٢) $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٣\ \text{جتا}\ س}{\pi - ٢\ س}$ = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{-٣}{٢}$ (د) −٣

(٤٣) $\lim_{\text{س} \to \pi} \frac{\text{جا س}}{\pi - \text{س}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) ١   (ب) π^{2} (جـ) π (د) $-\pi$

(٤٤) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا س}}{\text{س}^{2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) ١   (ب) ليس لها وجود.   (جـ) صفر   (د) $\frac{1}{2}$

(٤٥) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا (جا س)}}{3\ \text{س}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) صفر   (ب) ١   (جـ) $\frac{1}{3}$ (د) ٣

(٤٦) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ حيث س بالتقدير الستينى.

(أ) ١   (ب) $\frac{\pi}{180}$ (جـ) $\frac{180}{\pi}$ (د) π

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا } 2\ \text{س}}{\text{ظا } 5\ \text{س}}$ «$\frac{2}{5}$»

(٢) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا } \frac{\text{س}}{5}}{\text{ظا } \frac{2\ \text{س}}{3}}$ «$\frac{3}{10}$»

(٣) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا } 3\ \text{س} - \text{جا } 2\ \text{س}}{5\ \text{س}}$ «$\frac{1}{5}$»

(٤) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا س} + \text{ظا س}}{\text{جا س}}$ «٢»

(٥) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س جتا } 3\ \text{س}}{\text{ظا } 2\ \text{س}}$ «$\frac{1}{2}$»

(٦) $\lim_{\text{س} \to 0} \left(\frac{5\ \text{س}}{\text{جا س}} - \frac{\text{ظا } 2\ \text{س}}{\text{س}}\right)$ «٣»

(٧) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{3\ \text{س} + \text{جا س}}{2\ \text{س} + \text{ظا } 3\ \text{س}}$ «$\frac{4}{5}$»

(٨) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{2\ \text{جا س} + 4\ \text{ظا } 2\ \text{س}}{2\ \text{س} + \text{جا } 3\ \text{س}}$ «٢»

(٩) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا س} - 3\ \text{ظا س}}{5\ \text{س جتا س}}$ «$\frac{-2}{5}$»

(١٠) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{3\ \text{س}}{5\ \text{ظا س} - 2\ \text{جا } 2\ \text{س}}$ «٣»

(١١) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س} + \text{س جتا س}}{\text{جا س جتا س}}$ «٢»

(١٢) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا } 3\ \text{س} - \text{جا } 4\ \text{س}}{\text{س}^{2} + 2\ \text{س}}$ «$-\frac{1}{2}$»

(١٣) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}^{2} + \text{جا } 3\ \text{س}}{5\ \text{س جتا } 2\ \text{س}}$ «$\frac{3}{5}$»

(١٤) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا } 2\ \text{س} + 2\ \text{س جتا س}}{\text{جا } 3\ \text{س}}$ «$\frac{4}{3}$»

(١٥) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{2}{\text{س}} \text{ جا } \frac{\text{س}}{7}$ «$\frac{2}{7}$»

(١٦) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1}{\text{س}} \left(\text{جا } \frac{\text{س}}{5} + \text{ظا } \frac{\text{س}}{5}\right)$ «$\frac{2}{5}$»

(١٧) $\lim_{\text{س} \to 0} \left(\frac{3}{5\ \text{س}} + 4\right) \text{جا } 4\ \text{س}$ «$\frac{12}{5}$»

(١٨) $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{جا } (3\ \text{س} - 9)}{2\ \text{س} - 6}$ «$\frac{3}{2}$»

(١٩) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا } 24\ \text{س} \times \text{جتا } 6\ \text{س}}{\text{ظا } 6\ \text{س} \times \text{جتا } 24\ \text{س}}$ «٤»

(٢٠) $\lim_{\text{س} \to \frac{1}{2}} \frac{\text{س جتا } (-2\ \text{س} + 1)}{\text{س}^{2} + \text{س}}$ «$\frac{2}{3}$»

(٢١) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}^{2}\ \text{س}}{\text{س}}$ «صفر»

٢ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 3x}{5x^2}$ «$\frac{9}{5}$»

(٢) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 3x}{\tan^2 2x}$ «$\frac{9}{4}$»

(٣) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x \tan 2x}$ «$\frac{1}{8}$»

(٤) $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin 2x}{\sin x \tan 3x}$ «$\frac{2}{3}$»

(٥) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^3 2x}{4x^3}$ «٢»

(٦) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \tan 2x}{\sin^4 2x}$ «$\frac{1}{8}$»

(٧) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x \tan^2 5x}{x^2 \sin x}$ «١٠٠»

(٨) $\lim_{x \to 0} \frac{x \tan 2x}{x^2 + \sin^2 3x}$ «$\frac{1}{5}$»

(٩) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \tan^2 2x}{2x^2 + \sin^2 3x}$ «$\frac{5}{11}$»

(١٠) $\lim_{x \to 0} \frac{x \tan x}{4x^2 - \sin^2 3x}$ «$\frac{1}{-5}$»

(١١) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^3 + x \sin 5x}{x^2 - \tan^2 3x}$ «$\frac{-5}{8}$»

(١٢) $\lim_{x \to 0} \frac{2x + 5\tan x + 3\sin x}{\sin 2x \cos 2x}$ «٥»

(١٣) $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin 2x + \sin^2 2x}{\tan^2 3x + x^2}$ «$\frac{3}{5}$»

(١٤) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x^2 + \sin^2 5x}{x^2}$ «٢٨»

(١٥) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x^3 + \sin^3 5x}{2x^3}$ «٦٥»

(١٦) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{2x^2 + \sin 3x}{2x^2 + \tan 6x}\right)^4$ «$\frac{1}{16}$»

(١٧) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x + \tan^2 3x + \tan^2 5x}{x^2}$ «٣٥»

(١٨) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \times \sin^2 2x \times \sin^3 4x}{x^6}$ «٢٥٦»

(١٩) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 6x - \sin(-3x)}{x(\cos 5x + \cos 2x)}$ «$\frac{9}{2}$»

(٢٠) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$ «$2\sqrt{2}$»

(٢١) $\lim_{x \to 3} \frac{\tan(x-3)}{x^3 - 27}$ «$\frac{1}{27}$»

(٢٢) $\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + x - 2}$ «$\frac{1}{3}$»

٣ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\lim_{x \to 0} \frac{3(1 - \cos x)}{x}$ «٠»

(٢) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x}$ «٠»

(٣) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + \sin x}{1 - \cos x - \sin x}$ «١-»

(٤) $\lim_{x \to 0} \frac{2 - \cos 3x - \cos 4x}{x}$ «٠»

(٥) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^2}$ «٠»

(٦) $\lim_{x \to 0} \frac{x - x\cos x}{\sin^2 3x}$ «٠»

(٧) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{4x^2}$ «$\frac{9}{4}$»

(٨) $\lim_{x \to 0} \frac{4x^2}{1 - \cos^2 \frac{1}{2}x}$ «١٦»

(٩) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{3 - 3\,\text{جتا}^2\, 4\,\text{س}}{8\,\text{س}^2}$ «٦»

(١٠) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{قا}^2\,\text{س} - 1}{\text{س}^2}$ «١»

(١١) 📖 $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}^2}$ «$\frac{1}{2}$»

(١٢) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{4 - 4\,\text{جتا}\,\text{س}}{\text{جا}^2\, 3\,\text{س}}$ «$\frac{2}{9}$»

(١٣) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\, 2\,\text{س}}{\text{س}\ \text{ظا}\, 2\,\text{س}}$ «١»

(١٤) 📖 $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\, 3\,\text{س}}{\text{جتا}^2\, 2\,\text{س} - 1}$ «$-\frac{9}{8}$»

---

٤ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{ظتا}\, 3\,\text{س}\ \text{جا}\, 5\,\text{س}$ «$\frac{5}{3}$»

(٢) 📖 $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{س}\,(\text{قتا}\, 2\,\text{س} - \text{ظتا}\, 3\,\text{س})$ «$\frac{1}{6}$»

(٣) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} 3\,\text{س}\ \text{ظا}\, 2\,\text{س}\ \text{قتا}^2\, 3\,\text{س}$ «$\frac{2}{3}$»

(٤) 📖 $\lim\limits_{\text{س} \to 0} 6\,\text{س}^2\ \text{قتا}\, 2\,\text{س}\ \text{ظتا}\,\text{س}$ «٣»

(٥) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{قتا}\, 4\,\text{س}\ \text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)$ «$\frac{1}{4}$»

(٦) 📖 $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}}{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}$ «١»

(٧) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}\ \text{ظتا}^2\, 2\,\text{س}}{\text{قتا}\, 3\,\text{س}}$ «$\frac{3}{4}$»

(٨) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{ظا}\left(2\,\text{س} - \frac{\pi}{2}\right)}{8\,\text{س} - 2\pi}$ «$\frac{1}{4}$»

(٩) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}\left(2\,\text{س} - \frac{\pi}{2}\right)}{\text{ظا}\,(4\,\text{س} - \pi)}$ «$\frac{1}{2}$»

(١٠) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}{\text{ظتا}\left(\frac{\pi}{2} - 3\,\text{س}\right)}$ «$\frac{1}{3}$»

(١١) $\lim\limits_{(\text{س} - \pi) \to 0} \frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س} - \pi}$ «-1»

(١٢) $\lim\limits_{\text{س} \to -\pi} \frac{\text{ظا}\,\text{س}}{\text{س} + \pi}$ «١»

(١٣) 📖 $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\,\text{س} - \pi}{\text{جتا}\,\text{س}}$ «-2»

(١٤) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{ظتا}\,\text{س}}{\pi - 2\,\text{س}}$ «$\frac{1}{2}$»

(١٥) 📖 $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \frac{\text{جا}\,\pi\,\text{س}}{1 - \text{س}}$ «π»

(١٦) $\lim\limits_{\text{س} \to -1} \frac{1 + \text{س}}{\text{جتا}\,\frac{\pi}{2}\,\text{س}}$ «$\frac{2}{\pi}$»

(١٧) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} (1 - \text{س})\ \text{ظا}\,\frac{\pi\,\text{س}}{2}$ «$\frac{2}{\pi}$»

---

٥ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}}$ أوجد :

(١) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{د}(\text{س})$ «١»

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \text{د}(\text{س})$ «$\frac{2}{\pi}$»

(٣) $\lim\limits_{\text{س} \to \pi} \text{د}(\text{س})$ «صفر»

---

٦ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\lim\limits_{\text{س} \to 5} \frac{\text{جا}\,(\text{س} - 5)}{\text{س}^2 - 25}$ «$\frac{1}{10}$»

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to 5} \frac{\text{جا}^2\,(\text{س} - 5)}{(\text{س} - 5)^2}$ «١»

(٣) $\lim\limits_{\text{س} \to 5} \frac{\text{جا}\,(\text{س} - 5)^2}{(\text{س} - 5)}$ «صفر»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حتا س} - \text{حتا}^{\text{أ}} \text{س}}{\text{س}^٢} = ١$ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (ج) ٢ (د) ٣

② $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{س قا} \left(\dfrac{٢\text{س} + \pi}{٢} \right) =$ ....

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) صفر (ج) −١ (د) $\frac{١}{٢}$

③ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{طا س}}{\text{حتا س} - \text{حا س}} =$ ....

(أ) ١ (ب) −١ (ج) ٢ (د) $\sqrt{٢}$

④ $\underset{\text{س} \to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا}(\text{س}^٢ - ٥)}{\text{طا } \pi \text{ س}^٢} =$ ....

(أ) $\frac{٥}{\pi}$ (ب) $\frac{٢}{\pi}$ (ج) $\frac{١}{\pi}$ (د) $\frac{-٥}{\pi}$

⑤ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا س} + \text{حا ٢س} + \text{حا ٣س} + \cdots + \text{حا ١٠س}}{\text{طا س} + \text{طا ٢س} + \text{طا ٣س} + \cdots + \text{طا ١٠س}} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ١٠ (د) ٥٥

---

٢ أوجد كلاً مما يأتي :

① $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٣ \text{ طا}^٢ \text{س} - ٤ \text{ طا س} + ٧}{٥ + ٢ \text{ طا}^٢ \text{س}}$ «$\frac{٣}{٢}$»

② $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا}(\text{س}^٢ - \text{س} - ٢)}{\text{س} + ١}$ «−٣»

③ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \text{س} \left(\text{طا } \frac{٤}{\text{س}} + \text{حا } \frac{٣}{\text{س}} \right)$ «٧»

④ 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا}(\text{حا س})}{٥ \text{ حا س}}$ «$\frac{١}{٥}$»

⑤ 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا}(١ - \text{حتا س})}{١ - \text{حتا س}}$ «١»

⑥ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{طا}(\text{طا ٥س})}{٤\text{س}}$ «$\frac{٥}{٤}$»

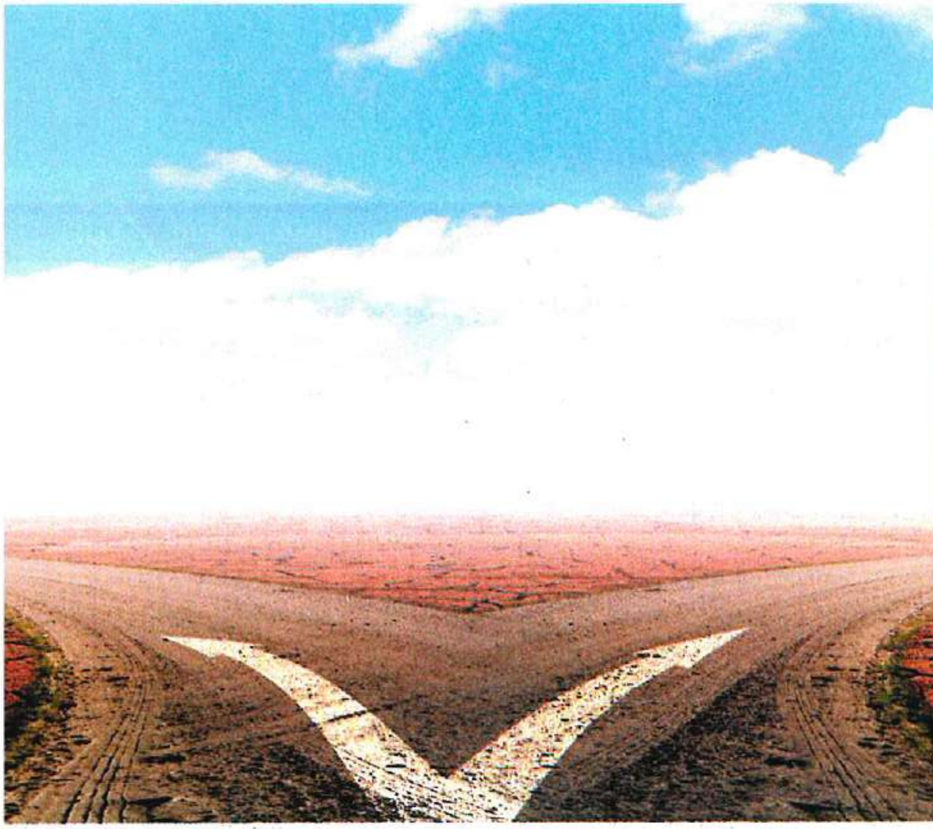
⑦ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{س}} \left(\dfrac{٢ \text{ طا س}}{١ + \text{طا}^٢ \text{س}} \right)$ «٢»

⑧ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{طا}(\text{حتا س})}{٢\text{س} - \pi}$ «$\frac{-١}{٢}$»

⑨ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{حا س}}{٢\text{س} - \pi}$ «صفر»

⑩ $\underset{٢\text{س} \to \pi}{\text{نهـا}} \left(\frac{\pi}{٢} - \text{س} \right) \text{ظتا} (\pi - ٢\text{س})$ «$\frac{١}{٢}$»

⑪ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حتا س}}{\text{حتا ٣س}}$ «$\frac{-١}{٣}$»



الدرس 6

بحث وجـود نهايـة للدالة مجزأة المجال

نلاحظ أن الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢س + ١ & ، س < ٢ \\ ٣ - س^٢ & ، س \geq ٢ \end{cases}$ مجزأة المجال

أى أن د (س) = ٢ س + ١ لقيم س $\in$]− ∞ ، ٢[

د (س) = ٣ − $س^٢$ لقيم س $\in$ [٢ ، ∞[

فمثلًا : د (−٣) = ٢ (−٣) + ١ = −٥ ، د (٤) = ٣ − $(٤)^٢$ = −١٣

وقد سبق وشرحنا كيفية إيجاد قيمة النهاية اليمنى واليسرى لمثل هذه الدوال بيانيًا ولكننا الآن نشرح كيفية تحقيق ذلك جبريًا (إن أمكن)

تعريف

الدالة د : د (س) تؤول للنهاية ل عندما س ← أ إذا وفقط إذا كانت نهايتاها اليمنى واليسرى عند أ موجودتين وكل منهما تساوى ل

أى أن $\underset{س \to أ}{نها}$ د (س) = ل $\Longleftrightarrow$ د $(أ^+)$ = د $(أ^-)$ = ل

ملاحظات

١ عند إيجاد $\underset{س \to أ}{نها}$ د (س) ليس من الضرورى أن تكون الدالة معرفة عند س = أ ، فقط يجب أن تكون معرفة فى فترة على يسار أ وفترة أخرى على يمين أ

٢ عند إيجاد $\underset{س \to أ}{نها}$ د (س) يراعى بحث كل من النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة ثم المقارنة بين النهايتين (إن وجدتا) كما يلى :

* إذا كان : د $(أ^+)$ = د $(أ^-)$ = ل فإن : $\underset{س \to أ}{نها}$ د (س) = ل
* إذا كان : د $(أ^+)$ $\neq$ د $(أ^-)$ فإن : $\underset{س \to أ}{نها}$ د (س) غير موجودة

٣ أما إذا كانت قاعدة الدالة واحدة على يمين ويسار أ مباشرة فيمكن بحث نهاية الدالة مباشرة دون بحث النهاية اليمنى واليسرى.

مثال ١

إذا كانت : د (س) = { ٣ س + ١ ، س < ١ ؛ ٥ − س ، س > ١ } **فأوجد كلًا من :**

[١] نهـــا (س ← −٢) د (س)   [٢] نهـــا (س ← ٣) د (س)   [٣] نهـــا (س ← ١) د (س)

الحـــل

[١] ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين ويسار س = −٢ مباشرة وهى د (س) = ٣ س + ١

∴ نهـــا (س ← −٢) د (س) = نهـــا (س ← −٢) (٣ س + ١) = ٣ (−٢) + ١ = −٥

[٢] ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين ويسار س = ٣ مباشرة وهى : د (س) = ٥ − س

∴ نهـــا (س ← ٣) د (س) = نهـــا (س ← ٣) (٥ − س) = ٥ − ٣ = ٢

[٣] ∵ قاعدة الدالة على يسار ١ تختلف عن قاعدتها على يمين ١ لذلك يجب بحث كل من النهاية اليمنى واليسرى للدالة عند س = ١

∵ د (١⁻) = نهـــا (س ← ١⁻) (٣ س + ١) = ٣ × ١ + ١ = ٤

، د (١⁺) = نهـــا (س ← ١⁺) (٥ − س) = ٥ − ١ = ٤

∴ د (١⁻) = د (١⁺) = ٤

∴ نهـــا (س ← ١) د (س) = ٤

> **لاحـظ أن**
> الدالة د قاعدتها على يسار س = ١
> هى : د (س) = ٣ س + ١
> وقاعدتها على يمين س = ١
> هى : د (س) = ٥ − س

مثال ٢

إذا كانت : د (س) = { س٢ + ٢ ، س ≤ −٢ ؛ ٢ س + ٣ ، س > −٢ } **فابحث وجود :** نهـــا (س ← −٢) د (س)

الحـــل

∵ د (−٢⁻) = نهـــا (س ← −٢⁻) (س٢ + ٢) = (−٢)٢ + ٢ = ٦

، د (−٢⁺) = نهـــا (س ← −٢⁺) (٢ س + ٣) = ٢ (−٢) + ٣ = −١

∵ د (−٢⁻) ≠ د (−٢⁺)

∴ نهـــا (س ← −٢) د (س) غير موجودة.

> **لاحـظ أنه**
> رغم أن الدالة معرفة عند س = −٢
> حيث د (−٢) = ٦ إلا أن ذلك
> لا دخل له فى وجود أو عدم
> وجود نهاية للدالة عند س = −٢

مثال ٣

إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{|\text{س} - ٣|}{\text{س} - ٣}$ **ابحث وجود :** $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$

الحل

$$\because |\text{س} - ٣| = \begin{cases} \text{س} - ٣ & ، \text{س} \geq ٣ \\ -(\text{س} - ٣) & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$$

$$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س} - ٣}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} > ٣ \\ \dfrac{-(\text{س} - ٣)}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} < ٣ \end{cases} = \begin{cases} ١ & ، \text{س} > ٣ \\ -١ & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$$

$\therefore \text{د}(٣^+) = ١$ ، $\text{د}(٣^-) = -١$ $\qquad \therefore \text{د}(٣^+) \neq \text{د}(٣^-)$

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$ غير موجودة.

مثال ٤

إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}|\text{س}| - ١ & ، \text{س} < ٠ \\ \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} - ٢ & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$ **فأوجد :** $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$

الحل

$$\because |\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & ، \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$$

$$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}(-\text{س}) - ١ & ، \text{س} < ٠ \\ \dfrac{\text{س}}{\text{س}} - ٢ & ، \text{س} > ٠ \end{cases} = \begin{cases} -\text{س}^٢ - ١ & ، \text{س} < ٠ \\ -١ & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$$

$\because \text{د}(٠^-) = \underset{\text{س} \leftarrow ٠^-}{\text{نهـا}} (-\text{س}^٢ - ١) = -١$ ، $\text{د}(٠^+) = \underset{\text{س} \leftarrow ٠^+}{\text{نهـا}} (-١) = -١$

$\therefore \text{د}(٠^-) = \text{د}(٠^+) = -١ \qquad \therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = -١$

ملاحظة

إذا كانت : $\text{ص} = |\text{د}(\text{س})|$ حيث د دالة كثيرة حدود فإن : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ص} = |\text{د}(\text{أ})|$

وذلك باستخدام التعويض المباشر (ولا داعى لإعادة تعريف المقياس).

فمثلًا : إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = |\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٣|$ فإن : $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \text{صفر}$

، إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = |\text{س} + ١| - |\text{س} - ٣|$ فإن : $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٤$

مثال ٥

إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ٤ & ، \text{س} < -٣ \\ ٣\text{س} + ٧ & ، -٣ < \text{س} < ٥ \\ ٥ - \text{س} & ، \text{س} > ٥ \end{cases}$

فابحث وجود : ١ $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ ٢ $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$

الحـل

١ $\text{د}(-٣^-) = \underset{\text{س} \leftarrow -٣^-}{\text{نهـا}} (٢\text{س} + ٤) = -٦ + ٤ = -٢$

، $\text{د}(-٣^+) = \underset{\text{س} \leftarrow -٣^+}{\text{نهـا}} (٣\text{س} + ٧) = ٣(-٣) + ٧ = -٢$

$\therefore \text{د}(-٣^-) = \text{د}(-٣^+) = -٢$ $\therefore \underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = -٢$

٢ $\text{د}(٥^-) = \underset{\text{س} \leftarrow ٥^-}{\text{نهـا}} (٣\text{س} + ٧) = ١٥ + ٧ = ٢٢$

، $\text{د}(٥^+) = \underset{\text{س} \leftarrow ٥^+}{\text{نهـا}} (٥ - \text{س}) = ٥ - ٥ = \text{صفر}$

$\because \text{د}(٥^-) \neq \text{د}(٥^+)$ $\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ غير موجودة.

مثال ٦

إذا كانت الدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{حا}(\text{س} - ٤)}{(\text{س} - ٤)} & ، \text{س} < ٤ \\ \text{ظا} \dfrac{\pi}{١٦} \text{س} & ، ٤ < \text{س} < ٨ \end{cases}$ **أوجد :** $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$

الحـل

$\text{د}(٤^-) = \underset{\text{س} \leftarrow ٤^-}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا}(\text{س} - ٤)}{(\text{س} - ٤)} = \underset{(\text{س} - ٤) \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا}(\text{س} - ٤)}{(\text{س} - ٤)} = ١$

، $\text{د}(٤^+) = \underset{\text{س} \leftarrow ٤^+}{\text{نهـا}} \text{ظا} \dfrac{\pi}{١٦} \text{س} = \text{ظا} \dfrac{\pi}{٤} = ١$

$\therefore \text{د}(٤^-) = \text{د}(٤^+) = ١$ $\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = ١$

نهاية الدالة المعرفة على فترة عند أحد طرفيها

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة]أ ، ب[أو المغلقة [أ ، ب] فإننا نلاحظ أن :

١ الدالة ليست معرفة على يسار النقطة أ فإننا نبحث النهاية اليمنى فقط [$\text{د}(\text{أ}^+)$]

وتكون فى هذه الحالة : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^-}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ غير موجودتين.

[٢] الدالة ليست معرفة على يمين النقطة ب فإننا نبحث النهاية اليسرى فقط [د (ب⁻)]

وتكون فى هذه الحالة : $\lim\limits_{س \to ب^{+}}$ د (س) ، $\lim\limits_{س \to ب}$ د (س) غير موجودتين.

أى أن : نهاية الدالة عند النقطة الطرفية غير موجودة ويكون للدالة عند هذه النقطة نهاية من جهة واحدة فقط [يمنى أو يسرى]

مثال ٧

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{٢ س}{\text{جا } س} & ، \quad \frac{-\pi}{٢} < س < ٠ \\ ٢ \text{ جتا } \frac{٤}{٣} س & ، \quad ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

ابحث وجود : [١] د $\left(-\frac{\pi}{٢}^{+}\right)$ ، د $\left(-\frac{\pi}{٢}^{-}\right)$ ، $\lim\limits_{س \to -\frac{\pi}{٢}}$ د (س)

[٢] $\lim\limits_{س \to ٠}$ د (س) [٣] $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ د (س)

الحـل



مجال الدالة د هو $\left]-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right[- \{٠\}$

[١] د $\left(-\frac{\pi}{٢}^{+}\right) = \lim\limits_{س \to -\frac{\pi}{٢}^{+}}$ د (س) $= \lim\limits_{س \to -\frac{\pi}{٢}^{+}} \frac{٢ س}{\text{جا } س} = \frac{-\pi}{\text{جا } \frac{-\pi}{٢}} = \frac{-\pi}{-١} = \pi$

، د $\left(-\frac{\pi}{٢}^{-}\right)$ غير موجودة.

∴ $\lim\limits_{س \to -\frac{\pi}{٢}}$ د (س) غير موجودة [لأن الدالة غير معرفة على يسار س = $\frac{-\pi}{٢}$]

[٢] ∵ د معرفة على يسار ويمين س = ٠ بقاعدتين مختلفتين

∴ د $(٠^{-}) = \lim\limits_{س \to ٠^{-}} \frac{٢ س}{\text{جا } س} = \lim\limits_{س \to ٠^{-}} \frac{٢ \times ١}{\frac{\text{جا } س}{س}} = ٢ \times ١ = ٢$

، د $(٠^{+}) = \lim\limits_{س \to ٠^{+}} ٢ \text{ جتا } \frac{٤ س}{٣} = ٢ \text{ جتا } ٠ = ٢ \times ١ = ٢$

∵ د (٠^{-}) = د $(٠^{+}) = ٢$ ∴ $\lim\limits_{س \to ٠}$ د (س) = ٢

[٣] ∵ د معرفة فقط على يسار س = $\frac{\pi}{٢}$

∴ $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ د (س) غير موجودة.

مثال ٨

ابحث وجود نهاية للدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٣}$ عندما س ← ٣

الحل

مجال الدالة هو [٣ ، ∞[



∴ الدالة د معرفة فقط على يمين س = ٣

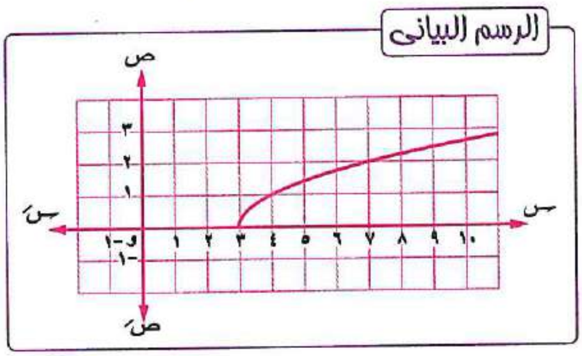
∴ $\lim_{س \to ٣^+}$ د (س) = $\lim_{س \to ٣^+} \sqrt{س - ٣}$

= صفر

، $\lim_{س \to ٣^-}$ د (س) غير موجودة

[لأن الدالة غير معرفة على يسار ٣]

∴ $\lim_{س \to ٣}$ د (س) غير موجودة.



مثال ٩

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{(س + ٢)^٢ - ٤}{س^٢ + س} & ، س > ٠ \\ \dfrac{١ - جتا^٢ ٢ س}{س^٢} & ، س < ٠ \end{cases}$ **أوجد :** $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

الحل

∵ د (٠^+) = $\lim_{س \to ٠^+} \dfrac{(س + ٢)^٢ - ٤}{س^٢ + س}$ = $\lim_{س \to ٠^+} \dfrac{س^٢ + ٤ س + ٤ - ٤}{س (س + ١)}$

= $\lim_{س \to ٠^+} \dfrac{س (س + ٤)}{س (س + ١)}$ = $\lim_{س \to ٠^+} \dfrac{س + ٤}{س + ١}$ = ٤

، د (٠^-) = $\lim_{س \to ٠^-} \dfrac{١ - جتا^٢ ٢ س}{س^٢}$ = $\lim_{س \to ٠^-} \dfrac{جا^٢ ٢ س}{س^٢}$ = $٢^٢$ = ٤

∴ د (٠^+) = د (٠^-) = ٤ ∴ $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = ٤

مثال ١٠

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} طا ٤ س ظتا ٩ س & ، -\dfrac{\pi}{٩} < س < ٠ \\ \dfrac{١}{٩} (أ^٢ + ٢) & ، س > ٠ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٠

أوجد قيمة : أ

الحـــل

$\text{د}(\cdot^-) = \underset{\text{س} \leftarrow \cdot^-}{\text{نهـا}} \text{ طا ٤ س قتا ٩ س} = \underset{\text{س} \leftarrow \cdot^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا ٤ س}}{\text{حا ٩ س}} = \underset{\text{س} \leftarrow \cdot^-}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{طا ٤ س}}{\text{س}}}{\frac{\text{حا ٩ س}}{\text{س}}} = \frac{٤}{٩}$

، $\text{د}(\cdot^+) = \frac{١}{٩}(\text{أ}^٢ + ٢)$

، ∵ الدالة لها نهاية عند س = ٠ ∴ $\text{د}(\cdot^-) = \text{د}(\cdot^+)$ ∴ $\frac{١}{٩}(\text{أ}^٢ + ٢) = \frac{٤}{٩}$

∴ $\text{أ}^٢ + ٢ = ٤$ ∴ $\text{أ}^٢ = ٢$ ∴ $\text{أ} = \pm\sqrt{٢}$

مثال ١١

إذا كانت الدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} & \text{، س} \geq \cdot \\ \frac{١}{\text{س}} & \text{، س} < \cdot \end{cases}$

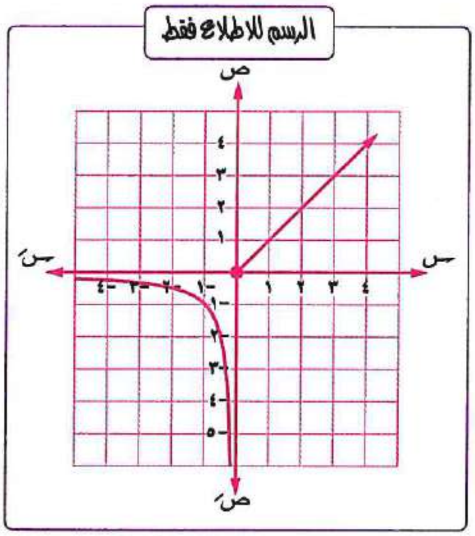
أوجد : [١] $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot^+}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ [٢] $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot^-}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ [٣] $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$

الحـــل

[١] $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot^+}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \leftarrow \cdot^+}{\text{نهـا}} \text{س} = \text{صفر}$

[٢] $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot^-}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \leftarrow \cdot^-}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}} = -\infty$

[٣] $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ غير موجودة.



مثال ١٢

ابحث وجود : $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا} |\text{س}|}{\text{س}}$

الحـــل

∵ $|\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & \text{، س} \geq \cdot \\ -\text{س} & \text{، س} < \cdot \end{cases}$ ∴ $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا}(\text{س})}{\text{س}} = ١$

، $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا}(-\text{س})}{\text{س}} = -١$ ∴ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow \cdot}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا} |\text{س}|}{\text{س}}$ غير موجودة.

تمارين 17

على بحث وجود نهاية للدالة مجزأة المجال

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى ● فهم ○ تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -٢ &، \text{س} > ٠ \\ ١ &، \text{س} < ٠ \end{cases}$ فإن :

أولًا : $\lim\limits_{\text{س} \to -٣} \text{د}(\text{س}) = $ ....

(أ) -٢ (ب) ١ (جـ) -١ (د) غير موجودة.

ثانيًا : $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \text{د}(\text{س}) = $ ....

(أ) -٢ (ب) ١ (جـ) -١ (د) غير موجودة.

ثالثًا : $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د}(\text{س}) = $ ....

(أ) -٢ (ب) ١ (جـ) -١ (د) غير موجودة.

② إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ - ١ &، \text{س} > ٢ \\ ٣\text{س} + ١ &، \text{س} \leq ٢ \end{cases}$ فإن : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س}) = $ ....

(أ) ليس لها وجود. (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) ٧

③ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{|\text{س} - ٢|}{\text{س} - ٢} = $ .... ، $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{|\text{س} - ٢|}{\text{س} - ٢} = $ ....

(أ) غير موجودة ، صفر (ب) غير موجودتين. (جـ) غير موجودة ، -١ (د) ١ ، -١

④ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س} - ١ &، \text{س} \neq ٢ \\ ٦ &، \text{س} = ٢ \end{cases}$ فإن : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س}) = $ ....

(أ) -٥ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

⑤ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٣ - \text{س} &، \text{س} < ١ \\ ٤ &، \text{س} = ١ \\ \text{س}^٢ + ١ &، \text{س} > ١ \end{cases}$ فإن : $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{د}(\text{س}) = $ ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

(٦) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{حا س}{س} &، -\frac{\pi}{٢} < س < ٠ \\ حتا س &، ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$ فإن : $\lim\limits_{س \to صفر} د(س) =$ ....

(أ) $\frac{٢}{\pi}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) ١ (د) صفر

(٧) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} &، س \neq ٢ \\ ظا \frac{\pi}{٢ س} &، س = ٢ \end{cases}$ فإن : $\lim\limits_{س \to ٢} د(س) =$ ....

(أ) ١ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

(٨) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{٢ حا س}{\pi - س} &، س < \pi \\ ١ - حتا س &، س > \pi \end{cases}$ فإن : $\lim\limits_{س \to \pi} د(س) =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) غير موجودة. (د) صفر

(٩) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{حا (س - ١)}{(س - ١)} &، س < ١ \\ ظا \frac{\pi س}{٤} &، ١ < س < ٢ \end{cases}$ فإن : $\lim\limits_{س \to ١} د(س) =$ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) غير موجودة.

(١٠) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{٢ س + حا س}{ظا ٢ س + ٤ س} &، ٠ < س < \frac{\pi}{٤} \\ ٥ س + \frac{١}{٢} &، س < ٠ \end{cases}$ فإن : $\lim\limits_{س \to ٠} د(س) =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) غير موجودة.

(١١) $د(س) = \begin{cases} س + ١ & \text{عندما } س < أ \\ ٣ س - ١ & \text{عندما } س > أ \end{cases}$ ، $\lim\limits_{س \to أ} د(س)$ موجودة فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٢) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} حا ٤ س ظتا ٩ س &، \frac{-\pi}{١٨} < س < ٠ \\ ٤ س + أ^٢ &، س > ٠ \end{cases}$ وكانت : $\lim\limits_{س \to ٠} د(س)$ موجودة

فإن : أ = ...

(أ) $\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\pm \frac{٢}{٣}$ (د) $\pm \frac{٤}{٩}$

(١٣) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} أ + حتا س &، س < ٠ \\ \frac{ظا ٢ س}{أ س} &، ٠ < س < \frac{\pi}{٤} \end{cases}$ وكانت $\lim\limits_{س \to ٠} د(س)$ موجودة

فإن : أ = ...

(أ) صفر أ، ١ (ب) ١ أ، −٢ (جـ) ٢ أ، ٣ (د) ١ أ، ٢

(١٤) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{ظا ٢س}{لو_٢ ٨ س} & ، \frac{-\pi}{٤} < س < ٠ \\ س + \frac{٢}{٣} & ، س > ٠ \end{cases}$ فإن : $\underset{س \to ٠}{نهـــا} د(س) =$ ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) غير موجودة.

(١٥) 📖 إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{ظا س}{\pi - ٢س} & ، ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \\ جا(\pi - س) & ، س > \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

فإن : $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{نهـــا} د(س) =$ ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) غير موجودة.

(١٦) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{جا^٢ ٢س}{س^٢} & ، س < ٠ \\ ٢أ + ٣ جتا س & ، س > ٠ \end{cases}$ وكانت $\underset{س \to ٠}{نهـــا} د(س)$ موجودة.

فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) $-\frac{١}{٢}$

(١٧) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{٣س - |س^٢|}{س} & ، س < ٠ \\ ٣أ + ٤س & ، س > ٠ \end{cases}$ وكانت : $\underset{س \to ٠}{نهـــا} د(س)$ موجودة.

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) ١

(١٨) $\underset{س \to ٠^-}{نهـــا} \frac{\sqrt{١ - جتا^٢ س}}{س} =$ ....

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٢ (د) صفر

(١٩) إذا كانت : $د(س) = \frac{٢س - ٦}{|س - ٣|}$ فإن : $\left(د(٣^+)\right)^٢ + \left(د(٣^-)\right)^٢ =$ ....

(أ) ٨ (ب) صفر (جـ) ٤ (د) -٤

(٢٠) إذا كان : $\underset{س \to أ}{نهـــا} \frac{س^٢ - أ^٢}{س - أ} = \underset{س \to -٢}{نهـــا} (|س| + ٨)$ فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) -٥ (جـ) ٤ (د) ١٠

(٢١) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{س^٦ - ٦٤}{س^٤ - ١٦} & ، س < ٢ \\ أس & ، س > ٢ \end{cases}$ حيث $\underset{س \to ٢}{نهـــا} د(س)$ لها وجود

فإن : قيمة أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٢٢) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٢ \text{ جتا } س + \frac{١٥ \text{ جا } س}{س} & ، س > ٠ \\ \frac{س^٦ - ٦٤}{س^٣ - ٨} & ، س < ٠ \end{cases}$ وكانت د (س) لها نهاية عندما س = ٠

فإن : ٢ = ...

(أ) ١ (ب) −٥ (جـ) −٧ (د) ٧

(٢٣) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٣س^٢ + ٢س - ٢ & ، س > ٣ \\ ٢س + ب & ، س < ٣ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٣ وتساوى ١٦

فإن : ٢ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) ١٠ (جـ) −١٣ (د) ٧

(٢٤) إذا كانت الدالة د نهايتها موجودة عندما س ← −٣ حيث

د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} & \text{عندما } س < -٣ \\ س + ٢ & \text{عندما } س > -٣ \end{cases}$ فإن : ٢ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) −١

(٢٥) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٣س - ٢ & ، س < -١ \\ ٢س + ب & ، -١ < س < ٣ \\ ٦ - س & ، س > ٣ \end{cases}$ لها نهاية عند س = −١ ، س = ٣

فإن : ٢ + ب = ...

(أ) ٢ (ب) −٣ (جـ) −١ (د) صفر

(٢٦) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{٢س}{\sqrt{س + ٤} - ٢} & ، س > ٠ \\ \frac{\text{جا } ٢س}{٢س} & ، س < ٠ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٠

فإن : ٢ = ...

(أ) $\pm \frac{١}{٢}$ (ب) $\pm \frac{١}{\sqrt{٣}}$ (جـ) $\pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٢٧) إذا كانت $\lim_{س \to ٢^+}$ د (س) = ٣ ، $\lim_{س \to ٢^-}$ د (س) = ٦

، $\lim_{س \to ٢^+}$ ر (س) = ٨ ، $\lim_{س \to ٢^-}$ ر (س) = ٤

فإن $\lim_{س \to ٢}$ (د (س) . ر (س)) = ...

(أ) ١٨ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٢ (د) غير موجودة

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \text{س} < ٣ \\ ٣\text{س} + ١ & ، \text{س} \geq ٣ \end{cases}$ **أوجد :** $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ «١٠»

---

٢ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١٢}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} > ٣ \\ ٢\text{س} - ٧ & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$ **ابحث وجود :** $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ «-١»

---

٣ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٣\text{س}}{\text{جا}\text{س}} & ، -\pi < \text{س} < ٠ \\ \text{جتا}\, ٣\text{س} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$ **ابحث وجود :** $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ «غير موجودة»

---

٤ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٥\text{س} + \text{ظا}\, ٢\text{س}}{٦\text{س} + \text{جا}\text{س}} & ، ٠ < \text{س} < \dfrac{\pi}{٤} \\ \text{جتا}\text{س} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$ **ابحث وجود :** $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ «١»

---

٥ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ٢ & ، \text{س} < ٠ \\ \text{س}^{٢} & ، ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \\ ٢\text{س} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$ **فابحث وجود كل مما يأتي :**

(١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ (٢) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ (٣) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ «غير موجودة ، ١ ، ٤»

---

٦ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س} - ٣| & ، \text{س} \neq ٣ \\ ٢ & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$ **ابحث وجود :** $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ «صفر»

---

٧ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ١} - ١} & ، \text{س} > ٠ \\ \dfrac{٢\text{س}}{\text{جا}\text{س}} & ، -\pi < \text{س} < ٠ \end{cases}$ **أوجد :** $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ «٢»

---

٨ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{(\text{س} - ٣)^{٦} - ١}{\text{س} - ٤} & ، \text{س} > ٤ \\ \text{س} + ٢ & ، \text{س} < ٤ \end{cases}$ **أوجد :** $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ «٦»

---

٩ **أوجد قيمة كل من : م ، ك إذا كانت :**

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = ٧$ ، $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٣\text{م} & ، \text{س} < ٢ \\ ٥\text{س} + \text{ك} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$ «١ ، -٣»

١٠ 📖 إذا كانت : $\underset{س \to ٠}{نهـا}$ د (س) = ٢ حيث د (س) = $\begin{cases} \frac{جا ٢ س}{س} & ، \quad س > ٠ \\ أ\ جتا ٢ س & ، \quad س < ٠ \end{cases}$

فأوجد قيمة : أ «٢»

---

١١ إذا كانت : $\underset{س \to أ}{نهـا}$ | ٣ س + ٢ | = ١٤ فما قيمة : (أ) ؟ «٤ ، $\frac{-١٦}{٣}$»

---

١٢ 📖 ابحث وجود نهاية للدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{٣ س}{ظا س} & ، \quad -\frac{\pi}{٣} < س < ٠ \\ ٣\ جتا س & ، \quad ٠ < س < \frac{\pi}{٣} \end{cases}$

① عندما س ← $\frac{-\pi}{٣}$ ② س ← $\frac{\pi}{٣}$

③ س ← ٠ «غير موجودة ، غير موجودة ، ٣»

---

١٣ إذا كانت : د (س) = س^٢ + $\frac{\sqrt{س^٢ - ٦ س + ٩}}{س - ٣}$ ابحث وجود : $\underset{س \to ٣}{نهـا}$ د (س) «غير موجودة»

---

١٤ إذا كانت : د (س) = $\frac{س^٢ + ٢ \sqrt{س^٢}}{س}$ ابحث وجود : $\underset{س \to ٠}{نهـا}$ د (س) «غير موجودة»

---

١٥ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س\ |س| + ٢ & ، \quad س < ٠ \\ \frac{|س|}{س} + ١ & ، \quad س > ٠ \end{cases}$ أوجد : $\underset{س \to ٠}{نهـا}$ د (س) «٢»

---

١٦ 📖 أوجد قيمة م حتى تكون د (س) لها نهاية عندما س ← ١ حيث :

د (س) = $\begin{cases} \frac{(س - ١)^٢}{|س - ١|} & ، \quad س < ١ \\ ٦ س - ٣ م & ، \quad س > ١ \end{cases}$ «٢»

---

١٧ ابحث وجود $\underset{س \to ١}{نهـا}$ [(د + ر) (س)] حيث :

د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ٣ & ، \quad س \geq ١ \\ ٤ - ٢ س & ، \quad س < ١ \end{cases}$ ، ر (س) = $\begin{cases} -٣ س & ، \quad س \geq ١ \\ ٢ س^٢ - ٣ س & ، \quad س < ١ \end{cases}$ «١»

---

١٨ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{أ س}{\sqrt{س + ٤} - ٢} & ، \quad س > ٠ \\ \frac{١}{أ س\ قتا ٣ س} & ، \quad -\pi < س < ٠ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٠

أوجد قيمة : أ «$\pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$»

١٩ أوجد قيمة النهاية اليمنى واليسرى ثم استنتج قيمة النهاية إن وجدت لكل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة :

① $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ٥}$ عند $\text{س} = ٥$

② 📖 $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{٣ - \text{س}}$ عند $\text{س} = ٣$

③ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^٢ - ١}$ عند $\text{س} = -١$ ، $\text{س} = ١$

④ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{٤ - \text{س}^٢}$ عند $\text{س} = -٢$ ، $\text{س} = ٢$

---

٢٠ ابحث وجود نهاية كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين عند النقطة المبينة :

① $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{(\text{س} + ٢)^٦ - ٦٤}{\text{س}^٢ + ٣٢\,\text{س}} & ، \; -٥ < \text{س} < ٠ \\ \dfrac{-١٢\,\text{س}}{١ - (\text{جا}\,\text{س} + \text{جتا}\,\text{س})^٢} & ، \; ٠ < \text{س} < \dfrac{\pi}{٢} \end{cases}$ عند $\text{س} = ٠$ «٦»

② $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{١ - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{جا}^٢\,٣\,\text{س}} & ، \; \dfrac{-\pi}{٣} < \text{س} < ٠ \\ -\dfrac{١}{٢}\,\text{س}^٢\,\text{جتا}\,٦\,\text{س}\,(١ - \text{قا}^٢\,٣\,\text{س}) & ، \; ٠ < \text{س} < \dfrac{\pi}{٣} \end{cases}$ عند $\text{س} = ٠$ «$\frac{١}{١٨}$»

---

٢١ ابحث وجود كل مما يأتى :

① $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{جا}\,|\text{س}|}{\text{س}}$

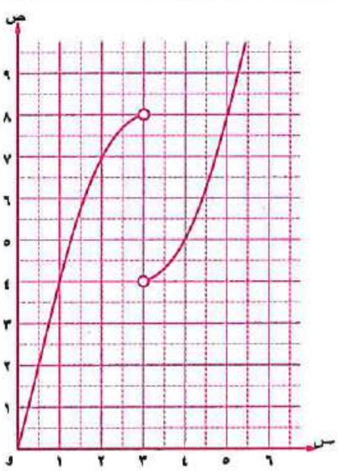
② $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{جتا}\,|\text{س}|}{\text{س} + ١}$ حيث س بالتقدير الدائرى. «غير موجودة ، ١»

---

٢٢ ابحث وجود : $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\sqrt{\text{قا}^٢\,\text{س} - ١}}{\text{س}}$ «غير موجودة»

---

٢٣ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة $\text{هـ}(\text{س})$



وكان :

$\text{ى}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ١ & ، \; \text{س} < ٣ \\ ٤\,\text{س} + ٢ & ، \; \text{س} > ٣ \end{cases}$

أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \left(\text{ى}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\right)$

«١٨»

---

٢٤ أوجد قيمة النهاية اليمنى واليسرى ثم استنتج قيمة النهاية لكل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة :

① 📖 $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{س} - ٢}$ عند $\text{س} = ٢$ | ② $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{١}{|\text{س} - ٣|}$ عند $\text{س} = ٣$

③ د (س) = $\begin{cases} \text{س} - ٢ & ، \text{ س} > ١ \\ \dfrac{١}{\text{س} - ١} & ، \text{ س} < ١ \end{cases}$ عند س = ١

---

٢٥ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ١ + \dfrac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{|\text{س} + ٢|} & ، \text{ س} \in]-٣ ، ٠[- \{-٢\} \\ ٢\text{س} + ١ & ، \text{ س} \in]٠ ، ٣[\end{cases}$

أوجد : ① $\lim_{\text{س} \to -٣}$ د (س) ② $\lim_{\text{س} \to -٢}$ د (س)

③ $\lim_{\text{س} \to ٠}$ د (س) ④ $\lim_{\text{س} \to ٣}$ د (س)

---

٢٦ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt[٣]{٢\text{س} - ٣} - ١}{\sqrt[٥]{٣\text{س} - ٥} - ١} & ، \text{ س} > ٢ \\ \text{ك س} & ، \text{ س} < ٢ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٢ **أوجد قيمة : ك** «$\frac{٥}{٩}$»

---

٢٧ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ + \text{أ س} + \text{ب}}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٣} & ، \text{ س} < ٣ \\ ٤\text{س} & ، \text{ س} > ٣ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٣

أوجد قيمتي : أ ، ب «١٨ ، −٦٣»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = $\text{س}^٢$ فإن : $\lim_{\text{س} \to ٢}$ د (د (س)) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٣٢

② إذا كانت : د دالة فردية وكان $\lim_{\text{س} \to ٢}$ د (س) = ٧ أى الجمل الآتية صحيحة ؟

(أ) $\lim_{\text{س} \to -٣}$ د (س) = ٧ (ب) $\lim_{\text{س} \to -٢}$ د (س) = −٧

(جـ) $\lim_{\text{س} \to -٣}$ د (س) = −٣ (د) $\lim_{\text{س} \to -٢}$ د (س) = صفر

③ إذا كانت : د دالة زوجية وكان $\lim_{\text{س} \to ٢}$ د (س) = ٥ أى الجمل الآتية صحيحة ؟

(أ) $\lim_{\text{س} \to -٢}$ د (س) = ٥ (ب) $\lim_{\text{س} \to -٢}$ د (س) = −٥

(جـ) $\lim_{\text{س} \to -٢}$ د (س) = صفر (د) $\lim_{\text{س} \to -٢}$ د (س) = −٢

④ إذا كانت د دالة أحادية كثيرة حدود وكانت : $\lim_{\text{س} \to ٢}$ د (س) = ٣

فإن : $\lim_{\text{س} \to ٢}$ $\text{د}^{-١}$ (س) = ...

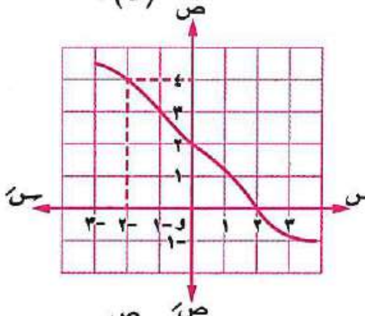
(أ) −٢ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) ٣

(٥) إذا كانت : $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د (س) = ٣ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) = ٥

فإن : $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د (س + ١) = ……………

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



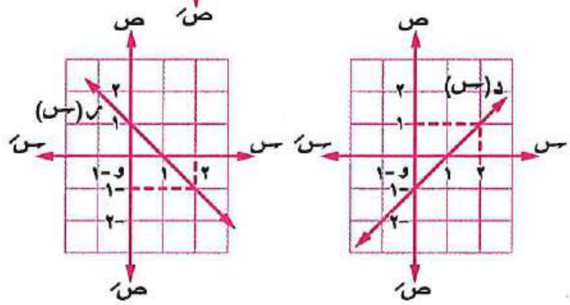
فإن : $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{[\text{د (س)}]^{٢} - ٦٤}{\text{د (س)} - ٤}$ = ……………

(أ) صفر (ب) ١٦

(جـ) ٣٢ (د) ٤٨

(٧) الشكلان المقابلان يمثلان

منحنيي الدالتين د ، ر

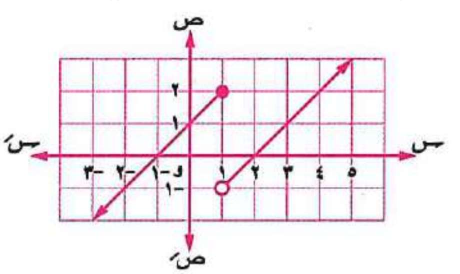


فإن : $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د (س)}}{\text{ر (س)}}$ = ……………

(أ) ١ (ب) −١

(جـ) صفر (د) غير موجودة.

(٨) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة هـ



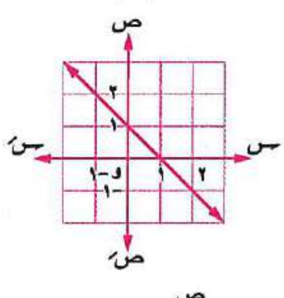
، ر (س) = $\begin{cases} \text{س} & ، \text{س} > ١ \\ \text{س} - ٣ & ، \text{س} < ١ \end{cases}$

، د (س) = هـ (س) + ر (س)

فإن : $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د (س) = ……………

(أ) ليس لها وجود. (ب) ٢ (جـ) −١ (د) صفر

(٩) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

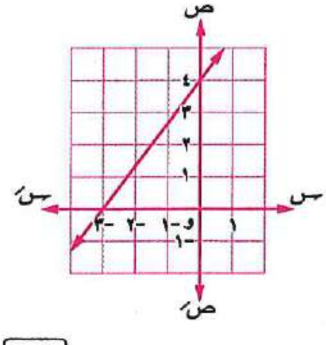


فإن : $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ | د (س) | = ……………

(أ) −١ (ب) صفر.

(جـ) ١ (د) غير موجودة.

(١٠) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن : $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د (س)}}{\text{د}^{-١} \text{(س)}}$ = ……………

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٤}{٣}$

(جـ) $\frac{-١٦}{٩}$ (د) $\frac{١٦}{٩}$



الدرس

7

الاتصـــال

أولًا / اتصال دالة عند نقطة

تعريف

تكون الدالة د متصلة عند س = أ إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية مجتمعة :

1. الدالة معرفة عند س = أ أى د (أ) لها وجود
2. نهـــا (س ← أ) د (س) لها وجود
3. نهـــا (س ← أ) د (س) = د (أ)

* إذا كانت الدالة د مجزأة المجال فإن د تكون متصلة عند س = أ

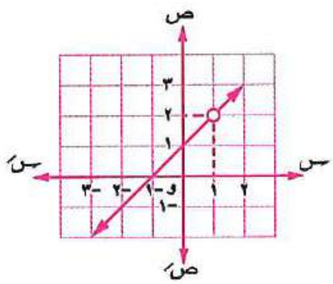
إذا كان : د $(أ^{+})$ = د $(أ^{-})$ = د (أ)

* يكفى عدم تحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة للحكم على عدم اتصال الدالة عند النقطة س = أ

فمثلًا إذا كانت الدالة غير معرفة عند س = أ فهى بالقطع غير متصلة عندها ولا داعى لأن نبحث النهاية عندها ، وهكذا...

* من الناحية الهندسية نقول إن دالة متصلة فى فترة ما إذا أمكن أن نرسم منحنى الدالة فى هذه الفترة دون أن نرفع سن القلم عن الورقة التى نرسم عليها ، أى يكون منحنى الدالة فى هذه الحالة خاليًا من الثغرات أو القفزات ، أما المنحنيات التى بها ثغرات أو قفزات تكون لدوال غير متصلة (منفصلة)

فمثلاً :

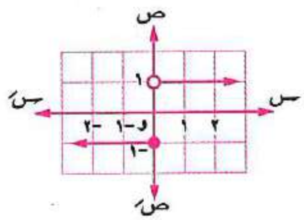


[١] د (س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ ، س ≠ ١

* د (١) غير موجودة لأن الدالة غير معرفة عند س = ١
* منحنى الدالة به ثغرة عند س = ١ لأن الدالة غير معرفة عند س = ١

وبالتالى تكون الدالة د غير متصلة عند س = ١

على الرغم من وجود نهاية للدالة [د (١^{+}) = د (١^{-}) = ٢]

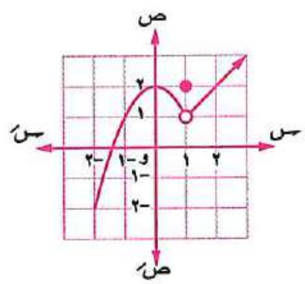


[٢] د (س) = { ١- ، س ≤ ٠ ؛ ١ ، س > ٠ }

* د (٠) = –١ (موجودة)
* د (٠^{+}) = ١ ، د (٠^{-}) = –١ ∴ د (٠^{+}) ≠ د (٠^{-})

∴ الدالة ليس لها نهاية عند س = ٠

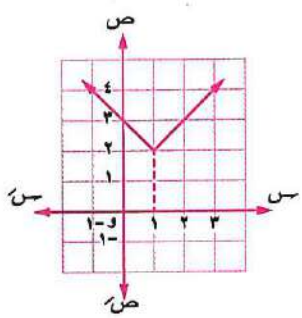
* منحنى الدالة به قفزة عند س = ٠ وبالتالى تكون الدالة د غير متصلة عند س = ٠



[٣] د (س) = { ٢ – $س^{٢}$ ، س < ١ ؛ ٢ ، س = ١ ؛ س ، س > ١ }

* د (١) = ٢ (موجودة)
* د (١^{+}) = د (١^{-}) = ١ (موجودة) ∴ $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ١
* منحنى الدالة به ثقب عند س = ١ لأن $\lim_{س \to ١}$ د (س) ≠ د (١)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ١



[٤] د (س) = { س + ١ ، س ≥ ١ ؛ ٣ – س ، س < ١ }

* د (١) = ٢ (موجودة)
* د (١^{+}) = د (١^{-}) = ٢ (موجودة) ∴ $\lim_{س \to ١}$ د (س) = د (١)
* منحنى الدالة ليس به ثقوب أو قفزات ، $\lim_{س \to ١}$ د (س) = د (١)

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

مثال (١)

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = { ٢ س + ٣ ، س > ٢ ؛ ٥ س – ٣ ، س < ٢ } عند س = ٢

الحـــل

∵ الدالة غير معرفة عند س = ٢ أى أن د (٢) غير موجودة.

∴ د ليست متصلة عند س = ٢

مثال ٢

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٥س - ٦ &، س \geq ٣ \\ ٣س + ٤ &، س < ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

الحل

∵ د (٣) = ٥ × ٣ − ٦ = ٩ ، د (٣^+) = $\lim_{س \to ٣^+}$ د (س) = $\lim_{س \to ٣^+}$ (٥س − ٦) = ٩

، د (٣^-) = $\lim_{س \to ٣^-}$ د (س) = $\lim_{س \to ٣^-}$ (٣س + ٤) = ١٣

∴ د (٣^+) ≠ د (٣^-) ∴ الدالة ليس لها نهاية عند س = ٣

∴ د ليست متصلة عند س = ٣

مثال ٣

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٧ - ١٢٨}{س^٤ - ١٦} &، س \neq ٢ \\ ١٤ &، س = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

الحل

∵ د (٢) = ١٤

، $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{س^٧ - ١٢٨}{س^٤ - ١٦}$ = $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{س^٧ - ٢^٧}{س^٤ - ٢^٤}$ = $\frac{٧}{٤}$ $(٢)^٣$ = ١٤

∴ $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = د (٢) ∴ د متصلة عند س = ٢

مثال ٤

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = | س − ١ | + ٢ عند س = ١

الحل

$\lim_{س \to ١}$ د (س) = $\lim_{س \to ١}$ (| س − ١ | + ٢) = ٢ ، د (١) = | ١ − ١ | + ٢ = ٢

∴ $\lim_{س \to ١}$ د (س) = د (١) ∴ د متصلة عند س = ١

ملاحظة

إذا كانت $\lim_{س \to ؟}$ د (س) موجودة ولكن الدالة د غير متصلة عند س = ؟

بسبب أن : د (؟) غير معرفة أو $\lim_{س \to ؟}$ د (س) ≠ د (؟)

فإنه يمكن إعادة تعريف الدالة د لتصبح متصلة عند ؟

أما إذا كانت $\lim_{س \to ؟}$ د (س) غير موجودة فإنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند ؟

فمثلًا : أعد تعريف كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية لكى تصبح متصلة عند س = ٢ إن أمكن

قاعدة الدالة	د (س) = $\begin{cases} \text{س} + ٢ ، & \text{س} \neq ٢ \\ ١ ، & \text{س} = ٢ \end{cases}$	د (س) = $\frac{\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ١٢}{\text{س} - ٢}$	د (س) = $\begin{cases} ١ ، & \text{س} > ٢ \\ \text{صفر} ، & \text{س} = ٢ \\ -١ ، & \text{س} < ٢ \end{cases}$
د (٢)	١	غير معرفة	صفر
$\lim_{\text{س} \to ٢}$ د (س)	٤	٨	غير موجودة
سبب عدم الاتصال عند س = ٢	د (٢) $\neq \lim_{\text{س} \to ٢}$ د (س)	الدالة غير معرفة عند س = ٢	$\lim_{\text{س} \to ٢}$ د (س) ليس لها وجود
إعادة التعريف لتصبح د متصلة عند س = ٢	د (س) = $\begin{cases} \text{س} + ٢ ، & \text{س} \neq ٢ \\ ٤ ، & \text{س} = ٢ \end{cases}$	د (س) = $\begin{cases} \text{س} + ٦ ، & \text{س} \neq ٢ \\ ٨ ، & \text{س} = ٢ \end{cases}$	لايمكن إعادة تعريفها لكى تصبح متصلة عند س = ٢

مثال ٥

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\frac{٢\text{س}^٢ - ٧\text{س} - ٤}{\text{س} - ٤}$ عند س = ٤

، إذا كانت د غير متصلة فهل يمكن إعادة تعريف الدالة د بحيث تكون متصلة عند س = ٤

الحل

∵ د غير معرفة عند س = ٤ ∴ د غير متصلة عند س = ٤

، ∵ $\lim_{\text{س} \to ٤}$ د (س) = $\lim_{\text{س} \to ٤} \frac{٢\text{س}^٢ - ٧\text{س} - ٤}{\text{س} - ٤}$

= $\lim_{\text{س} \to ٤} \frac{(\text{س} - ٤)(٢\text{س} + ١)}{(\text{س} - ٤)}$ = $\lim_{\text{س} \to ٤} (٢\text{س} + ١) = ٩$

ولكى تكون الدالة متصلة عند س = ٤ لابد أن تكون د (٤) = $\lim_{\text{س} \to ٤}$ د (س) = ٩

∴ يمكن إعادة تعريف الدالة كما يلى د (س) = $\begin{cases} \frac{٢\text{س}^٢ - ٧\text{س} - ٤}{\text{س} - ٤} ، & \text{س} \neq ٤ \\ ٩ ، & \text{س} = ٤ \end{cases}$

مثال ٦

هل يمكن إعادة تعريف الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{|\text{س} - ٢|}{\text{س} - ٢} ، & \text{س} \neq ٢ \\ \text{صفر} ، & \text{س} = ٢ \end{cases}$ لكى تكون متصلة عند س = ٢

الحل

∵ | س − ٢ | = $\begin{cases} (\text{س} - ٢) ، & \text{س} \geq ٢ \\ -(\text{س} - ٢) ، & \text{س} < ٢ \end{cases}$ ∴ د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ٢} ، & \text{س} > ٢ \\ \text{صفر} ، & \text{س} = ٢ \\ \frac{-(\text{س} - ٢)}{\text{س} - ٢} ، & \text{س} < ٢ \end{cases}$

$\therefore$ د (س) = $\begin{cases} ١ & ، س > ٢ \\ صفر & ، س = ٢ \\ -١ & ، س < ٢ \end{cases}$ $\therefore$ د (٢) = صفر ، د (٢^+) = ١ ، د (٢^-) = -١

$\therefore$ د (٢^+) $\neq$ د (٢^-) $\therefore$ $\lim_{س \to ٢}$ د (س) ليس لها وجود

$\therefore$ لا يمكن إعادة تعريف الدالة عند س = ٢ لتصبح متصلة

مثال ٧

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س \text{ جا } ٥ س}{\text{جا } ٣ س + \text{ظا } ٤ س} & ، ٠ < س < \frac{\pi}{٨} \\ ٢ ب & ، س = ٠ \\ ٣ أ - \frac{٢}{٧} \text{ جتا } س & ، س < ٠ \end{cases}$ متصلة عند س = ٠

أوجد قيمة كل من : أ ، ب

الحل

$\because$ د (٠^+) = $\lim_{س \to ٠^+} \frac{س \text{ جا } ٥ س}{\text{جا } ٣ س + \text{ظا } ٤ س}$ = $\lim_{س \to ٠^+} \frac{\text{جا } ٥ س}{\frac{\text{جا } ٣ س}{س} + \frac{\text{ظا } ٤ س}{س}}$ = $\frac{١}{٣ + ٤}$ = $\frac{١}{٧}$

، د (٠^-) = $\lim_{س \to ٠^-}$ (٣ أ - $\frac{٢}{٧}$ جتا س) = ٣ أ - $\frac{٢}{٧}$ ، د (٠) = ٢ ب

، $\because$ د متصلة عند س = ٠ $\therefore$ د (٠^+) = د (٠^-) = د (٠) $\therefore$ ٣ أ - $\frac{٢}{٧}$ = $\frac{١}{٧}$

$\therefore$ ٣ أ = $\frac{٣}{٧}$ $\therefore$ أ = $\frac{١}{٧}$ ، ٢ ب = $\frac{١}{٧}$ $\therefore$ ب = $\frac{١}{١٤}$

مثال ٨

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + أ س - ٢ & ، س > ٢ \\ ٤ & ، س = ٢ \\ ٥ أ + ب س & ، س < ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢ **أوجد قيمة : ب**

الحل

$\because$ د (٢) = ٤ ، $\because$ د (٢^+) = $\lim_{س \to ٢^+}$ ($س^٢$ + أ س - ٢) = ٢ + ٢ أ

، $\because$ د (٢^-) = $\lim_{س \to ٢^-}$ (٥ أ + ب س) = ٥ أ + ٢ ب ، $\because$ د متصلة عند س = ٢

$\therefore$ د (٢^+) = د (٢^-) = د (٢) $\therefore$ ٢ + ٢ أ = ٤ $\therefore$ أ = ١ ، ٥ أ + ٢ ب = ٤

$\therefore$ ٥ + ٢ ب = ٤ $\therefore$ ٢ ب = -١ $\therefore$ ب = - $\frac{١}{٢}$

مثال ٩

إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} س^٢ - ٢ س + ٢ & ، س \leq ٢ \\ |س - ٣| & ، س > ٢ \end{cases}$ ابحث اتصال د عند س = ٢ ، س = ٣

الحل

عندما ٢ < س < ٣ يكون |س - ٣| = ٣ - س ، وعندما س $\geq$ ٣ يكون |س - ٣| = س - ٣

$\therefore$ د (س) = $\begin{cases} س^٢ - ٢ س + ٢ & ، س \leq ٢ \\ ٣ - س & ، ٢ < س < ٣ \\ س - ٣ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

* عند $س = ٢$:

$د(٢) = ٢^٢ - ٢(٢) + ٢ = ٢$ ، $د(٢^-) = \lim_{س \to ٢^-} (س^٢ - ٢س + ٢) = ٢$

، $د(٢^+) = \lim_{س \to ٢^+} (٣ - س) = ١$ $\therefore د(٢^+) \neq د(٢^-)$

$\therefore \lim_{س \to ٢} د(س)$ ليس لها وجود. $\therefore$ د غير متصلة عند $س = ٢$

* عند $س = ٣$:

$د(٣) = ٣ - ٣ =$ صفر ، $د(٣^-) = \lim_{س \to ٣^-} (٣ - س) =$ صفر ، $د(٣^+) = \lim_{س \to ٣^+} (س - ٣) =$ صفر

$\therefore د(٣^+) = د(٣^-) = د(٣)$ $\therefore$ د متصلة عند $س = ٣$

مثال ١٠

أعد تعريف الدالة د : $د(س) = \frac{٤ \text{ حتا } س}{\pi - ٢س}$ لكى تصبح متصلة عند $س = \frac{\pi}{٢}$

الحل

$\because$ الدالة د غير معرفة عند $س = \frac{\pi}{٢}$

، $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} د(س) = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٤ \text{ حتا } س}{\pi - ٢س} = \lim_{(\frac{\pi}{٢} - س) \to ٠} \frac{٤ \text{ حا} \left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{٢\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)} = \frac{٤}{٢} = ٢$

ولكن تكون الدالة متصلة عند $س = \frac{\pi}{٢}$ لابد أن يكون $د\left(\frac{\pi}{٢}\right) = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} د(س) = ٢$

$\therefore$ يمكن إعادة تعريف الدالة كما يلى د : $د(س) = \begin{cases} \frac{٤ \text{ حتا } س}{\pi - ٢س} & ، س \neq \frac{\pi}{٢} \\ ٢ & ، س = \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

ثانيًا اتصال دالة على فترة

تعريف

١ إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة ف =]أ ، ب[

فإن د تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمى لهذه الفترة.

٢ إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المغلقة ف = [أ ، ب]

فإن الدالة د تكون متصلة على ف إذا كان :

* د متصلة على]أ ، ب[

* د متصلة من اليمين عند أ **أى أن** $د(أ) = \lim_{س \to أ^+} د(س)$

* د متصلة من اليسار عند ب **أى أن** $د(ب) = \lim_{س \to ب^-} د(س)$

بعض أنماط الدوال المتصلة

من معرفتنا للأشكال البيانية للدوال الجبرية أمكن استنتاج أنماط لبعض الدوال المتصلة مثل :

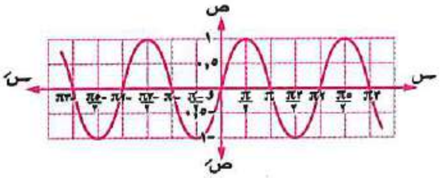
١ الدالة كثيرة الحدود : د (س) = أ$_٠$ + أ$_١$ س + أ$_٢$ س^٢ + ... + أ$_ن$ س^ن

متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

٢ الدالة الكسرية : د (س) = $\dfrac{\text{أ}_٠ + \text{أ}_١ \text{س} + \text{أ}_٢ \text{س}^٢ + \dots + \text{أ}_ن \text{س}^ن}{\text{ب}_٠ + \text{ب}_١ \text{س} + \text{ب}_٢ \text{س}^٢ + \dots + \text{ب}_ن \text{س}^ن}$

متصلة على ح − {أصفار المقام} أو أى فترة جزئية من ح عدا أصفار المقام

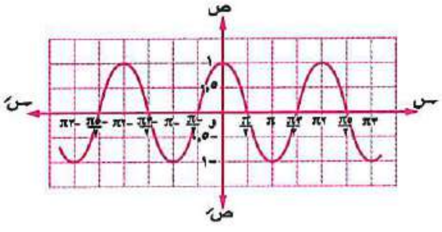
٣ الدالة المثلثية :



(أ) دالة الجيب : د (س) = جا س متصلة على ح

أو أى فترة جزئية من ح ويتضح ذلك من

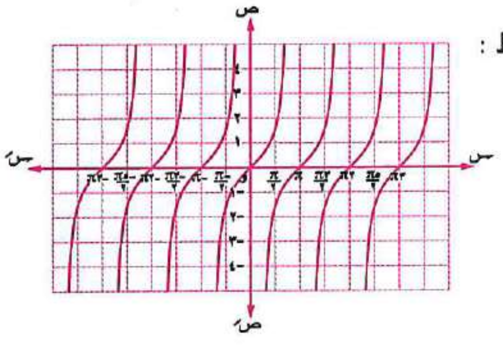
التمثيل البيانى فى الشكل المقابل :



(ب) دالة جيب التمام : د (س) = جتا س متصلة على ح

أو أى فترة جزئية من ح ويتضح ذلك من

التمثيل البيانى فى الشكل المقابل :



(جـ) دالة الظل : د (س) = ظا س متصلة على ح ما عدا النقط :

..... ، $\frac{٥\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{-٣\pi}{٢}$ ، $\frac{-٥\pi}{٢}$ ، .....

أى أن الدالة متصلة على

ح − {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π ، ن ∈ ص}

ويتضح ذلك من التمثيل البيانى فى الشكل المقابل.

معلومة إثرائية

كل من الدوال الآتية تكون متصلة على أى فترة مفتوحة جزئية من مجالها :

١ الدالة د : د (س) = | هـ (س) | حيث هـ (س) كثيرة حدود مجالها = ح

٢ الدالة د : د (س) = $\sqrt[ن]{\text{هـ (س)}}$ حيث ن ∈ ص$_+$ وأكبر من ١ ، هـ (س) كثيرة حدود

* مجالها = ح إذا كان ن عددًا فرديًا أكبر من ١

* مجالها الفترة التى تحقق هـ (س) ≥ ٠ إذا كان ن عددًا زوجيًا

مثال (١١)

ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية على ح :

[١] د (س) = س^{٣} + ٤ س − ٥ | [٢] د (س) = ٣

[٣] د (س) = $\frac{س - ٤}{س^{٢} - ٥ س + ٦}$ | [٤] د (س) = $\frac{س}{س^{٢} + ٢٥}$

الحل

[١] د (س) = س^{٣} + ٤ س − ٥ (دالة كثيرة حدود) ∴ د متصلة على ح

[٢] د (س) = ٣ (دالة كثيرة حدود) ∴ د متصلة على ح

[٣] د (س) = $\frac{س - ٤}{س^{٢} - ٥ س + ٦}$ (دالة كسرية)

∵ س^{٢} − ٥ س + ٦ = ٠ عندما (س − ٢) (س − ٣) = ٠ أى عندما س = ٢ أ، س = ٣

∴ د متصلة على ح − {٢ ، ٣}

[٤] د (س) = $\frac{س}{س^{٢} + ٢٥}$ (دالة كسرية) ∵ س^{٢} + ٢٥ > ٠ لجميع قيم س ∈ ح

∴ لا توجد أصفار للمقام. ∴ د متصلة على ح

ملاحظة

إذا كانت الدالتان د$_{١}$ ، د$_{٢}$ معرفتين على الفترة ف =]أ ، ب[وكانتا متصلتين على الفترة ف ، فإن كلًا من الدوال الآتية تكون متصلة على الفترة ف :

[١] د$_{١}$ ± د$_{٢}$ [٢] د$_{١}$. د$_{٢}$ [٣] $\frac{د_{١}}{د_{٢}}$ بشرط د$_{٢}$ (س) ≠ صفر

مثال (١٢)

ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

[١] د (س) = (س + ٢) جاس | [٢] د (س) = (س + ١)^{٢} − جاس

[٣] د (س) = $\frac{جتاس + جاس}{س + ٣}$ | [٤] د (س) = س^{٣} + ٥ + ٣ س$^{-٢}$

[٥] د (س) = $\frac{طاس}{س^{٢} - ١}$

الحل

[١] ∵ كل من (س + ٢) ، جاس متصلة على ح ∴ د متصلة على ح

[٢] ∵ كل من (س + ١)^{٢} ، جاس متصلة على ح ∴ د متصلة على ح

[٣] ∵ كل من جتاس ، جاس ، (س + ٣) متصلة على ح

∴ د متصلة على ح − {أصفار المقام} ∴ د متصلة على ح − {−٣}

٤ ∵ د (س) = س^{٢} + ٥ + $\frac{٣}{س^{٢}}$ ∴ د متصلة على ح − {٠}

٥ ∵ ظاس متصلة على ح − {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + نπ ، ن ∈ ص}

، (س^{٢} − ١) متصلة على ح ، ∵ س^{٢} − ١ = ٠ عند س = ± ١

∴ الدالة د متصلة على ح − {١ ، −١ ، $\frac{\pi}{٢}$ + نπ} حيث ن ∈ ص

مثال ١٢

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٣ س + ٢ ، −٣ \leq س < ٢ \\ س^{٢} + ٤ ، ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

الحل

∵ د معرفة على الفترة [−٣ ، ٥]

ولكى نبحث اتصالها على هذه الفترة نبحث :

١ اتصالها فى كل من الفترتين]−٣ ، ٢[،]٢ ، ٥[

٢ اتصالها عند النقطة س = ٢ التى تتغير عندها قاعدة الدالة.

٣ اتصالها من اليمين عند س = −٣ ، اتصالها من اليسار عند س = ٥

أولًا : * لكل س ∈]−٣ ، ٢[

∴ د (س) = ٣ س + ٢ (كثيرة حدود) ∴ د متصلة على]−٣ ، ٢[

* لكل س ∈]٢ ، ٥[

∴ د (س) = س^{٢} + ٤ (كثيرة حدود) ∴ د متصلة على]٢ ، ٥[

ثانيًا : ∵ د (٢) = ٢^{٢} + ٤ = ٨

، د (٢$^{-}$) = نهــا$_{س \leftarrow ٢^{-}}$ (٣ س + ٢) = ٨ ، د (٢$^{+}$) = نهــا$_{س \leftarrow ٢^{+}}$ (س^{٢} + ٤) = ٨

∴ د (٢$^{-}$) = د (٢$^{+}$) = د (٢) ∴ د متصلة عند س = ٢

ثالثًا : ∵ د (−٣) = ٣ (−٣) + ٢ = −٧ ، د (−٣$^{+}$) = نهــا$_{س \leftarrow −٣^{+}}$ (٣ س + ٢) = −٧

∴ د (−٣$^{+}$) = د (−٣) ∴ د متصلة من اليمين عند س = −٣

وكذلك ∵ د (٥) = ٥^{٢} + ٤ = ٢٩ ، د (٥$^{-}$) = نهــا$_{س \leftarrow ٥^{-}}$ (س^{٢} + ٤) = ٢٩

∴ د (٥$^{-}$) = د (٥) ∴ د متصلة من اليسار عند س = ٥

من أولًا وثانيًا وثالثًا نستنتج أن د متصلة على [−٣ ، ٥]

مثال (١٤)

ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية على مجالها :

[١] د (س) = $\sqrt{س + ٢}$ [٢] د (س) = $\sqrt[3]{٢ - س^٢}$ [٣] د (س) = $\frac{١}{\sqrt[3]{س^٢ - ٢٥}}$

الحل

[١] ∵ د (س) = $\sqrt{س + ٢}$ [دليل الجذر = ٢ (زوجى)]

∴ د معرفة إذا كان س + ٢ ≥ ٠ أى س ≥ −٢ ∴ مجال د = [−٢ ، ∞[

نفرض أن أ ∈]−٢ ، ∞[

، ∵ $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ $\sqrt{س + ٢}$ = $\sqrt{أ + ٢}$ = د (أ)

∴ الدالة د متصلة لجميع قيم أ ∴ د متصلة على الفترة]−٢ ، ∞[

، ∵ د (−٢) = ٠ ، د (-٢^+) = $\underset{س \leftarrow -٢^+}{نهـا}$ ($\sqrt{س + ٢}$) = ٠

∴ د (-٢^+) = د (−٢) ∴ د متصلة من اليمين عند س = −٢

∴ د متصلة على [−٢ ، ∞[

[٢] ∵ د (س) = $\sqrt[3]{٢ - س^٢}$ [دليل الجذر = ٣ (فردى)] ∴ د متصلة على ح

[٣] ∵ د (س) = $\frac{١}{\sqrt[3]{س^٢ - ٢٥}}$ [دليل الجذر = ٣ (فردى)] ∴ د متصلة على ح − {أصفار المقام}

، ∵ $س^٢$ − ٢٥ = ٠ عندما س = ± ٥ ∴ د متصلة على ح − {٥ ، −٥}

مثال (١٥)

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} جاس - جتاس ، ٠ \le س \le \pi \\ ٢ جتا^٢ س - ١ ، س > \pi \end{cases}$

الحل

∵ كل من جاس ، جتاس متصلة فى الفترة]٠ ، π[

∴ د (س) = جاس − جتاس متصلة فى الفترة]٠ ، π[

وبالمثل د (س) = ٢ $جتا^٢$ س − ١ متصلة فى الفترة]π ، ∞[(١)

، ∵ د (π) = جا π − جتا π = ١ ، د (π^-) = $\underset{س \leftarrow \pi^-}{نهـا}$ (جاس − جتاس) = جا π − جتا π = ١

، د (π^+) = $\underset{س \leftarrow \pi^+}{نهـا}$ (٢ $جتا^٢$ س − ١) = ٢ $جتا^٢$ π − ١ = ١

∴ د (π^-) = د (π^+) = د (π) ∴ د متصلة عند س = π (٢)

، ∵ د (٠) = جا ٠ − جتا ٠ = −١ ، د (٠^+) = $\underset{س \leftarrow ٠^+}{نهـا}$ (جاس − جتاس) = −١

∴ د (٠^+) = د (٠) ∴ د متصلة من اليمين عند س = ٠ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن د متصلة على [٠ ، ∞[

مثال ١٦

ابحث اتصال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين على ح :

[١] د (س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{جتا س}}$ [٢] د (س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٣}{١ + \text{جا س}}$

الحـــل

[١] ∵ كل من (س − ١) ، جتا س متصلة على ح

، ∵ جتا س = ٠ عندما س = $\frac{\pi}{٢} + \pi$ ن

∴ د متصلة على

ح − {س : س = $\frac{\pi}{٢} + \pi$ ن ، ن ∈ ص}

[٢] ∵ كل من (س^{٢} + ٣) ، (١ + جا س)

متصلة على ح

، ∵ ١ + جا س = ٠

أى جا س = −١ عندما س = $\frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

∴ د متصلة على ح − {س : س = $\frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi$ ن ، ن ∈ ص}

تذكر أن

المعادلة	الحل العام
• جا س = ٠	س = π ن
• جا س = ١	س = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن
• جا س = −١	س = $\frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi$ ن
• جتا س = ٠	س = $\frac{\pi}{٢} + \pi$ ن
• جتا س = ١	س = ٢π ن
• جتا س = −١	س = $\pi + ٢\pi$ ن

مثال ١٧

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٣\text{س} - ٢ & ، \text{س} \leq -٢ \\ \text{أ س} + \text{ب} & ، -٢ < \text{س} < ٥ \\ \text{س}^{٢} - ١٢ & ، \text{س} \geq ٥ \end{cases}$ متصلة على ح

أوجد : أ ، ب

الحـــل

∵ د متصلة على ح ∴ د متصلة عند س = −٢

∴ د (−٢$^{-}$) = د (−٢$^{+}$) = د (٢)

∵ $\lim_{\text{س} \to -٢^{+}}$ (أ س + ب) = ٣ (−٢) −٢ ∴ −٢ أ + ب = −٨ (١)

، د متصلة عند س = ٥ ∴ د (٥$^{-}$) = د (٥$^{+}$) = د (٥)

∵ $\lim_{\text{س} \to ٥^{-}}$ (أ س + ب) = (٥)^{٢} − ١٢ ∴ ٥ أ + ب = ١٣ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ = ٣ ، ب = −٢

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د : د (س) دالة فإنها تكون متصلة عند س = أ إذا كان ....

(أ) د (أ) موجودة. (ب) د (أ) = د ($أ^+$) = د ($أ^-$)

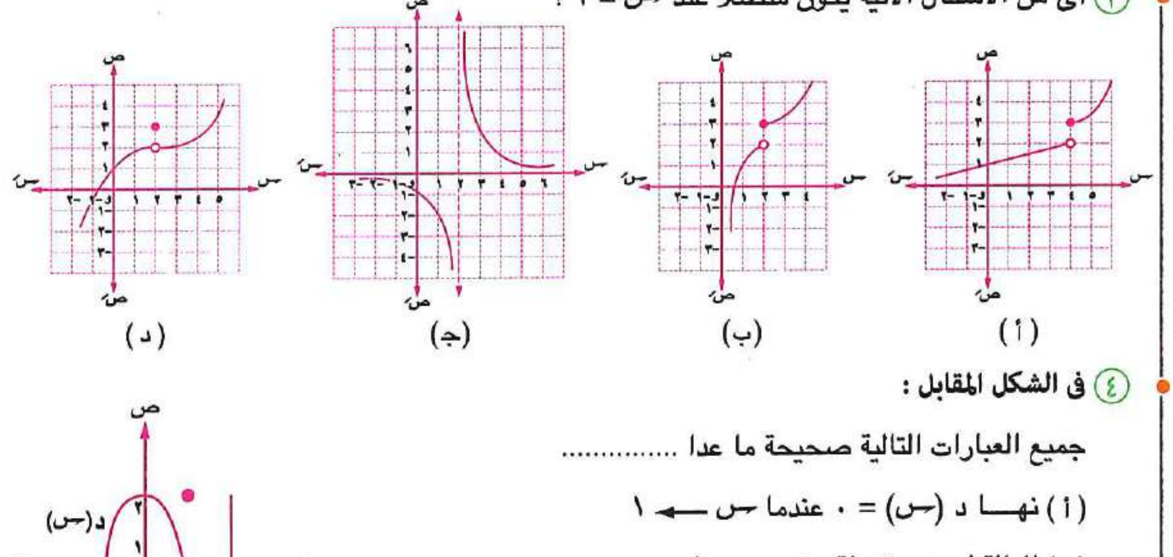
(جـ) د (س) لها نهاية عند س ← أ (د) أ ، جـ معًا.

(٢) إذا كانت : نهـــا د (س) = ل (س ← $أ^+$) ، نهـــا د (س) = م (س ← أ) وكانت الدالة متصلة عند س = أ

فإن : $ل^٢ + م^٢ - ٢ ل م$ = ...

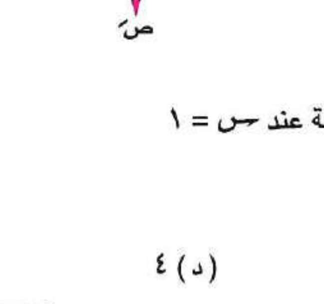
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

(٣) أى من الأشكال الآتية يكون متصلًا عند س = ٢ ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٤) فى الشكل المقابل :



جميع العبارات التالية صحيحة ما عدا ....

(أ) نهـــا د (س) = ٠ عندما س ← ١

(ب) الدالة ليست متصلة عند س = ١

(جـ) د (١) = ٢

(د) لا يمكن إعادة تعريف الدالة لكى تصبح متصلة.

(٥) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ١}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٢ أ & ، س = ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٦) إذا كانت د : $د(س) = \begin{cases} أس^{٢} - ٣ & ، \quad س \neq ٢ \\ ٢أ & ، \quad س = ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢ فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٦

(٧) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٢س & \text{عندما } س \geq ١ \\ ك س - ٣ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١ فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٨) إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ٢ حيث : $د(س) = \begin{cases} أس^{٢} + ٥ & \text{عندما } س \geq ٢ \\ ٩ - ب س & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$

فإن : ٢ أ + ب = ...

(أ) ٧ (ب) ١٤ (جـ) ٢ (د) −٢

(٩) إذا كانت د : $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ب س + ٣ & ، \quad س < ١ \\ أ س + ب & ، \quad س \geq ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١ ، د (١) = ٧

فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{٧}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ٧

(١٠) إذا كانت الدالة د حيث : $د(س) = \begin{cases} \frac{(س + ٢)^{٦} - ٦٤}{٢ س} & س \neq ٠ \\ ك & س = ٠ \end{cases}$ متصلة عند س = ٠

فإن : ك = ...

(أ) ٩٦ (ب) ١٩٢ (جـ) ٣٨٤ (د) ٩٢

(١١) إذا كانت د دالة حيث : $د(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س - ١} & ، \quad س \neq ١ \\ أ & ، \quad س = ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٢

(١٢) إذا كانت الدالة د : $د(س) = \begin{cases} \frac{|س|}{س} + ٦ & ، س < ٠ \\ أ^{٢} + جتا ٣ س & ، س \geq ٠ \end{cases}$ متصلة عند س = ٠

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) $\pm \sqrt{٦}$ (جـ) ± ٢ (د) $\pm \sqrt{٥}$

(١٣) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{طا (س - ٢)}{س - ٢} & ، \quad س > ٢ \\ جا \left(\frac{١}{٤} \pi س\right) & ، \quad س < ٢ \end{cases}$ فإن : ....

(أ) الدالة متصلة عند س = ٢

(ب) الدالة ليس لها نهاية عند س ← ٤

(جـ) الدالة لها نهاية عند س ← ٢

(د) $د(٢^{+}) \neq د(٢^{-})$

(١٤) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{حا } ٢ \text{ س} + \text{طا س}}{١ + \text{حا } ٤ \text{ س}} & \text{، س} \in] \text{صفر ، } \frac{\pi}{٣} [- \{ \frac{\pi}{٤} \} \\ \text{ك} & \text{، س} = \frac{\pi}{٤} \end{cases}$

متصلة عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) ٣ (د) ٢

(١٥) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \text{حا } ٩ \text{ س طتا } ٤ \text{ س} & \text{، س} \in] \frac{-\pi}{٨} \text{ ، } \frac{\pi}{٨} [- \{ ٠ \} \\ \text{ك}^٢ & \text{، س} = ٠ \end{cases}$

متصلة عند س = ٠ فإن : ك = ...

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ± $\frac{٣}{٢}$ (د) ± $\frac{٢}{٣}$

(١٦) الدالة الزوجية المتصلة عند النقطة (أ ، ب) تكون متصلة أيضا عند النقطة ....

(أ) (− أ ، ب) (ب) (− أ ، − ب) (جـ) (أ ، − ب) (د) غير ذلك.

(١٧) إذا كانت : د (س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٢٥}{\text{س} - ٥}$ حيث س ≠ ٥

فإن قيمة د (٥) التى تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع تساوى ....

(أ) ١٠ (ب) صفر (جـ) ٢٥ (د) غير معرفة.

(١٨) إذا كانت د : د (س) = $\frac{\text{س}^٨ - \text{أ}^٨}{\text{س}^٥ - \text{أ}^٥}$ عند س ≠ أ ، د (أ) = ٢٠٠ متصلة عند س = أ

فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٨}{٥}$ (جـ) ١٢٥ (د) $\frac{١}{٥}$

(١٩) إذا كانت : د (س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٥ \text{ س} + ٦}{\text{س}^٢ - ٩}$ حيث س ≠ ± ٣

فإن قيمة د (٣) التى تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع تساوى ....

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) غير معرفة.

(٢٠) الدالة د : د (س) = ٤ $\text{س}^{-٣}$ + $\frac{\text{س}}{\text{س}^٢ - ٩}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب) ح − {٠}

(جـ) ح − {٣ ، −٣} (د) ح − {٣ ، −٣ ، ٠}

(٢١) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س}^٢ + \text{أ}}$ متصلة على ح فإن : أ ∈ ....

(أ) ح (ب) ح^+ (جـ) ح^- (د) ح^- ∪ {٠}

(٢٢) الدالة د : د (س) = $\frac{١}{\sqrt{س + ٢}}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب) ح − {−٢} (جـ) [−٢ ، ∞[(د)]−٢ ، ∞[

(٢٣) الدالة د : د (س) = $\frac{س}{|س - ١| - ٣}$ متصلة على ....

(أ) ح − {٣} (ب) ح − {−٣ ، ٣} (جـ) ح − {−٢ ، ٤} (د) ح

(٢٤) الدالة د : د (س) = $\sqrt[٣]{٤ - س^٢}$ متصلة على ....

(أ) [−٢ ، ٢] (ب) ح −]−٢ ، ٢[(جـ)]٤ ، ∞[(د) ح

(٢٥) الدالة د : د (س) = $\sqrt[٣]{٢س - ٥} + \sqrt[٤]{س^٢ + ٤}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح^+$ (جـ) [$\frac{٥}{٢}$ ، ∞[(د) [−٤ ، $\frac{٥}{٢}$]

(٢٦) الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ١}$ متصلة فى ....

(أ) [١ ، ∞[(ب) [−١ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ١] (د)]−∞ ، −١]

(٢٧) الدالة د : د (س) = ٤ س $\sqrt{-س}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب)]−∞ ، ٤] (جـ)]−∞ ، ٠] (د) [٠ ، ∞[

(٢٨) الدالة د : د (س) = $\frac{س + ٢}{\sqrt{س} - ٢}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب) [٠ ، ∞[(جـ) [٠ ، ∞[− {٤} (د)]−∞ ، ٢[

(٢٩) الدوال الآتية متصلة على ح ماعدا ....

(أ) د (س) = جا س (ب) د (س) = $س^٢ - ٢$

(جـ) د (س) = ظا س (د) د (س) = $\frac{٥س + ٣}{س^٢ + ٤}$

(٣٠) الدالة د : د (س) = ظا ٢ س متصلة لكل س ∈ ح − {س : س = ... ، ن ∈ ص}

(أ) $\frac{\pi}{٢} + ن\pi$ (ب) $\frac{\pi}{٤} + \frac{ن\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤} + ن\pi$ (د) $\frac{\pi}{٢} + ٢ن\pi$

(٣١) إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{جا أ س}}{٢ س} & ، س \neq ٠ \\ ٥ & ، س = ٠ \end{cases}$ متصلة على ح فإن : أ = ...

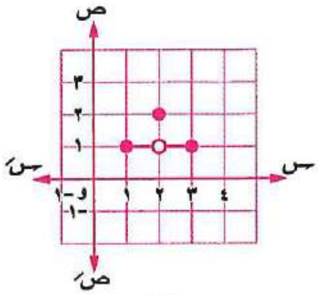
(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢ (د) صفر

(٣٢) إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} س + ١ & ، ١ < س < ٣ \\ س^٢ + ب س + حـ & ، س \in ح -]١ ، ٣[\end{cases}$ متصلة على ح

فإن : ب − حـ = ...

(أ) −٣ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) −٧

(٣٣) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د أى الجمل الآتية صحيحة ؟



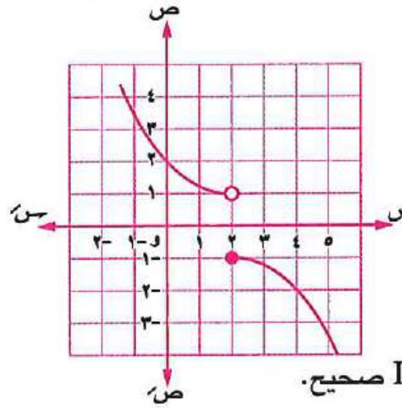
(أ) د متصلة على الفترة [١ ، ٣]

(ب) د متصلة على الفترة]١ ، ٣[

(جـ) نهـــا د (س) موجودة حيث أ ∈ [١ ، ٣]
س ← أ

(د) نهـــا د (س) موجودة حيث أ ∈]١ ، ٣[
س ← أ

(٣٤) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



، ر (س) = | د (س) |

فإن : (I) ر (س) متصلة على ح

(II) نهـــا د (س) = ± ١
س ← ٢

(III) نهـــا ر (س) = ١
س ← ٢

(أ) I ، II صحيح. (ب) I ، III صحيح.

(جـ) I ، II ، III صحيح. (د) II صحيح.

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على الاتصال عند نقطة

١ ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية عند النقط المبينة :

(١) د (س) = س^{٢} + س − ٣ عند س = −١

(٢) د (س) = $\sqrt[٣]{\text{س} - ١}$ عند س = ٩

(٣) 📖 د (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢}$ عند س = ١ ، س = ٢

(٤) 📖 د (س) = ٥ − | س − ٣ | عند س = ٣

(٥) د (س) = | س − ٤ | + | س + ٢ | عند س = ٤ ، س = −٢

(٦) د (س) = { ٤ س^{٢} + ٣ ، س ≤ $\frac{١}{٢}$ ؛ ٥ − ٢ س ، س > $\frac{١}{٢}$ } عند س = $\frac{١}{٢}$

(٧) د (س) = { ٢ س ، س < ١ ؛ ٤ − ٢ س ، س > ١ } عند س = −١ ، س = ١

(٨) 📖 د (س) = { س + ٤ ، س < −٢ ؛ ١ ، −٢ ≤ س < −١ ؛ ٢ س + ٣ ، س ≥ −١ } عند س = −٢ ، س = −١

(٩) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٣ & ، ١ \le \text{س} \\ \dfrac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}{\text{س} - ١} & ، ١ > \text{س} \end{cases}$ عند $\text{س} = ١$

(١٠) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}|\text{س}| & ، \text{س} \ne ٠ \\ ٢ & ، \text{س} = ٠ \end{cases}$ عند $\text{س} = ٠$

(١١) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{|\text{س} - ٣|}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} \ne ٣ \\ ٢ & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$ عند $\text{س} = ٣$

(١٢) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}|\text{س} - ٢| - \text{س} + ٢}{|\text{س} - ٢|} & ، ٢ > \text{س} \\ ٣ & ، ٢ \le \text{س} \end{cases}$ عند $\text{س} = ٢$

(١٣) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٧} - ١٢٨}{\text{س}^{٤} - ١٦} & ، \text{س} \ne ٢ \\ ٣\text{س}^{٢} + ٢ & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$ عند $\text{س} = ٢$

(١٤) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{١ - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}} & ، ٠ < \text{س} \\ ٢\,\text{جا}\,\text{س} & ، ٠ \ge \text{س} \end{cases}$ عند $\text{س} = ٠$

(١٥) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}(\text{س} - ٢)}{\text{س}^{٢} - ٤} & ، \text{س} \in]-\infty ، ٢[- \{-٢\} \\ ١ - \dfrac{٣}{\text{س}^{٢}} & ، \text{س} \in [٢ ، \infty[\end{cases}$ عند $\text{س} = ٢$

(١٦) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}|\text{س}| + ٤ & ، ٠ \ge \text{س} \\ \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} + ٣ & ، ٠ < \text{س} \end{cases}$ عند $\text{س} = ٠$

(١٧) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}{|\text{س} + ٣|} & ، \text{س} \ne -٣ \\ ٢ & ، \text{س} = -٣ \end{cases}$ عند $\text{س} = -٣$ ، عند $\text{س} = ١$

(١٨) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س} + ٣| & ، ٢ \ge \text{س} \\ ١١ - ٣\text{س} & ، ٢ < \text{س} \end{cases}$ عند $\text{س} = -٣$ ، $\text{س} = ٢$

(١٩) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٥\text{س}^{٢} + \text{جا}^{٢}\,٢\text{س}}{\text{س}\,\text{ظا}\,٣\text{س}} & ، ٠ > \text{س} > \dfrac{-\pi}{٦} \\ \dfrac{\text{س} + ٣}{\text{س} + ١} & ، ٠ \le \text{س} \end{cases}$ عند $\text{س} = ٠$

(٢٠) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}\,\text{س}}{\pi - \text{س}} & ، \text{س} \ne \pi \\ ١ & ، \text{س} = \pi \end{cases}$ عند $\text{س} = \pi$

٢ **أوجد قيم ك ، أ ، ب ، ح التى تجعل كلًّا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية متصلة عند النقطة المبينة أمام كل منها :**

① 📖 $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س + ٣} & ، س \neq -٣ \\ س + أ & ، س = -٣ \end{cases}$ عند س = −٣ «−١»

② 📖 $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س^{٣} - ٨} & ، س \neq ٢ \\ \dfrac{-٢}{|أ|} & ، س = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ «± ٢٤»

③ 📖 $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س^{٢} - ١} & ، س \neq ١ \\ ك & ، س = ١ \end{cases}$ عند س = ١ «$\frac{١}{٨}$»

④ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{جا^{٢}\,٢س}{س\,ظا\,٣س} & ، س \in]\frac{-\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٦}[- \{٠\} \\ أ + ١ & ، س = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ «$\frac{١}{٣}$»

⑤ $د(س) = \begin{cases} ٣س - ٢ & ، س \leq -٢ \\ أس + ب & ، -٢ < س < ٥ \\ س^{٢} - ١٢ & ، س \geq ٥ \end{cases}$ عند س = −٢ ، س = ٥

«٣ ، −٢»

⑥ $د(س) = \begin{cases} أ + ب س & ، س > ٢ \\ ٣ & ، س = ٢ \\ ب - أس^{٢} & ، س < ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ «$-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٥}{٣}$»

⑦ 📖 $د(س) = \begin{cases} \dfrac{جتا\,٢س - ١}{س^{٢}} & ، س \neq ٠ \\ ك & ، س = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ «−٢»

⑧ 📖 $د(س) = \begin{cases} ٢ - س^{٢} & ، س \leq ح \\ س & ، س > ح \end{cases}$ عند س = ح «١ أ −٢»

⑨ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{١ - جتا\,س}{ك\,س} & ، س \neq ٠ \\ جا\,س & ، س = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ «ح − {٠}»

---

٣ **أعد تعريف كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية عند النقط المبينة بحيث تصبح متصلة عند هذه النقط (إن أمكن) :**

① 📖 $د(س) = \dfrac{س^{٢} - س - ٦}{س - ٣}$ عند س = ٣

② $د(س) = \dfrac{س^{٢} - ١}{س^{٢} - ٣س + ٢}$ عند س = ١

③ $د(س) = \begin{cases} س^{٣} + ٢\,س &، س > ١ \\ ٥\,س - ١ &، س < ١ \end{cases}$ عند س = ١

④ $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ &، س \geq ٢ \\ \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} &، س < ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

⑤ $د(س) = \begin{cases} \frac{٣\,س + ١ - جتا\,س}{٥\,س} &، س > ٠ \\ \frac{٣}{٥}\,جتا\,س &، س < ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

⑥ $د(س) = \frac{|س - ٣|}{س - ٣}$ عند س = ٣

⑦ $د(س) = \frac{س^{٢} - ٦٤}{\sqrt[٣]{س} - ٢}$ عند س = ٨

⑧ $د(س) = \frac{|س| + س}{س}$ عند س = ٠

⑨ $د(س) = \frac{٢}{س - ٥} - \frac{١٢}{س^{٢} - ٤\,س - ٥}$ عند س = ٥

⑩ $د(س) = \frac{جا\,س}{|س|}$ عند س = ٠

تمارين على الاتصال على فترة

٤ ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

① $د(س) = ٧$

② $د(س) = س^{٣} - ٢\,س^{٢} + ١$

③ $د(س) = \frac{٣\,س - ٥}{س - ٣}$

④ $د(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - ٥\,س + ٦}$

⑤ $د(س) = \frac{س - ١}{س^{٤} - ١٣\,س^{٢} + ٣٦}$

⑥ $د(س) = \frac{س}{س^{٢} + س + ١}$

⑦ $د(س) = \frac{٤\,س - ١}{س^{٣} - س}$

⑧ $د(س) = |س - ٢| + |٥ + س|$

⑨ $د(س) = س^{٣}\,جا\,٢\,س$

⑩ $د(س) = جا\,س - ٣\,جتا\,(س + ١)$

⑪ $د(س) = (٣\,س + ٤)^{٢} + جا\,٢\,س$

⑫ $د(س) = \frac{س}{|س| - ٢}$

⑬ $د(س) = \frac{٣\,س - ١}{|س| + ١}$

⑭ $د(س) = \frac{١}{\sqrt{س - ٢}}$

⑮ $د(س) = \frac{س^{٢} + جا\,٣\,س}{س + ١}$

⑯ $د(س) = \frac{\sqrt{س - ٤}}{س - ٦}$

⑰ $د(س) = \frac{\sqrt{س - ٣}}{س^{٢} - ٤}$

⑱ $د(س) = \frac{٣\,س + ٢}{س\,\sqrt{س + ٢}}$

⑲ $د(س) = \frac{س + ١}{\sqrt{س + ٢} - ١}$

⑳ $د(س) = \sqrt{س + ٢} + \sqrt{٣ - س}$

(٢١) $د(س) = \frac{1}{\sqrt{25 - س^2}}$

(٢٢) $د(س) = \sqrt{5 - |س|}$

(٢٣) $د(س) = \frac{س^3 + 1}{جاس}$

(٢٤) $د(س) = \frac{س + 3}{جتاس}$

(٢٥) $د(س) = \frac{جا 3س + جتا 5س}{1 - جتاس}$

(٢٦) $د(س) = \frac{2 + س}{1 + جاس}$

(٢٧) $د(س) = \frac{جا^2 س + جتاس}{س^2 - 9}$

(٢٨) $د(س) = ظا^2 س - 1$

(٢٩) $د(س) = \frac{ظاس}{س^2 - 9}$

---

٥ ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية على مجالها :

(١) $د(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & ، س \leq 1 \\ 2س & ، س > 1 \end{cases}$

(٢) $د(س) = \begin{cases} س^2 & ، س < 3 \\ 5س - 4 & ، س \geq 3 \end{cases}$

(٣) $د(س) = \begin{cases} س^2 - 3س + 2 & ، س \leq 3 \\ 2 & ، 3 < س \leq 4 \\ 6 - س^2 & ، س > 4 \end{cases}$

(٤) $د(س) = \begin{cases} 1 + جاس & \text{حيث } 0 \leq س \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 - جتا 2س & \text{حيث } س > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

(٥) $د(س) = \begin{cases} جاس & ، -\frac{\pi}{4} \leq س < \frac{3\pi}{4} \\ جتاس & ، \frac{3\pi}{4} \leq س \leq 2\pi \end{cases}$

(٦) $د(س) = \begin{cases} \frac{س ظاس + جا^2 3س}{5س^2} & ، -\frac{\pi}{4} < س < 0 \\ 2 جتا 2س & ، 0 \leq س < \frac{\pi}{4} \end{cases}$

(٧) $د(س) = \begin{cases} \frac{(س + 3)^4 - 81}{س} & \text{عندما } س \neq 0 \\ 108 & \text{عندما } س = 0 \end{cases}$

(٨) $د(س) = \begin{cases} 5 - س|س| & ، س \leq 0 \\ \frac{|س|}{س} + 4 & ، س > 0 \end{cases}$

٦ إذا كانت الدالة د : $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س + جا ٢ س}{جا \frac{١}{٢} س} & ، -\pi \leq س < ٠ \\ س + ك & ، ٠ \leq س \leq \pi \end{cases}$ متصلة فى الفترة $[-\pi ، \pi]$

فأوجد قيمة : ك «٦»

---

٧ إذا كانت الدالة د : $د(س) = \begin{cases} ٤ س & ، س \leq -١ \\ أ س + ب & ، -١ < س < ٣ \\ -٢ س & ، س \geq ٣ \end{cases}$ متصلة على ح

فما قيمة كل من : أ ، ب ؟ «$-\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{٩}{٢}$»

---

٨ إذا كانت د : $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{س - أ} - ١}{\sqrt{س} - ٣} & ، س \neq ٩ \\ س - ب & ، س = ٩ \end{cases}$ متصلة على ح

فما قيمة كل من : أ ، ب الحقيقية ؟ «٨ ، ٦»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **ابحث اتصال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين على مجالها :**

(١) $د(س) = \begin{cases} |س - ١| + ٢ س & ، س \leq ٢ \\ ٤ س - س^٢ & ، س > ٢ \end{cases}$

(٢) $د(س) = \begin{cases} \sqrt{٤ - س^٢} & ، |س| \leq ٢ \\ س^٢ + ٢ س & ، |س| > ٢ \end{cases}$

---

٢ أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د : $د(س) = \dfrac{س + ٣}{س^٢ + أ س + ٩}$ متصلة على ح «$]-٦ ، ٦[$»

---

٣ أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د : $د(س) = \dfrac{٢ س + ١}{س^٢ + ٦ س + أ}$ متصلة على ح «$]٩ ، \infty[$»

---

٤ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} -س & ، س < ٠ \\ ١ & ، س \geq ٠ \end{cases}$ ، $ر(س) = \begin{cases} ١ & ، س < ٠ \\ س & ، س \geq ٠ \end{cases}$

أثبت أن : د ، ر غير متصلة عند س = ٠ بينما الضرب (د . ر) متصلة عند س = صفر

---

٥ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} -١ & ، س \neq ٤ \\ ١ & ، س = ٤ \end{cases}$ ، $ر(س) = \begin{cases} ٤ س - ١٠ & ، س \neq ٤ \\ -٦ & ، س = ٤ \end{cases}$

فابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية عند س = ٤

(١) د(س) (٢) ر(س)

(٣) د(س) . ر(س) (٤) |د(س)|

(٥) ر(س) − ٦ د(س) (٦) ر(د(س))

الوحدة الرابعة

حساب المثلثات



مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها.

الدرس 1 قانون الجيب «قاعدة الجيب».

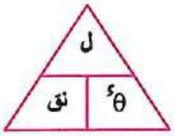
الدرس 2 قانون جيب التمام «قاعدة جيب التمام».

الدرس 3 حل المثلث.

في نهاية الوحـــدة : تطبيقات حياتيـة على الوحدة الرابعة.

مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها

القياس الدائرى والقياس الستينى لزاوية



- القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة

$$= \frac{\text{طول القوس الذى تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$$

أى أن $\theta^{ء} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$ ومنها $\text{ل} = \theta^{ء}\ \text{نق}$ ، $\text{نق} = \frac{\text{ل}}{\theta^{ء}}$

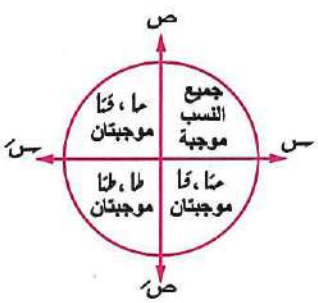
لاحظ أن

π بالتقدير الدائرى تكافئ ١٨٠° بالتقدير الستينى.

- **التحويل بين القياس الدائرى والقياس الستينى :**

$\frac{\text{س}^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\theta^{ء}}{\pi}$ ومنها $\theta^{ء} = \text{س}^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$ ، $\text{س}^{\circ} = \theta^{ء} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi}$

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية



١) $\text{حتا}^{٢}\,\theta + \text{حا}^{٢}\,\theta = ١$

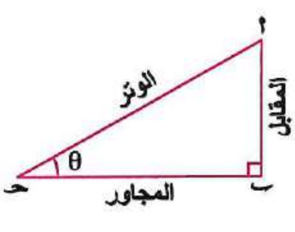
٢) $١ + \text{ظا}^{٢}\,\theta = \text{قا}^{٢}\,\theta$

٣) $١ + \text{ظتا}^{٢}\,\theta = \text{قتا}^{٢}\,\theta$

٤) $\text{حا}\,\theta\ \text{قتا}\,\theta = ١$ ، $\text{حتا}\,\theta\ \text{قا}\,\theta = ١$ ، $\text{ظا}\,\theta\ \text{ظتا}\,\theta = ١$

٥) $\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{حا}\,\theta}{\text{حتا}\,\theta}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{حتا}\,\theta}{\text{حا}\,\theta}$

- **ينبغى تذكر العلاقات الآتية :**



١) $\text{حا}\,\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}}$

٢) $\text{حتا}\,\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{بحـ}}{\text{أحـ}}$

٣) $\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أب}}{\text{بحـ}}$

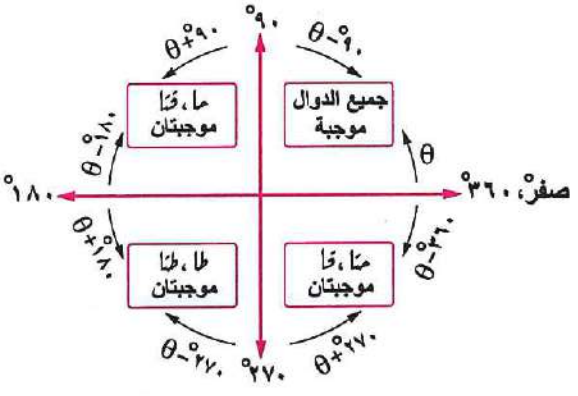
٤) إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها θ فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (س ، ص)

فإن : $\text{س} = \text{حتا}\,\theta$ ، $\text{ص} = \text{حا}\,\theta$ ، $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١$

٥ العلاقات بين الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة

هى متطابقات ويمكن أن نتذكرها

من الشكل المقابل



فمثلًا :

حا (٩٠° + θ) = حتا θ

، ظا (٣٦٠° − θ) = − ظا θ

، ..... كل منهما متطابقة مثلثية.

مساحات بعض الأشكال الهندسية

* مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أَ بَ حا حـ = $\frac{١}{٢}$ بَ حـَ حا أ = $\frac{١}{٢}$ أَ حـَ حا ب

* مساحة المثلث أ ب حـ = $\sqrt{ع (ع - أَ)(ع - بَ)(ع - حـَ)}$ حيث ع = $\frac{أَ + بَ + حـَ}{٢}$

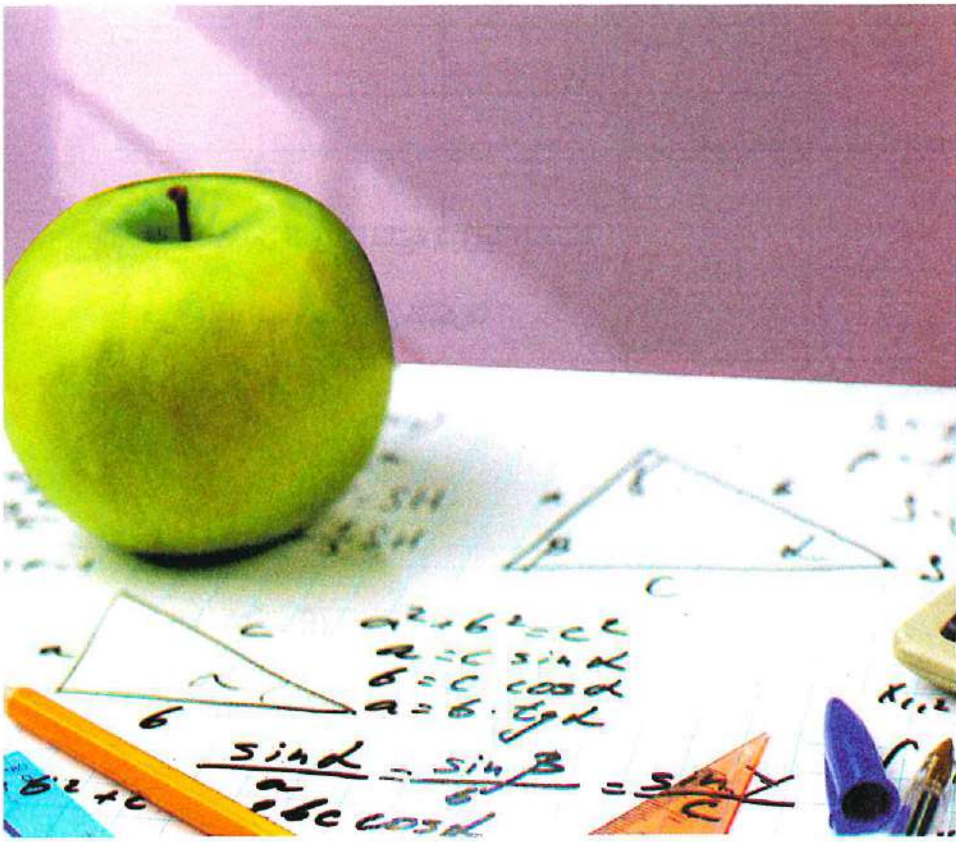
* مساحة الشكل الرباعى = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

* مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س سم = $\frac{ن}{٤}$ س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{ن}$

* مساحة الدائرة = π نق^{٢} ، محيط الدائرة = ٢ π نق

* مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ $\theta^{ء}$ نق^{٢} ، محيط القطاع = ٢ نق + ل

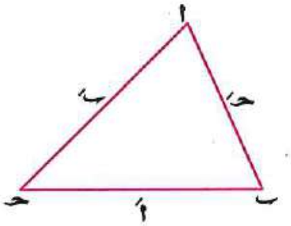
* مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{ء}$ − حا θ)



الدرس 1

قانون الجيب (قاعدة الجيب)

«فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها».

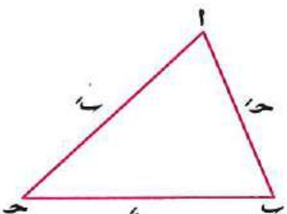


أى أنه فى أى مثلث أ ب حـ يكون : $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـَ}}{\text{جا حـ}}$

حيث إن الرموز أ ، ب ، حـ تعبر عن قياسات زوايا Δ أ ب حـ

كما أن الرموز أَ ، بَ ، حـَ تعبر عن أطوال الأضلاع $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ على الترتيب.

البرهـان



$\because$ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين فيه

× جيب الزاوية المحصورة بينهما.

$\therefore$ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أَ حـَ جا ب (١)

= $\frac{1}{2}$ حـَ بَ جا أ (٢)

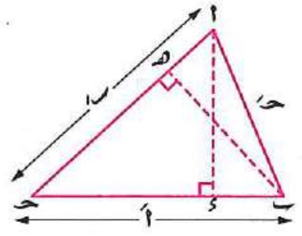
= $\frac{1}{2}$ أَ بَ جا حـ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : $\therefore$ حـَ بَ جا أ = أَ حـَ جا ب = أَ بَ جا حـ

وبالقسمة على أَ بَ حـَ : $\therefore$ $\frac{\text{جا أ}}{\text{أَ}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جا حـ}}{\text{حـَ}}$

$\therefore$ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـَ}}{\text{جا حـ}}$ (وهو المطلوب)

برهان آخر



أولاً : إذا كان Δ أب ح حاد الزوايا :

نرسم $\overline{\text{أء}} \perp \overline{\text{ب ح}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ ح}}$

في Δ أ ء ب : $\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \text{حا ب}$ ∴ أء = أب حا ب = حَ حا ب

، في Δ أ ء ح : $\frac{\text{أء}}{\text{أح}} = \text{حا ح}$ ∴ أء = أح حا ح = بَ حا ح

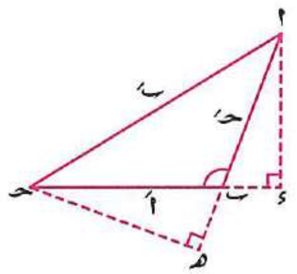
∴ حَ حا ب = بَ حا ح ∴ $\boxed{\frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا ح}}}$ (١)

، وبالمثل فى Δ ب هـ أ : $\frac{\text{ب هـ}}{\text{أب}} = \text{حا أ}$ ∴ ب هـ = أب حا أ = حَ حا أ

، فى Δ ب هـ ح : $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب ح}} = \text{حا ح}$ ∴ ب هـ = ب ح حا ح = أَ حا ح

∴ حَ حا أ = أَ حا ح ∴ $\boxed{\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا ح}}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا ح}}$ (وهو المطلوب)



ثانيًا : إذا كان Δ أب ح منفرج الزاوية فى ب :

نرسم $\overline{\text{أء}} \perp \overleftrightarrow{\text{ح ب}}$ ، $\overline{\text{ح هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

فى Δ أ ء ب : $\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \text{حا (∠ أ ب ء)}$

∴ أء = أب حا $(180^\circ - \text{ب})$ = حَ حا ب

، فى Δ أ ء ح : $\frac{\text{أء}}{\text{أح}} = \text{حا ح}$ ∴ أء = أح حا ح = بَ حا ح

∴ حَ حا ب = بَ حا ح ∴ $\boxed{\frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا ح}}}$ (١)

، فى Δ ح هـ ب : $\frac{\text{ح هـ}}{\text{ب ح}} = \text{حا (∠ ح ب هـ)}$

∴ ح هـ = ب ح حا $(180^\circ - \text{ب})$ = أَ حا ب

، فى Δ ح هـ أ : $\frac{\text{ح هـ}}{\text{أ ح}} = \text{حا أ}$ ∴ ح هـ = بَ حا أ

∴ أَ حا ب = بَ حا أ ∴ $\boxed{\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا ح}}$ (وهو المطلوب)

* لاحظ أن قانون الجيب صحيح أيضًا فى حالة المثلث القائم الزاوية.

مثال (١)

في Δ أ ب ح إذا كان : أ = ١٠ سم ، ق(∠أ) = ٣٠° ، ق(∠ب) = ٤٥°

فأوجد مستخدمًا حاسبة الجيب كلاً من : بَ ، حَ لرقم عشري واحد وكذلك مساحة Δ أ ب ح لأقرب عدد صحيح.

الحل

∵ ق(∠ح) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٥°) = ١٠٥°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا ح}}$ ∴ $\frac{١٠}{\text{حا } ٣٠°} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا } ٤٥°} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا } ١٠٥°}$

∴ بَ = $\frac{\text{١٠ حا ٤٥°}}{\text{حا ٣٠°}}$ ≈ ١٤,١ سم ، حَ = $\frac{\text{١٠ حا ١٠٥°}}{\text{حا ٣٠°}}$ ≈ ١٩,٣ سم

، مساحة Δ أ ب ح = $\frac{١}{٢}$ بَ حَ حا أ = $\frac{١}{٢}$ × ١٤,١ × ١٩,٣ حا ٣٠° ≈ ٦٨ سم²

مثال (٢)

أ ب ح ء متوازي أضلاع فيه : أب = ١٢٣,٤ سم ، القطران $\overline{\text{أح}}$ ، $\overline{\text{بء}}$

يصنعان مع الضلع $\overline{\text{أب}}$ زاويتين قياساهما ٤٢َ ١٥° ، ١٧َ ٥٥° على الترتيب **أوجد :**

[١] طول كل من القطرين $\overline{\text{بء}}$ ، $\overline{\text{أح}}$ [٢] مساحة متوازي الأضلاع أ ب ح ء

الحل

نفرض أن : $\overline{\text{أح}} \cap \overline{\text{بء}}$ = {م}



∴ في Δ م أ ب : ق(∠أ م ب) = ١٨٠° − (٤٢َ ١٥° + ١٧َ ٥٥°) = ١َ ١٠٩°

∴ $\frac{١٢٣,٤}{\text{حا ١َ ١٠٩°}} = \frac{\text{ب م}}{\text{حا ٤٢َ ١٥°}} = \frac{\text{أ م}}{\text{حا ١٧َ ٥٥°}}$

∴ ب م = $\frac{\text{١٢٣,٤ حا ٤٢َ ١٥°}}{\text{حا ١َ ١٠٩°}}$ ≈ ٣٥,٣ سم   ∴ ب ء = ٢ ب م = ٧٠,٦ سم

، أ م = $\frac{\text{١٢٣,٤ حا ١٧َ ٥٥°}}{\text{حا ١َ ١٠٩°}}$ ≈ ١٠٧,٣ سم   ∴ أ ح = ٢ أ م = ٢١٤,٦ سم

، مساحة ▱ أ ب ح ء = ٤ مساحة Δ م أ ب = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ب م × أ م حا(∠أ م ب)

= ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ٣٥,٣ × ١٠٧,٣ حا ١َ ١٠٩° ≈ ٧١٦٢ سم²

مثال (٣)

أ ب ح مثلث فيه : ٣ حا أ = ٤ حا ب = ٢ حا ح أوجد أطوال أضلاعه إذا علم أن محيطه = ٣٩ سم

الحل

∵ ٣ حا أ = ٤ حا ب = ٢ حا ح وبالقسمة على ١٢   ∴ $\frac{\text{حا أ}}{٤} = \frac{\text{حا ب}}{٣} = \frac{\text{حا ح}}{٦}$

∴ $\frac{٤}{\text{حا أ}} = \frac{٣}{\text{حا ب}} = \frac{٦}{\text{حا ح}}$ ∴ أَ : بَ : حَ = ٤ : ٣ : ٦

بفرض أن : أَ = ٤ ك ، بَ = ٣ ك ، حَ = ٦ ك

، ∵ محيط المثلث = ٣٩ سم ∴ ٤ ك + ٣ ك + ٦ ك = ٣٩

∴ ١٣ ك = ٣٩ ∴ ك = ٣

∴ أ = ١٢ سم ، ب = ٩ سم ، ح = ١٨ سم

مثال ٤

إذا كان محيط Δ أ ب حـ يساوى ٢٤ سم ، ق (∠ ب) = ٣٠° ، ق (∠ حـ) = ٤٨° **أوجد :** ب

الحل

∵ ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٨°) = ١٠٢°

∴ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{ح}{جا ح}$ ∴ $\frac{أ}{جا ١٠٢°} = \frac{ب}{جا ٣٠°} = \frac{ح}{جا ٤٨°}$

∵ $\frac{مجموع المقدمات}{مجموع التوالى}$ = إحدى النسب ∴ $\frac{أ + ب + ح}{جا ١٠٢° + جا ٣٠° + جا ٤٨°} = \frac{ب}{جا ٣٠°}$

∴ $\frac{٢٤}{جا ١٠٢° + جا ٣٠° + جا ٤٨°} = \frac{ب}{جا ٣٠°}$ ∴ ب = $\frac{٢٤ جا ٣٠°}{جا ١٠٢° + جا ٣٠° + جا ٤٨°}$ ≈ ٥,٤ سم

تمرين مشهور

فى أى مثلث أ ب حـ يكون : $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{ح}{جا ح}$ = ٢ نق

حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ

البرهان

نرسم الدائرة التى تمر برؤوس Δ أ ب حـ

ثم نرسم القطر $\overline{ب ء}$ والوتر $\overline{حـ ء}$



١ **إذا كان Δ أ ب حـ حاد الزوايا :**

فيكون ق (∠ ب حـ ء) = ٩٠° (محيطية مرسومة فى نصف دائرة)

، ق (∠ أ) = ق (∠ ء) (محيطيتان تحصران $\frown{ب ح}$)

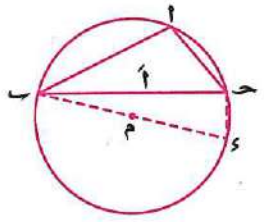
فى Δ ء ب حـ : جا ء = $\frac{أ}{ب ء} = \frac{أ}{٢ نق}$

∴ جا أ = $\frac{أ}{٢ نق}$

∴ $\frac{أ}{جا أ}$ = ٢ نق وبطريقة مماثلة يمكن إثبات أن : $\frac{ب}{جا ب}$ = ٢ نق ، $\frac{ح}{جا ح}$ = ٢ نق

∴ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{ح}{جا ح}$ = ٢ نق (وهو المطلوب)

٢ إذا كان Δ ٢ب حـ منفرج الزاوية :



فيكون : ق (∠ ب ء حـ) = ١٨٠° − ق (∠ ٢)

∴ جا (١٨٠° − ٢) = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ب ء}}$ ∴ جا ٢ = $\frac{\text{أَ}}{\text{٢ نق}}$

∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا ٢}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا ٢}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـَ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق (وهو المطلوب)

مثال ٥

فى Δ ٢ب حـ إذا كان : بَ = ٧ سم ، ق (∠ ب) = ٣٠° ، حـَ = ٩ سم

احسب طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث ٢ب حـ واحسب أيضًا ق (∠ ٢) لأقرب درجة.

الحـــل

∵ $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{٧}{\text{جا ٣٠°}}$ = ٢ نق

∴ نق = $\frac{٧}{\text{٢ جا ٣٠°}}$ = ٧ سم

، ∵ $\frac{\text{حـَ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{٩}{\text{جا حـ}}$ = ١٤

∴ جا حـ = $\frac{٩}{١٤}$

∴ ق (∠ حـ) ≈ ٤٠° ∴ ق (∠ ٢) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٠°) = ١١٠°

أ، ق (∠ حـ) ≈ ١٤٠° ∴ ق (∠ ٢) = ١٨٠° − (٣٠° + ١٤٠°) = ١٠°

> **لاحـظ أنه**
>
> يوجد مثلثان يحققان هذه المعطيات وهذه الحالة تعرف بالحالة المبهمة وسوف ندرسها بالتفصيل فى درس حل المثلث.

مثال ٦

فى أى مثلث ٢ب حـ

أثبت أن : مساحة Δ ٢ب حـ = ٢ نق^{٢} جا ٢ جا ب جا حـ

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ٢ب حـ

الحـــل

∵ مساحة Δ ٢ب حـ = $\frac{١}{٢}$ بَ حـَ جا ٢ حيث بَ = ٢ نق جا ب ، حـَ = ٢ نق جا حـ

∴ مساحة Δ ٢ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ نق جا ب × ٢ نق جا حـ × جا ٢

= ٢ نق^{٢} جا ٢ جا ب جا حـ

تمـارين 19

على قانون الجيب (قاعدة الجيب)

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهـم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى أى مثلث س ص ع يكون : س ص : ص ع = ...

(أ) حا س : حا ص (ب) حا ص : حا ع

(جـ) حا ع : حا س (د) حا ع : حا ص

(٢) فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق(∠أ) = ٣٠° ، حـ = ١٥ $\sqrt{٣}$ سم ، ق(∠حـ) = ٦٠°

فإن : أ = ... سم

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ١٥ (د) ٦٠

(٣) فى المثلث د هـ و الذى فيه : ق(∠د) = ٨٠° ، ق(∠هـ) = ٦٠° إذا كان : و = ١٢ سم

فإن : د = ... سم

(أ) $\frac{١٢ \text{ حا } ٨٠°}{\text{حا } ٤٠°}$ (ب) $\frac{١٢ \text{ حا } ٨٠°}{\text{حا } ٦٠°}$ (جـ) $\frac{١٢ \text{ حا } ٤٠°}{\text{حا } ٨٠°}$ (د) $\frac{١٢ \text{ حتا } ٨٠°}{\text{حتا } ٤٠°}$

(٤) فى Δ أ ب حـ : إذا كان : أ = ٤ سم ، ب = ٧ سم ، ق(∠حـ) = ١٢٠°

فإن مساحة المثلث = ... سم²

(أ) ٧ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٤ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٧ (د) ١٤

(٥) س ص ع مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى .... سم

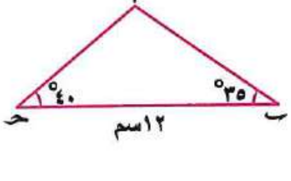
(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

(٦) Δ س ص ع فيه : $\frac{\text{س}}{\text{حا س}}$ = ٦ فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... وحدة طول.

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٣ (د) ٩

(٧) فى الشكل المقابل :

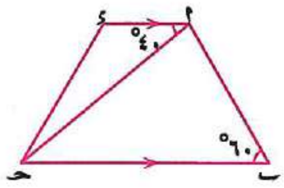
طول أ ب = ... سم



(أ) ٦ (ب) ٧

(جـ) ٨ (د) ٩

(٨) في الشكل المقابل :



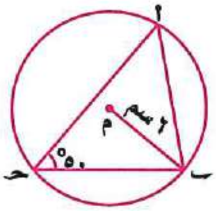
$\overline{أء} // \overline{بحـ}$ ، أب = ٤ سم

، ق (∠ ء أ حـ) = ٤٠° ، ق (∠ ب) = ٦٠°

فإن : طول $\overline{أحـ}$ ≈ .... سم

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٤

(٩) في الشكل المقابل دائرة مركزها م ، إذا كان : ب م = ٦ سم



فإن : أب = ... سم

(أ) ٦ جا ٥٠° (ب) ١٢ جا ٥٠°

(جـ) ٦ جتا ٥٠° (د) ١٢ جتا ٥٠°

(١٠) دائرة طول قطرها ٢٠ سم ، تمر برؤوس Δ أ ب حـ الحاد الزوايا الذي فيه : ب حـ = ١٠ سم

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٥٠°

(١١) أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٤٥° وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٦ سم

فإن : أً = ... سم

(أ) ١٣ (ب) $٦\sqrt{٢}$ (جـ) ١٢ (د) $\sqrt{٢}$

(١٢) إذا كان طول ضلع ما في أي مثلث = ١٢ سم ، وقياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع = ٥٥°

فإن محيط الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث ≈ .... سم

(أ) ٣٦ (ب) ٤٢ (جـ) ٤٦ (د) ٥٢

(١٣) إذا كان محيط المثلث أ ب حـ يساوي ١٥ سم ، ق (∠ أ) = ٥٣° ، ق (∠ ب) = ٤٧°

فإن : طول $\overline{أب}$ ≈ .... سم

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٥ (د) ٨

(١٤) أ ب حـ مثلث فيه : أً = ٢٧ سم ، ق (∠ ب) = ٨٢° ، ق (∠ حـ) = ٥٦°

فإن مساحة سطحه ≈ .... سم^{٢}

(أ) ٥٤٠ (ب) ٤٤٧ (جـ) ٣٥٠ (د) ٤٠٠

(١٥) مثلث أ ب حـ فيه ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٢ : ٣ : ٤ ، أب = ١٢ سم

فإن : طول $\overline{أحـ}$ ≈ .... سم

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٦ (د) ١٨

(١٦) في المثلث أ ب ح أي من العبارات التالية صحيحة ؟

(أ) حا أ + حتا ب = أ + ب (ب) أ حا ب = ب حا أ

(ج) أ = ب حا ح . (د) $\frac{أ}{حا أ} = \frac{حا ب}{ب}$

(١٧) في Δ س ص ع يكون المقدار : ٢ نق حا س = ... «حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة له»

(أ) ع (ب) ص

(ج) س (د) مساحة Δ س ص ع

(١٨) إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع فإن : $\frac{ص}{٢ حا ص}$ = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (ج) $\frac{١}{٢}$ نق (د) ٤ نق

(١٩) إذا كان المثلث أ ب ح حاد الزوايا وكان ٢ أ = $\frac{ب}{حا ب}$ فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (ج) ٦٠° (د) ٧٥°

(٢٠) إذا كان : أ ب ح مثلث فيه : حا أ = ٢ حا ح ، ب ح = ٦ سم فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٦

(٢١) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ح يساوي ٣ سم

وكان : حا أ + حا ب + حا ح = ٢ فإن محيط المثلث أ ب ح = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (ج) ١٢ (د) ٢٤

(٢٢) أ ب ح مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٦ سم وكانت مساحة الدائرة المارة برؤوسه تساوي ك π سم^{٢}

فإن : ك = ...

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ٨ $\sqrt{٣}$ (ج) ١٢ (د) ٢٤

(٢٣) في أي مثلث أ ب ح يكون $\frac{حا (أ + ب)}{حا أ + حا ب}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{ح}{أ + ب}$ (ج) $\frac{أ}{ب + ح}$ (د) $\frac{ب}{أ + ح}$

(٢٤) في Δ أ ب ح يكون : $\frac{أ}{أ + ب} = \frac{حا أ}{.........}$

(أ) حا ب (ب) حا ح (ج) حا أ + حا ب (د) حا أ + حا ح

(٢٥) في Δ س ص ع : إذا كان ٣ حا س = ٤ حا ص = ٢ حا ع فإن س : ص : ع = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٦ : ٤ : ٣ (ج) ٣ : ٤ : ٦ (د) ٤ : ٣ : ٦

(٢٦) أ ب ح مثلث فيه : $\frac{حا أ}{٣} = \frac{٢ حا ب}{٥} = \frac{حا ح}{٤}$ فإن : أ : ب : ح = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (ج) ٧ : ٢ : ٤ (د) ٣ : ٥ : ٤

(٢٧) فى Δ أ ب حـ إذا كان : $\frac{\text{حا أ}}{٤} = \frac{\text{حا ب}}{٩} = \frac{\text{حا حـ}}{٧}$ فإن أكبر زاوية قياسًا تكون ....

(أ) ∠ أ (ب) ∠ ب (جـ) ∠ حـ (د) قائمة.

(٢٨) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٣ : ٥ : ٤

فإن : $حـ^٢ : أ^٢$ = ...

(أ) $\sqrt{٦}$: ٢ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ٤ : ٣ (د) ٣ : ٢

(٢٩) فى أى مثلث أ ب حـ يكون : $\frac{أ}{ب} \times \frac{\text{حا ب}}{\text{حا أ}}$ = ...

(أ) $\frac{حـ}{\text{حا حـ}}$ (ب) $\frac{\text{حا حـ}}{حـ}$ (جـ) ٤ نق^٢ (د) ١

(٣٠) فى Δ أ ب حـ إذا كان نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث = ٤ سم

فإن : $\frac{أ + ب + حـ}{\text{حا أ} + \text{حا ب} + \text{حا حـ}}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٣١) إذا كان أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب وكان : ب = ١٠ سم فإن : $\frac{أ}{\text{حا أ}} + \frac{حـ}{\text{حا حـ}}$ = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٤٠ (د) ١٠٠

(٣٢) إذا كان نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ يساوى نق

فإن محيط المثلث = ... (حا أ + حا ب + حا حـ)

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) ٤ نق^٢ (د) ٨ نق^٣

(٣٣) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ − ب = ٤ سم ، حا أ = $\frac{٣}{٢}$ حا ب فإن : أ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٣٤) إذا كان أ ب حـ مثلث محيطه ٢٤ سم وكان : حا أ + حا ب = ٣ حا حـ فإن : حـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(٣٥) أ ب حـ مثلث فيه حا ب + حا حـ = ٤ حا أ وكان ب + حـ = ٢ أ + ١٠ سم

فإن : أ = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٣٦) أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، ق (∠ أ) − ق (∠ حـ) = ٩٠°

فإن : طا حـ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٣٧) إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب حـ وكان أ = نق

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° فقط. (ب) ٣٠° أ، ١٢٠° (جـ) ١٥٠° فقط. (د) ٣٠° أ، ١٥٠°

(٣٨) إذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ هى Δ ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

فإن : $\frac{\text{٤ نق } \Delta}{\text{أَ بَ حَ}}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

(٣٩) فى Δ أ ب حـ يكون $\frac{\text{٢ بَ}}{\text{حا ب}}$ = ... نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(٤٠) أ ب حـ مثلث فيه بَ = ١٢ سم ، نق هو طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث

فإن مساحة المثلث = ... سم^{٢}

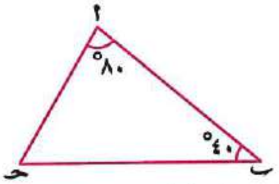
(أ) $\frac{\text{٢ أَ حَ}}{\text{نق}}$ (ب) $\frac{\text{٣ أَ حَ}}{\text{نق}}$ (جـ) $\frac{\text{٤ أَ حَ}}{\text{نق}}$ (د) $\frac{\text{٦ أَ حَ}}{\text{نق}}$

(٤١) إذا كان المثلث أ ب حـ قائم الزاوية ومتساوى الساقين ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

فإن مساحة Δ أ ب حـ = ... (بدلالة نق)

(أ) $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (ب) ٢ نق^{٢} (جـ) نق^{٢} (د) ٤ نق^{٢}

(٤٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان محيط Δ أ ب حـ = ٢٠ سم

فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه ≈ .... سم

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٤٣) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : حا (ب + حـ) = $\frac{٣}{٥}$ ، ب حـ = ٨ سم

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٤٤) مثلث مساحته = $\frac{\text{أَ}^{٢}\text{ حا ب حا حـ}}{\text{ل حا أ}}$ فإن : ل = ... ، ل ≠ ٠ .

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤٥) إذا كان نق نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب حـ وكان : أَ = $\frac{١}{٢}$ نق

فإن : ق (∠ أ) = ... حيث أ زاوية حادة.

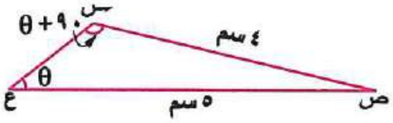
(أ) حا$^{-١}$ (١) (ب) حا$^{-١}$ (٢) (جـ) حا$^{-١}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)$ (د) حا$^{-١}$ $\left(\frac{١}{٤}\right)$

(٤٦) إذا كانت Δ هى مساحة المثلث س ص ع ، ح هى نصف محيط المثلث س ص ع

فإن : $\frac{٢}{\text{عَ حا س}} + \frac{٢}{\text{سَ حا ص}} + \frac{٢}{\text{صَ حا ع}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{ح}}{\Delta}$ (ب) $\frac{\text{٢ ح}}{\Delta}$ (جـ) $\frac{\text{٣ ح}}{\Delta}$ (د) $\frac{\text{٤ ح}}{\Delta}$

(٤٧) في الشكل المقابل :



طا θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$

(جـ) $\frac{٥}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ س ص ع مثلث فيه : ق(∠س) = ٨٠° ، ق(∠ص) = ٦٠° ، عَ = ١٠ سم

أوجد كلًا من سَ ، صَ لأقرب سم «١٥ سم ، ١٣ سم»

٢ أ ب حـ مثلث فيه : حَ = ١٩ سم ، ق(∠أ) = ١١٢° ، ق(∠ب) = ٣٣° أوجد بَ ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب حـ لأقرب رقمين عشريين. «١٨,٠٤ سم ، ١٦,٥٦سم»

٣ ل م ن مثلث فيه : مَ = ٦٨,٤ سم ، ق(∠م) = ١٠٠° ، ق(∠ن) = ٤٠°

أوجد : (١) لَ (٢) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن

(٣) مساحة المثلث ل م ن لأقرب سم² «٤٤,٦٤ سم ، ٣٤,٧٣ سم ، ٩٨١ سم²»

٤ ل م ن مثلث فيه : ق(∠ل) = ٥٢َ ١٨ ١٨° ، ق(∠ن) = ١٧َ ٤٤ ٤٤° ، ن ل = ٣٥ سم

أوجد : (١) طول كل من : $\overline{م ن}$ ، $\overline{ل م}$

(٢) مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن «١٢,٧ سم ، ٢٧,٤ سم ، ١٢٠٨,٧ سم²»

٥ أ ب حـ مثلث فيه : بَ = ١٠ سم ، ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(∠حـ) = ٨٠°

أوجد طول أكبر الأضلاع طولاً. «١١ سم»

٦ أ ب حـ مثلث فيه : حَ = ٤,٥ سم ، ق(∠أ) = ١٠٠° ، ق(∠ب) = ١٥°

أوجد طول أصغر الأضلاع طولاً. «١,٣ سم»

٧ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠أ) = ٦٠° ، أَ = ٧ √٣ سم أوجد مساحة ومحيط الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$) «١٥٤ سم² ، ٤٤ سم»

٨ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠ب) = ٤٥°

أثبت أن : أَ : بَ : حَ = √٦ : ٢ : √٣ + ١

٩ أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ١٣ سم ، ق(∠أ) = ٨َ ٥٣° ، حَ = ١٥ سم

احسب طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ ، احسب ق(∠حـ)

«٨,١ سم ، ٩ً ٢٣َ ٦٧° أ، ٥١ً ٣٦َ ١١٢°»

١٠ أ ب ح مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٣٥° ، أ = ٨ سم ، ب = ٦ سم أوجد : ق (∠ ب) «٢٥° ٢٨َ ٤٥ً»

١١ أوجد محيط المثلث أ ب ح الذى فيه : ح = ٨,٧ سم ، ق (∠ أ) = ٥٧° ١٣َ
، ق (∠ ب) = ٦٤° ١٨َ «٢٦,٥ سم»

١٢ أ ب ح مثلث فيه : ق (∠ ب) = ٤٥° ، ق (∠ ح) = ٦٠° ، وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٤٠ سم
احسب مساحة ومحيط هذا المثلث لأقرب عدد صحيح. «٤٧٣ سم^2 ، ١٠٢ سم»

١٣ أ ب ح مثلث متساوى الساقين فيه : ق (∠ أ) = ١٢٠° ، وطول نصف قطر الدائرة المارة
برؤوسه يساوى ١٢ سم أوجد ح ثم احسب مساحة Δ أ ب ح «١٢ سم ، ٦٢,٤ سم^2»

١٤ أ ب ح مثلث متساوى الساقين فيه : أ = ب ، ق (∠ أ) = ١٥° ، محيطه = ٢٥ سم
أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوسه. «٤٧٤ سم^2»

١٥ إذا كان محيط Δ أ ب ح = ٤٠ سم ، ق (∠ أ) = ٤٤° ، ق (∠ ب) = ٦٦°
فأوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب ح «١٠,٩ سم ، ١٤,٣ سم ، ١٤,٨ سم»

١٦ أ ب ح مثلث فيه : ح = ١٢ سم ، ق (∠ ب) = ٣ ق (∠ أ) = ٦٠°
أوجد أ ثم أوجد مساحة المثلث لأقرب سم^2 «٤,٢ سم ، ٢٢ سم^2»

١٧ أ ب ح مثلث مساحة سطحه ٤٥٠ سم^2 ، ق (∠ ب) = ٨٢° ، ق (∠ ح) = ٥٦°
فما قيمة أ ؟ «٢٧ سم»

١٨ أ ب ح مثلث حاد الزوايا فيه : أ ح = ١٢ سم ، جا أ = ٠,٦ ، مساحته تساوى ٤٣,٢ سم^2
أوجد طول $\overline{أب}$ ، طول $\overline{ب ح}$ ، ق (∠ ب) «١٢ سم ، ٧,٦ سم ، ٧١° ٣٤َ»

١٩ أوجد محيط المثلث أ ب ح الحاد الزوايا إذا كان :
أ = ٧ سم ، ب = ٨ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠° «٢٠ سم»

٢٠ أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى ب ، ء ∈ $\overleftarrow{ب ح}$ ، ء ∉ $\overline{ب ح}$ بحيث ح ء = ٤ سم
، ق (∠ أ ء ح) = ٤٥° ١٥َ ، ق (∠ ح أ ء) = ١٨° أوجد طول $\overline{أب}$ لأقرب سم «٨ سم»

٢١ س ص ع مثلث فيه : ص ع = ١٥ سم ، ق (∠ ص) = ٣٠° ، ق (∠ ع) = ٧٠°
احسب طول العمود الساقط من س على $\overline{ص ع}$ «٧,١٦ سم»

٢٢ أ ب ح مثلث منفرج الزاوية فى ح فيه : أ = ٨ سم ، ح = ٢٠ سم ، ظا أ = $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$
أوجد : ق (∠ ح) «١٢٣° ٣٣َ»

٢٣ ∆ أ ب حـ مثلث فيه : ب = ٥ سم ، ظا حـ = $\frac{٤}{٣}$ ، ق (∠ ب) = ٣٠°

أوجد لأقرب سنتيمتر كلاً من أ ، حـ ومساحة المثلث أ ب حـ «١٠ سم ، ٨ سم ، ٢٠ سم^٢»

---

٢٤ س ص ع مثلث فيه : جا س + جا ص + جا ع = ٢,٣٧ ، ومحيطه = ٥٦,٨٨ سم

أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه. «١٢ سم»

---

٢٥ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ق (∠ ب) = ٤٥° فإذا كان : أ + ب = ($\sqrt{٦}$ + ٢) سم

فأوجد كلًّا من : أ ، ب «$\sqrt{٦}$ سم ، ٢ سم»

---

٢٦ أ ب حـ مثلث فيه : جا أ : جا ب : جا حـ = ٢ : ٤ : ٥ ، حـ − ب = ٣ سم

أوجد كلاً من : أ ، ب «٦ سم ، ١٢ سم»

---

٢٧ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٣ : ٤ : ٣

فإذا كان : أ = ٥ سم فأوجد محيط المثلث. «١٥,٩ سم»

---

٢٨ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ١ : ٣ : ٥

، فإذا كان محيط المثلث = ١٦ سم فأوجد طول أصغر أضلاع المثلث طولاً. «٢,٥ سم»

---

٢٩ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = $\frac{٢}{٣}$ ق (∠ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ حـ) ، طول نصف قطر الدائرة المارة

برؤوسه = ١٠ سم أوجد مساحة ∆ أ ب حـ «١١٠ سم^٢»

---

٣٠ أ ب حـ مثلث فيه : ٦ جا أ = ٤ جا ب = ٣ جا حـ ، محيطه = ٤٥ سم

أوجد كلاً من : أ ، حـ «١٠ سم ، ٢٠ سم»

---

٣١ فى ∆ أ ب حـ إذا كان : $\frac{أ + ب - حـ}{٣} = \frac{أ + حـ - ب}{٥} = \frac{ب + حـ - أ}{٧}$

فأثبت أن : جا أ : جا ب : جا حـ = ٤ : ٥ : ٦

---

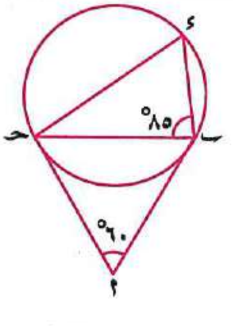
٣٢ فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، حـ

فإذا كان : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ق (∠ د ب حـ) = ٨٥°

، مساحة المثلث أ ب حـ = ٩ $\sqrt{٣}$ سم^٢

فأوجد لأقرب سنتيمتر محيط المثلث د ب حـ



«١٧ سم»

٣٣ في الشكل المقابل :

م دائرة ، أ ب = ٥ سم ، ق(∠ أ م ب) = ٨٠°

، ق(∠ حـ أ ب) = ٨٥°

أوجد : (١) محيط Δ أ ب حـ

(٢) مساحة سطح الدائرة م



«١٩,١٢ سم ، ٤٧,٥ سم²»

---

٣٤ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق(∠ أ) = ٥٠° ، ق(∠ ء ب حـ) = ٧٠° ، ب ء = ٨ سم

أوجد محيط متوازى الأضلاع. «٣٨ سم»

---

٣٥ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ١٨ سم ، ق(∠ حـ أ ب) = ٣٦° ، ق(∠ ء ب أ) = ٤٤°

أوجد طول القطر $\overline{\text{أحـ}}$ ، ومساحة متوازى الأضلاع. «٢٥,٣٩ سم ، ٢٦٩ سم²»

---

٣٦ أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، أ حـ = ٢٠ سم ، ق(∠ أ م ء) = ١٣٠°

، ق(∠ حـ أ ب) = ٨٥° أوجد طول $\overline{\text{ب ء}}$ ثم أوجد مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

«٢٨,٢ سم ، ٢١٦ سم²»

---

٣٧ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، أ ء = ٢٠ سم ، ق(∠ ء) = ١٢٠°

، ق(∠ ب) = ٦٢° ، ق(∠ أ حـ ب) = ٢٥° ٢٣َ

أوجد : (١) طول كل من : $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ لأقرب سم

(٢) مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء لأقرب سم²

«٢٩ سم ، ٣٣ سم ، ٣٠٥ سم²»

---

٣٨ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : حـ ء = ١٠٠ سم ، ق(∠ ب حـ أ) = ٣٦°

، ق(∠ ب ء أ) = ٥٥° ، ق(∠ ب حـ ء) = ٨٥° ، ق(∠ حـ ء أ) = ٨٧°

أوجد طول كل من : $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ لأقرب سنتيمتر «١١٢ سم ، ١٤٤ سم»

---

٣٩ إذا كان أ ب حـ ء شكلاً رباعيًا فيه : ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، ق(∠ ب أ ء) = ٨٠°

، أ ب = أ ء = ١٠ سم ، ب ء = ب حـ احسب مساحة الشكل أ ب حـ ء «١٠٢ سم²»

---

٤٠ فى أى مثلث أ ب حـ :

أثبت أن : (١) $\frac{\text{٣ أ} - \text{٤ ب}}{\text{٣ جا أ} - \text{٤ جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ (٢) مساحة المثلث = $\frac{\text{أ}^{٢}\text{ جا ب جا حـ}}{\text{٢ جا أ}}$

(٣) مساحة المثلث = $\frac{\text{أ ب حـ}}{\text{٤ نق}}$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب ح يساوى ٣ سم

فإن : $\frac{\text{أَ بَ حَ}}{\text{جا أ جا ب جا ح}}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ٢٧ (د) ٢١٦

(٢) إذا كان أ ب ح مثلث فإن : أَ قتا أ + بَ قتا ب + حَ قتا ح = ...

(أ) ٢ نق (ب) ٤ نق (ج) ٦ نق (د) ٨ نق

(٣) إذا كان : أَ = جا ب ، بَ = جا ح ، حَ = جا أ فإن محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ح

يساوى ....

(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (ج) π (د) ٢ π

(٤) فى Δ أ ب ح : $\frac{\text{أَ جا أ + بَ جا ب + حَ جا ح}}{\text{أَ}^٢ + \text{بَ}^٢ + \text{حَ}^٢}$ = ...

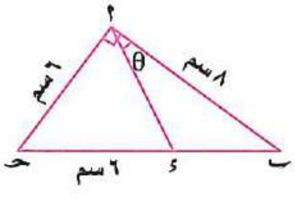
(أ) $\frac{١}{\text{نق}^٢}$ (ب) $\frac{١}{\text{٢ نق}}$ (ج) ٢ نق (د) $\text{نق}^٢$

(٥) إذا كان أ ب ح مثلث مساحته ٢٤ $\text{سم}^٢$ وكان طول نصف قطر الدائرة الخارجة عنه ٥ سم

فإن : جا أ جا ب جا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{٣}{٢٥}$ (ب) $\frac{٦}{٢٥}$ (ج) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

(٦) فى الشكل المقابل :

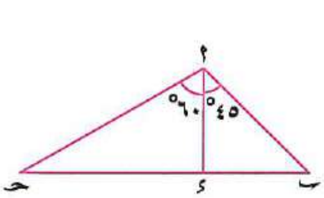


طا θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$

(ج) ٢ (د) ١

(٧) فى الشكل المقابل :

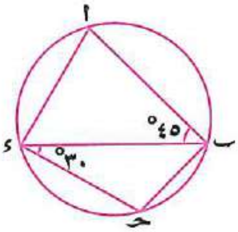


إذا كان : حء = ٢ ءب

فإن : $\frac{\text{جا ب}}{\text{جا ح}}$ = ...

(أ) $\sqrt{٦}$ (ب) $\frac{\sqrt{٦}}{٤}$ (ج) $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ (د) $\frac{٢\sqrt{٦}}{٣}$

(٨) في الشكل المقابل :

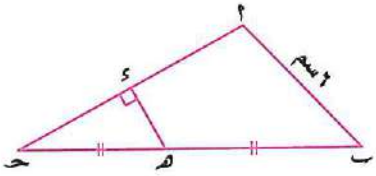


إذا كان : أء = ٤ $\sqrt{٢}$ سم فإن : ب ح = ... سم

(أ) ٢ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤

(جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ٨

(٩) في الشكل المقابل :



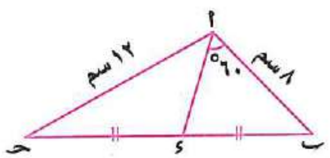
إذا كان : ظا (∠ ء هـ ح) = $\frac{٣}{٤}$

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة

برؤوس Δ أ ب ح = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٣,٥ (جـ) ٣,٧٥ (د) ٤

(١٠) في الشكل المقابل :

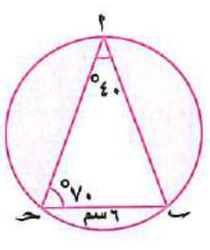


ء منتصف $\overline{ب ح}$ ، ق (∠ ب أ ء) = ٦٠°

فإن : ظا (∠ ء أ ح) = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جـ) ١ (د) $\sqrt{٢}$

(١١) في الشكل المقابل :



مساحة الجزء المظلل ≈ .... سم^{٢}

(أ) ٤,٣٧ (ب) ٢٦,٢

(جـ) ٤٣,٧ (د) ٥٢,٦

---

٢ إذا كان أ ب ح ء شكلاً رباعيًا دائريًا

أثبت أن : ب ح × جا (∠ أ ب ء) = أ ء × جا (∠ ح ء ب)

---

٣ في المثلث أ ب ح :

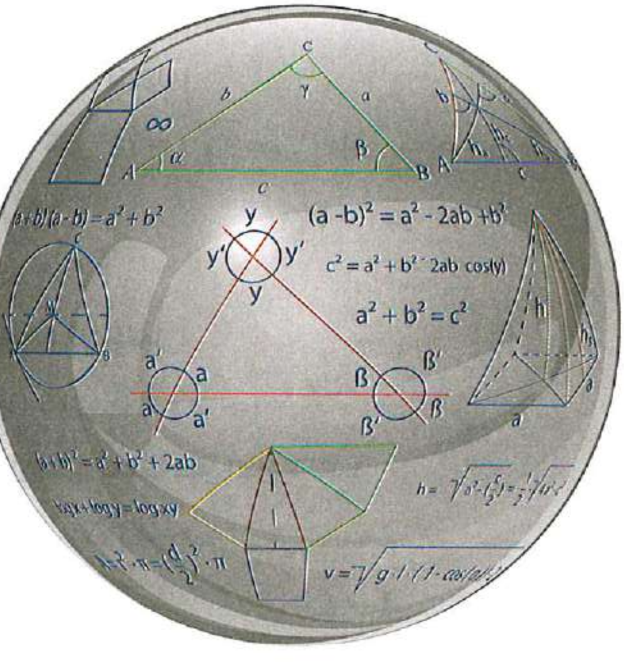
أثبت أن : (١) جا أ + جا ب + جا ح = $\frac{٤ ع Δ}{أَ بَ حَ}$

(٢) $\frac{١}{حَ جا أ} + \frac{١}{أَ جا ب} + \frac{١}{بَ جا ح} = \frac{ع}{Δ}$

حيث ع نصف محيط المثلث أ ب ح ، Δ مساحة المثلث أ ب ح

---

٤ أثبت أن مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ح تساوى $\frac{\pi أَ بَ}{٤ جا أ جا ب}$



الدرس 2

قانون جيب التمام (قاعدة جيب التمام)

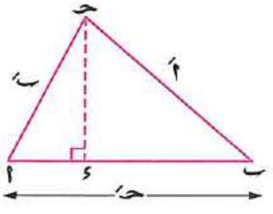
فى أى مثلث أ ب ح يكون :

$أ^{٢} = ب^{٢} + ح^{٢} - ٢\, ب\, ح \text{ حتا } أ$	ومنها	$\text{حتا } أ = \frac{ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢}}{٢\, ب\, ح}$
$ب^{٢} = أ^{٢} + ح^{٢} - ٢\, أ\, ح \text{ حتا } ب$	ومنها	$\text{حتا } ب = \frac{أ^{٢} + ح^{٢} - ب^{٢}}{٢\, أ\, ح}$
$ح^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} - ٢\, أ\, ب \text{ حتا } ح$	ومنها	$\text{حتا } ح = \frac{أ^{٢} + ب^{٢} - ح^{٢}}{٢\, أ\, ب}$

تستخدم هذه القاعدة إذا علم طولا ضلعين فى Δ أ ب ح وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

تستخدم هذه القاعدة إذا علمت أطوال أضلاع Δ أ ب ح أو النسبة بينها.

البرهـان



ليكن المطلوب إثبات أن : $أ^{٢} = ب^{٢} + ح^{٢} - ٢\, ب\, ح \text{ حتا } أ$

أولاً : إذا كان Δ أ ب ح حاد الزوايا :

نرسم $\overline{ح ء} \perp \overleftrightarrow{أ ب}$ يقطعها فى ء

، من Δ أ ء ح نجد أن : ح ء = ب حا أ ، ء أ = ب حتا أ $\therefore$ ب ء = ح − ب حتا أ

، فى Δ ح ء ب القائم الزاوية فى ء : $\because$ $(ب ح)^{٢} = (ح ء)^{٢} + (ء ب)^{٢}$

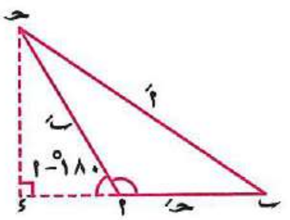
أى أن $أ^{٢} = (ب \text{ حا } أ)^{٢} + (ح - ب \text{ حتا } أ)^{٢}$

$= ب^{٢} \text{ حا}^{٢} أ + ح^{٢} - ٢\, ب\, ح \text{ حتا } أ + ب^{٢} \text{ حتا}^{٢} أ$

$= ب^{٢} (\text{حا}^{٢} أ + \text{حتا}^{٢} أ) + ح^{٢} - ٢\, ب\, ح \text{ حتا } أ$

$\therefore$ $أ^{٢} = ب^{٢} + ح^{٢} - ٢\, ب\, ح \text{ حتا } أ$ ومنها $\text{حتا } أ = \frac{ب^{٢} + ح^{٢} - أ^{٢}}{٢\, ب\, ح}$ (وهو المطلوب)

تذكر أن
$\text{حا}^{٢} أ + \text{حتا}^{٢} أ = ١$



ثانيًا : إذا كان Δ أ ب ح منفرج الزاوية فى أ :

نرسم $\overleftrightarrow{\text{ح ء}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ يقطعه فى ء

، فى Δ أ ء ح نجد أن : ح ء = ب جا (١٨٠° − أ)

، أ ء = ب جتا (١٨٠° − أ)   ∴ ب ء = ح + ب جتا (١٨٠° − أ)

، فى Δ ح ء ب القائم الزاوية فى ء : ∵ (ب ح)^{2} = (ح ء)^{2} + (ء ب)^{2}

أى أن أ^{2} = (ب جا (١٨٠° − أ))^{2} + (ح + ب جتا (١٨٠° − أ))^{2}

= (ب جا أ)^{2} + (ح − ب جتا أ)^{2} = ب^{2} جا^{2} أ + ح^{2} − ٢ ب ح جتا أ + ب^{2} جتا^{2} أ

= ب^{2} (جا^{2} أ + جتا^{2} أ) + ح^{2} − ٢ ب ح جتا أ

∴ أ^{2} = ب^{2} + ح^{2} − ٢ ب ح جتا أ ومنها جتا أ = $\frac{\text{ب}^{2} + \text{ح}^{2} - \text{أ}^{2}}{\text{٢ ب ح}}$ (وهو المطلوب)

لاحظ أن : قانون جيب التمام صحيح أيضًا فى حالة المثلث القائم الزاوية [وذلك بوضع جتا أ = جتا ٩٠° = صفر]

ملاحظـــات

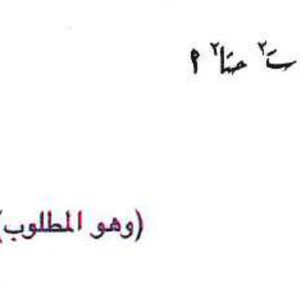
* لإيجاد قياس إحدى زوايا مثلث يفضل استخدام قانون جيب التمام لأنه يحدد نوع الزاوية إذا كانت حادة أو منفرجة.

* إذا كان أ : ب : ح = ٢ : ٣ : ٤

نفرض أن : أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، ح = ٤ ك حيث ك ∈ ع*

ثم نعوض فى قانون جيب التمام لإيجاد

قياسات زوايا Δ أ ب ح



* لإثبات أن الشكل أ ب ح ء رباعى دائرى :

− نثبت أن زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان :

ق (∠ أ) + ق (∠ ح) = ١٨٠°   **أى أن** جتا أ + جتا ح = صفر

أ، ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٨٠°   **أى أن** جتا ب + جتا ء = صفر

− نثبت أن قياسى زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة فيه وفى جهة واحدة منها متساويان :

كأن نثبت أن : ق (∠ ب أ ح) = ق (∠ ب ء ح)   **أى أن** جتا (∠ ب أ ح) = جتا (∠ ب ء ح)

مثال ١

في Δ أ ب حـ أوجد قيمة أ إذا كان : ب = ٣٠ سم ، حـ = ١٤ سم ، ق(∠ أ) = ٦٠°

الحــل

∵ $أ^٢ = ب^٢ + حـ^٢ - ٢ ب حـ$ جتا أ

∴ $أ^٢ = (٣٠)^٢ + (١٤)^٢ - ٢ × ٣٠ × ١٤ ×$ جتا ٦٠° = ٦٧٦ ∴ أ = $\sqrt{٦٧٦}$ = ٢٦ سم

مثال ٢

س ص ع مثلث فيه : س = ٤ سم ، ص = ٥ سم ، ع = ٦ سم

احسب قياس أكبر زواياه ، وكذلك احسب مساحته.

الحــل

أكبر الزوايا قياسًا تقابل أكبر الأضلاع طولاً.

∴ جتا ع = $\frac{س^٢ + ص^٢ - ع^٢}{٢ س ص} = \frac{٤^٢ + ٥^٢ - ٦^٢}{٢ × ٤ × ٥}$ = ١٢٥ ,٠ ∴ ق(∠ ع) ≈ ٩ ً ٤٩ ً ٨٢°

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ س ص جا ع = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٥ × جا ٩ ً ٤٩ ً ٨٢° ≈ ٩,٩ سم^٢

مثال ٣

أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{١}{٢}$ جا أ = $\frac{١}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٤}$ جا حـ احسب : ق(∠ حـ)

الحــل

∵ $\frac{جا أ}{٢} = \frac{جا ب}{٣} = \frac{جا حـ}{٤}$ ∴ $\frac{٢}{جا أ} = \frac{٣}{جا ب} = \frac{٤}{جا حـ}$

∴ أ : ب : حـ = ٢ : ٣ : ٤ وبفرض أن : أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك

∴ جتا حـ = $\frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب} = \frac{٤ ك^٢ + ٩ ك^٢ - ١٦ ك^٢}{٢ × ٢ ك × ٣ ك} = \frac{-٣ ك^٢}{١٢ ك^٢} = -\frac{١}{٤}$

∴ ق(∠ حـ) = ٣٩ ً ٢٨ ً ١٠٤°

مثال ٤

أ ب حـ مثلث فيه : أ = ١٣ سم ، ب = ١٤ سم ، حـ = ١٥ سم أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

الحــل

∵ جتا أ = $\frac{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}{٢ ب حـ} = \frac{١٩٦ + ٢٢٥ - ١٦٩}{٢ × ١٤ × ١٥} = \frac{٣}{٥}$ ∴ جا أ = $\frac{٤}{٥}$

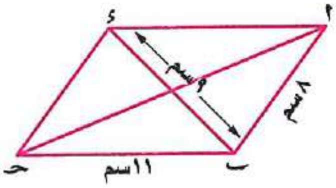
، ∵ $\frac{أ}{جا أ}$ = ٢ نق ∴ $\frac{١٣}{\frac{٤}{٥}}$ = ٢ نق ∴ نق = $\frac{١٣}{٢ × \frac{٤}{٥}} = ٨ \frac{١}{٨}$ سم

مثال ٥

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١١ سم ، ب ء = ٩ سم

أوجد طول قطره $\overline{\text{أ حـ}}$

الحل



فى Δ أ ب ء : جتا أ = $\frac{(٨)^2 + (١١)^2 - (٩)^2}{٢ \times ٨ \times ١١} = \frac{١٣}{٢٢}$

، ∵ ∠ ب تكمل ∠ أ (زاويتان متتاليتان فى ▱ أ ب حـ ء)

∴ جتا ب = − جتا أ = $\frac{-١٣}{٢٢}$

∴ فى Δ أ ب حـ : $(\text{أ حـ})^2 = (٨)^2 + (١١)^2 - ٢ \times ٨ \times ١١ \times \frac{-١٣}{٢٢} = ٢٨٩$

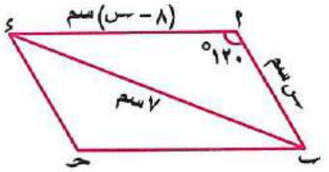
∴ أ حـ = ١٧ سم

مثال ٦

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ١٢٠° ، ومحيطه = ١٦ سم

وطول القطر الأكبر فيه = ٧ سم أوجد مساحة متوازى الأضلاع علمًا بأن أ ب < ب حـ

الحل



نصف محيط متوازى الأضلاع = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨ سم

فبفرض أن أ ب = س سم ∴ أ ء = (٨ − س) سم

∴ فى Δ أ ب ء :

∵ $(\text{ب ء})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{أ ء})^2 - ٢$ (أ ب) (أ ء) جتا ١٢٠°

∴ ٤٩ = $س^2 + (٨ - س)^2 - ٢ س (٨ - س) \times \left(-\frac{١}{٢}\right)$

∴ ٤٩ = $س^2 + ٦٤ - ١٦ س + س^2 + ٨ س - س^2$

∴ $س^2 - ٨ س + ١٥ = ٠$ ∴ (س − ٣) (س − ٥) = ٠ ∴ س = ٣ أ، س = ٥

، ∵ أ ب < ب حـ ∴ أ ب = ٣ سم ، أ ء = ٥ سم

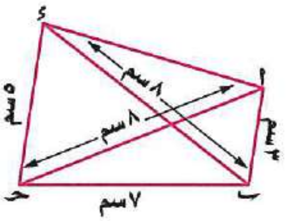
∴ م (▱ أ ب حـ ء) = ٢ م (Δ أ ب ء) = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٥ × جا ١٢٠° = $\frac{١٥ \sqrt{٣}}{٢}$ $سم^2$

مثال ٧

أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٧ سم ، حـ ء = ٥ سم ، أ حـ = ب ء = ٨ سم

أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

الحل



في Δ ب أ حـ : جتا (∠ ب أ حـ) = $\frac{(٣)^٢ + (٨)^٢ - (٧)^٢}{٢ \times ٣ \times ٨} = \frac{١}{٢}$

، في Δ ب ء حـ : جتا (∠ ب ء حـ) = $\frac{(٥)^٢ + (٨)^٢ - (٧)^٢}{٢ \times ٥ \times ٨} = \frac{١}{٢}$

∴ جتا (∠ ب أ حـ) = جتا (∠ ب ء حـ)

∴ ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ب ء حـ) (وهما مرسومتان على $\overline{\text{ب حـ}}$ وفي جهة واحدة منها)

∴ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

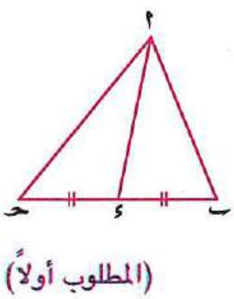
مثال ٨

أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : $(\text{أ ب})^٢ + (\text{أ حـ})^٢ = ٢ (\text{أ ء})^٢ + ٢ (\text{ب ء})^٢$

وإذا كان : أ ب = ٣ سم ، أ حـ = ٤ سم ، أ ء = $\sqrt{٣,٥}$ سم **فأوجد :** طول $\overline{\text{ب حـ}}$

الحل



Δ أ ب ء فيه : $(\text{أ ب})^٢ = (\text{أ ء})^٢ + (\text{ب ء})^٢ - ٢ (\text{أ ء}) (\text{ب ء})$ جتا (∠ أ ء ب) (١)

، Δ أ حـ ء فيه : $(\text{أ حـ})^٢ = (\text{أ ء})^٢ + (\text{حـ ء})^٢ - ٢ (\text{أ ء}) (\text{حـ ء})$ جتا (∠ أ ء حـ)

، ∵ جتا (∠ أ ء ب) = − جتا (∠ أ ء حـ) ، حـ ء = ب ء

∴ $(\text{أ حـ})^٢ = (\text{أ ء})^٢ + (\text{ب ء})^٢ + ٢ (\text{أ ء}) (\text{ب ء})$ جتا (∠ أ ء ب) (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ $(\text{أ ب})^٢ + (\text{أ حـ})^٢ = ٢ (\text{أ ء})^٢ + ٢ (\text{ب ء})^٢$ (المطلوب أولاً)

∴ $(٣)^٢ + (٤)^٢ = ٢ (\sqrt{٣,٥})^٢ + ٢ (\text{ب ء})^٢$

∴ $٢٥ = ٧ + ٢ (\text{ب ء})^٢$ ∴ $(\text{ب ء})^٢ = ٩$

∴ ب ء = ٣ سم ∴ ب حـ = ٦ سم (المطلوب ثانيًا)

تمـارين 20 على قانون جيب التمام (قاعدة جيب التمام)

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① في Δ س ص ع المقدار $\frac{\text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{ع}^2}{2\ \text{س ص}}$ = ...

(أ) جتا س (ب) جتا ص (جـ) جتا ع (د) جا ع

② في المثلث س ص ع يكون : ص^2 + ع^2 − س^2 = ٢ ص ع × ....

(أ) جتا س (ب) جا ع (جـ) جتا ع (د) جا س

③ في Δ أ ب حـ : جتا (أ + ب) = ...

(أ) جتا حـ (ب) − جتا حـ (جـ) جا حـ (د) − جا حـ

④ إذا كان : أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فإن : جتا أ + جتا حـ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) −١

⑤ في المثلث س ص ع : ٢ س ص جتا (س + ص) = ...

(أ) س^2 + ص^2 − ع^2 (ب) ص^2 + ع^2 − س^2

(جـ) س^2 − ع^2 − ص^2 (د) ع^2 − س^2 − ص^2

⑥ المثلث ل م ن فيه : ل = ٥ سم ، م = ٧ سم ، ق(∠ ن) = ٦٠°

فإن : ن = ... سم (لأقرب جزء من عشرة).

(أ) ٦,٢ (ب) ٥ (جـ) ٤,٣ (د) ٣,٥

⑦ Δ س ص ع فيه : س = ٥ سم ، ص = ٣ سم ، ق(∠ ع) = $\frac{2}{3}\pi$ فإن : ع = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ٤

⑧ في Δ أ ب حـ : إذا كان ق(∠ أ) + ق(∠ ب) = ١٢٠° ، أ = ٢ سم ، ب = ٣ سم

فإن : حـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $\sqrt{7}$ (د) $\sqrt{5}$

⑨ Δ أ ب حـ فيه : أ = ٩ سم ، ب = ١٥ سم ، ق(∠ حـ) = ١٠٦° فإن محيطه ≃ .... سم

(أ) ٤٤ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٤ (د) ٢٨

(١٠) أ ب جـ مثلث فيه : ب = ٢ سم ، جـ = ٢,٥ سم ، جتا أ = $\frac{٢}{٥}$

فإن : Δ أ ب جـ يكون ....

(أ) قائم الزاوية. (ب) متساوى الساقين. (جـ) متساوى الأضلاع. (د) مختلف الأضلاع.

(١١) في المثلث س ص ع إذا كان : س = ص فإن : جتا س = ...

(أ) $\frac{٢ ص^{٢}}{ع}$ (ب) $\frac{ع}{٢ ص}$ (جـ) $\frac{ع}{٤ س}$ (د) $\frac{ص}{٢ س}$

(١٢) في Δ أ ب جـ يكون جتا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{أ^{٢} + ب^{٢} - جـ^{٢}}{٢ أ ب}$ (ب) $\frac{أ^{٢} + جـ^{٢} - ب^{٢}}{٢ أ ب}$

(جـ) $\frac{ب^{٢} + جـ^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب جـ}$ (د) $\frac{جـ^{٢} - أ^{٢} - ب^{٢}}{٢ أ ب}$

(١٣) قياس أكبر زاوية في المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم تساوى ....°

(أ) ١١٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

(١٤) أ ب جـ مثلث فيه : ب = ٤ سم ، أ + جـ = ١١ سم ، أ − جـ = ١ سم فإن : ....

(أ) المثلث منفرج الزاوية. (ب) المثلث قائم الزاوية.

(جـ) ق(∠ب) = ٢ ق(∠أ) (د) ق(∠أ) = ٢ ق(∠ب)

(١٥) في Δ أ ب جـ يكون : جـ (أ جتا ب + ب جتا أ) = ...

(أ) ٢ $جـ^{٢}$ (ب) $جـ^{٢}$ (جـ) $أ^{٢}$ (د) $ب^{٢}$

(١٦) في Δ أ ب جـ ، إذا كان : $\frac{جا أ}{جا ب}$ = ٢ جتا جـ ، فإن : ....

(أ) ب = جـ (ب) أ = جـ (جـ) أ = ب (د) أ = ب = جـ

(١٧) أ ب جـ مثلث فيه : $أ^{٢} + ب^{٢} - جـ^{٢} + \sqrt{٣}$ أ ب = ٠ فإن : ق(∠جـ) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٠

(١٨) في Δ أ ب جـ ، إذا كان ق(∠جـ) = ٦٠° ، $أ^{٢} + ب^{٢} - جـ^{٢}$ = ك أ ب فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) −١

(١٩) إذا كان أ ب جـ مثلث فيه : $جـ^{٢} = (أ + ب)^{٢}$ − أ ب فإن : ق(∠جـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

(٢٠) في Δ أ ب جـ إذا كان : ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا جـ فإن : ق(∠جـ) ≃ .... (لأقرب درجة)

(أ) ٨٩° (ب) ٢٩° (جـ) ٥٧° (د) ٨٢°

(٢١) فى Δ ا ب حـ : $\frac{١}{٢}$ حا ا = $\frac{١}{٣}$ حا ب = $\frac{١}{٤}$ حا حـ فإن : حتا حـ = ...

(أ) $\frac{-٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{-١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٢٢) إذا كان : ا ب حـ مثلث فيه : ٥ حا ا حا ب = ٦ حا ب حا حـ = ٩ حا حـ حا ا

فإن : ق(∠حـ) ≈ ....

(أ) ٢٨° (ب) ٣٢° (جـ) ٣٦° (د) ٤٢°

(٢٣) إذا كان : ا ب حـ مثلث فيه : ٦ أَ = ٤ بَ = ٣ حَ فإن قياس أصغر زوايا المثلث ≈ ....

(أ) ٢٨َ ٥٧° (ب) ١٢َ ٤١° (جـ) ٥٧َ ٢٨° (د) ٥٢َ ٣٦°

(٢٤) ا ب حـ مثلث فيه : ق(∠ا) = ٦٠° ، بَ : حَ = ٥ : ٨ وكانت مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث تساوى ١٤٧ π سم^{٢} فإن : محيط Δ ا ب حـ = ... سم

(أ) ٢١ (ب) ٣٤ (جـ) ٥٤ (د) ٦٠

(٢٥) إذا كان ا ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : أَ = ٨ سم ، بَ = ٥ سم ، ق(∠حـ) = ٦٠°

فإن : ق(∠ا) ≈ ....

(أ) ١٢ً ٤٢َ ٨٣° (ب) ١٢ً ٤٧َ ٨١° (جـ) ١١َ ٣٨° (د) ١٠ً ٢٣َ ٦٠°

(٢٦) ا ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ا ب = ٨ سم ، ب حـ = ١١ سم ، ب ء = ٩ سم

فإن : طول $\overline{\text{ا حـ}}$ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٧

(٢٧) ا ب حـ ء شكل رباعى فيه : ا ب = ٢٢ سم ، ب حـ = ٢٥ سم ، ء حـ = ١٨ سم

، ق(∠ا ء ب) = ٦٥° ، ق(∠ء ب ا) = ٥٠° فإن : ق(∠حـ ب ء) ≈ ....

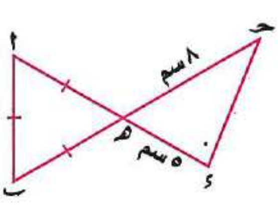
(أ) ٧٥َ ٨٠° (ب) ١٩ً ٤٩َ ٤٢° (جـ) ٦ً ٢٨َ ٤٤° (د) ٣٠َ ٨٥°

(٢٨) ا ب حـ مثلث فيه : أَ = $\sqrt{٢}$ سم ، بَ = $\sqrt{٣}$ سم ، حَ = ٢ سم

فإن : $\frac{\text{حتا ا حتا ب}}{\text{حتا (ا + ب)}}$ = ...

(أ) $\frac{٨}{١٥}$ (ب) $\frac{-١٥}{٨}$ (جـ) $\frac{-١٧}{١٥}$ (د) $\frac{٨}{١٧}$

(٢٩) فى الشكل المقابل :

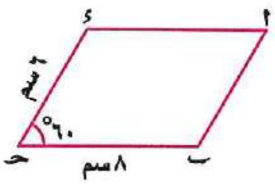


حـ ء = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٧

(جـ) ٨ (د) ٩

(٣٠) فى الشكل المقابل أ ب جـ د متوازى أضلاع

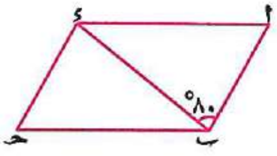


فإن أ جـ = ... سم

(أ) $٢\sqrt{١٣}$ (ب) $٢\sqrt{٣٧}$

(جـ) $٢\sqrt{١٧}$ (د) ١٤٨

(٣١) فى الشكل المقابل :



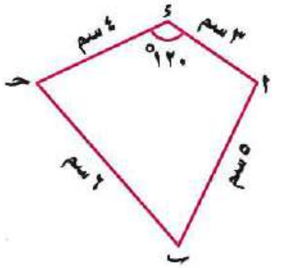
أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ ب د) = ٨٠°

، ب د = ٧ سم ، أ ب = ٥ سم

فإن محيط متوازى الأضلاع = ... لأقرب سم

(أ) ٢٥ (ب) ٢٦ (جـ) ٢٩ (د) ٣٠

(٣٢) فى الشكل المقابل :

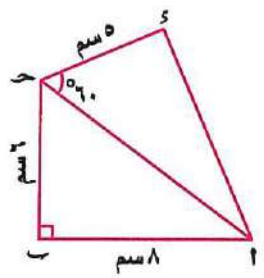


جتا ب = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$

(جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٣٣) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ د شكل رباعى فيه :

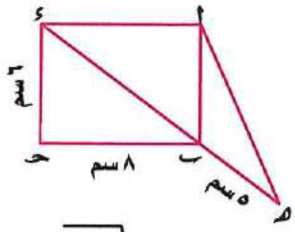
أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٩٠°

، د جـ = ٥ سم ، ق (∠ أ جـ د) = ٦٠°

فإن مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ د جـ = ... سم^{٢}

(أ) ٩ π (ب) ١٦ π (جـ) ٢٥ π (د) ٤٩ π

(٣٤) فى الشكل المقابل :



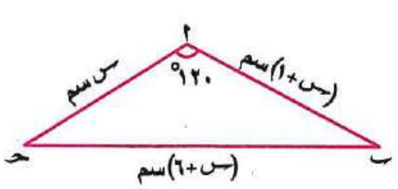
أ ب جـ د مستطيل فيه : د جـ = ٦ سم

، ب جـ = ٨ سم ، هـ ∈ $\overleftarrow{دب}$ حيث : ب هـ = ٥ سم

فإن : أ هـ = ... سم

(أ) $\sqrt{٩٣}$ (ب) $\sqrt{٩٧}$ (جـ) ١٠ (د) $\sqrt{١٠٣}$

(٣٥) فى الشكل المقابل :



قيمة س = ... سم

(أ) ٧ (ب) ٨

(جـ) ٩ (د) ١٠

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ سـ ص ع مثلث فيه : ق (∠ ع) = ٩٥° ، سـَ = ١٣ سم ، صَ = ١٦ سم **أوجد :** عَ «٢١,٥ سم»

٢ أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ٣ سم ، حـَ = ٥ سم ، ق (∠ ب) = ٢١ َ ٣٦ ° **أوجد :** بَ لأقرب سم «٣ سم»

٣ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب حـ الذى فيه : أَ = ٧,٦ سم ، بَ = ٥,٨ سم
، حـَ = ٣,٤ سم «٣٤ َ ١٠٨ ° ، ٢٠ َ ٤٦ ° ، ٦ َ ٢٥ °»

٤ أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ١٣ سم ، بَ = ١٤ سم ، حـَ = ١٥ سم
أوجد : ق (∠ ب) ثم أوجد مساحة سطح المثلث أ ب حـ لأقرب سم^2 «٢٩ َ ٥٩ ° ، ٨٤ سم^2»

٥ أوجد قياس أصغر زاوية فى Δ سـ ص ع إذا كان :
سـَ = ١٨ سم ، صَ = ٢٧ سم ، عَ = ٢٤ سم
ثم أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث سـ ص ع «٤٨ َ ٤٠ ° ، ٥٩٦ سم^2»

٦ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ حـ) = ٢٣ َ ٩٦ ° ، أَ = ٧ سم ، بَ = ٩ سم **أوجد :**
(١) حـَ (٢) مساحة سطح المثلث أ ب حـ لأقرب سم^2
(٣) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ لأقرب سنتيمتر. «١٢ سم ، ٣١ سم^2 ، ٦ سم»

٧ أ ب حـ مثلث محيطه ٥٢ سم ، أَ = ١٣ سم ، بَ = ١٧ سم أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث
ثم احسب مساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع. «٢٢ َ ٩٣ ° ، ١١٠ سم^2»

٨ أوجد قياس أكبر زاوية فى Δ سـ ص ع الذى فيه : سـَ = ٢٤,٥ سم ، صَ = ١٨ سم ، عَ = ١٠ سم
ثم أوجد محيط الدائرة المارة برؤوسه $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ «١٩ َ ١١٩ ° ، ٨٨ سم»

٩ Δ سـ ص ع فيه سـَ : صَ : عَ = ٤ : ٥ : ٦ بين أن قياس أصغر زواياه هو ٢٥ َ ٤١ ° تقريبًا.

١٠ سـ ص ع مثلث فيه : جا سـ : جا ص : جا ع = ٧ : ٨ : ١٢
أوجد قياس أكبر زواياه. «٤ َ ١٠٦ °»

١١ أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ٤ سم ، بَ = ٥ سم ، جتا حـ = $\frac{-١}{٢}$
أوجد حـَ ثم أوجد مساحة Δ أ ب حـ «٧,٨ سم ، ٥ $\sqrt{٣}$ سم^2»

١٢ أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ١٦ سم ، حـَ = ١٨ سم ، ظا ب = $\frac{٣}{٤}$
أوجد مساحة المثلث ثم احسب محيطه. «٨٦,٤ سم^2 ، ٤٥ سم»

١٣ أ ب حـ مثلث فيه : ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا حـ أوجد قياس أصغر زواياه. «٢٣ ٢٦°»

١٤ أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{1}{3}$ جا أ = $\frac{1}{4}$ جا ب = $\frac{1}{5}$ جا حـ
أوجد : ق (∠ حـ) وإذا كان محيط المثلث = ٢٤ سم أوجد مساحته. «٩٠° ، ٢٤ سم^2»

١٥ أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{ب حـ}$ فإذا كان : ق (∠ ب) = ٧٥° ، ق (∠ أ) = ٦٠° ، أ = ٨ سم
فأوجد طول كل من : $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{أ ء}$ «٨,٩٢ سم ، ٦,٧ سم»

١٦ أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٧ سم ، حـ = ٩ سم ، فرضت نقطة ء على $\overline{ب حـ}$ بحيث
ب ء = ٤ سم احسب طول $\overline{أ ء}$ ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ «٧ سم ، ٤,٧ سم»

١٧ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ حـ = ١٦ سم ، ب ء = ٢٠ سم ، ق (∠ أ م ب) = ٥٠°
حيث م ملتقى القطرين أوجد : أ ب ، أ ء لأقرب سم «٨ سم ، ١٦ سم»

١٨ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٣ سم ، أ حـ = ٢٠ سم
أوجد طول $\overline{ب ء}$ «١٠ سم»

١٩ أ ب حـ ء متوازى أضلاع محيطه ٢٠ سم فإذا كانت النسبة بين طولى ضلعين متجاورين ٢ : ٣ فإذا كان :
ب ء = ٨ سم فأوجد طول $\overline{أ حـ}$ «٦,٣ سم»

٢٠ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٦٠° ، محيطه = ٤٤ سم ، طول القطر الأصغر يساوى
١٤ سم ، أ ب < أ ء أوجد : ق (∠ أ ء ب) ثم احسب مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء لأقرب سم^2
«٤٧ ٢١° ، ٨٣ سم^2»

٢١ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، أ ء = ٤٢ سم ، أ ب = ٣٠ سم
، ب حـ = ٤٨ سم ، ق (∠ أ) = ١٠٠°
أوجد طول كل من : $\overline{ب ء}$ ، $\overline{حـ ء}$ «٥٥,٧ سم ، ٣٠ سم»

٢٢ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = أ ء = ٩ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ ء = ٨ سم ، أ حـ = ١١ سم
أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.

٢٣ أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه :
أ ب = أ ء = ٩ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ ء = ٨ سم أوجد : أ حـ «١١ سم»

٢٤ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ١٤ سم ، حـ ء = ١٠ سم
، أ حـ = ب ء = ١٦ سم أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.

٢٥ أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٢٧ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، جـ ء = ٨ سم
، ء أ = ١٢ سم ، أ جـ = ١٨ سم أثبت أن : أ جـ ينصف ∠ ب أ ء
ثم أوجد مساحة الشكل : أ ب جـ ء «١٢٤ سم^{٢}»

---

٢٦ أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : ق(∠ ء أ ب) = ق(∠ ء ب جـ) = ٩٠° ، ب ء = ١٠ سم ، أ ء = ٨ سم
، ق(∠ ء جـ ب) = ٣٠° أوجد : أ جـ لأقرب سم «٢٢ سم»

---

٢٧ أ ب جـ مثلث فيه : أ = ٣ ب ، ق(∠ جـ) = ٦٠°
أوجد : ق(∠ ب) ، ق(∠ أ) «٦َ ١٩° ، ٥٤َ ١٠٠°»

---

٢٨ أ ب جـ مثلث فيه : أ = ٥ سم ، ق(∠ ب) = ١٢٠° ، مساحته = ١٠ √٣ سم^{٢}
أوجد كلاً من : جـ ، ب وكذلك ق(∠ أ) «٨ سم ، ١١,٣٦ سم ، ٢٥َ ٢٢°»

---

٢٩ أ ب جـ مثلث مساحته ٦٤ سم^{٢} ، ق(∠ أ) = ٣٠° ، ب : جـ = ٣ : ٤
أوجد محيط Δ أ ب جـ «٤١,٨ سم»

---

٣٠ أ ب جـ مثلث فيه : أ = ٦ سم ، ب = ١٠ سم ، مساحة المثلث تساوى ٢٠ سم^{٢}
فإذا كانت ∠ أ جـ ب منفرجة فأوجد كلاً من : ق(∠ جـ) ، طول أ ب «١١َ ١٣٨° ، ١٥سم»

---

٣١ إذا كان : جا أ = $\frac{٢}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٢}$ جا جـ ، جـ − أ = ٤ سم
أوجد كلًا من : ب ، ق(∠ أ) «٦ سم ، ١٨ً ٥٧َ ٢٨°»

---

٣٢ إذا كان جا أ : جا ب : جا جـ = ٣ : ٥ : ٧ أثبت أن : جتا أ : جتا ب : جتا جـ = ١٣ : ١١ : −٧

---

٣٣ أ ب جـ مثلث محيطه ٧٠ سم ، أ = ٢٦ سم ، ق(∠ أ) = ٦٠°
أوجد : مساحة سطحه. «١٠٥ √٣ سم^{٢}»

---

٣٤ أ ب جـ مثلث محيطه ٣٤ سم ، أ = ١٢ سم ، ب − جـ = ٦ سم
أوجد قياس أصغر زواياه ثم احسب مساحته. «١٩ً ٤٦َ ٣٤° ، ٤٧,٩ سم^{٢}»

---

٣٥ مثلث أطوال أضلاعه هى ١٤ ، ١٠ ، س من السنتيمترات فإذا كان قياس أكبر زواياه هو ١٢٠°
أوجد س علمًا بأن (س < ١٠) «٦ سم»

---

٣٦ Δ أ ب جـ فيه : ق(∠ جـ) = ١٢٠° ، أ = ب − ٢ ، جـ = ب + ٢
أوجد كلًا من : أ ، ب ، جـ «٣ ، ٥ ، ٧»

---

٣٧ فى المثلث أ ب جـ إذا كان (أ + ب + جـ) (أ + ب − جـ) = ٣ أ ب أثبت أن : ق(∠ جـ) = ٦٠°

٣٨ في المثلث أ ب جـ إذا كان: $(\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ})(\text{أ} + \text{ب} - \text{جـ}) = \text{ك}\ \text{أ}\ \text{ب}$

فأثبت أن: ك ∈]٠ ، ٤[ثم أوجد: ق(∠جـ) عندما ك = ١ «١٢٠°»

---

٣٩ أ ب جـ د متوازي أضلاع أثبت أن: $(\text{أ جـ})^2 + (\text{ب د})^2 = ٢\,(\text{أ ب})^2 + ٢\,(\text{ب جـ})^2$

---

٤٠ أ ب جـ مثلث فيه: د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ أثبت أن: $(\text{أ ب})^2 + (\text{أ جـ})^2 = ٢\,(\text{أ د})^2 + ٢\,(\text{ب د})^2$

وإذا كان: أ ب = ٥ سم ، أ جـ = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم أوجد: أ د «$\frac{\sqrt{٣٤}}{٢}$ سم»

---

٤١ أثبت أن: ظتا ب + ظتا جـ = $\frac{\text{أ}^2}{٢\,\Delta}$ حيث Δ يعبر عن مساحة Δ أ ب جـ

---

٤٢ أ ب جـ مثلث فيه: $\text{ب}^2 = (\text{جـ} - \text{أ})^2 + \text{جـ}\ \text{أ}$ أوجد: ق(∠ب) «٦٠°»

---

٤٣ س ص ع مثلث فيه: $\text{س}^2 = \text{ص}^2 + \text{ع}^2 - \text{ص}\ \text{ع}$ ظتا س أوجد: ق(∠س) «٩٠° أو ٣٠° أو ١٥٠°»

---

٤٤ Δ أ ب جـ فيه: جتا ب = $\frac{\text{جـ}}{٢\,\text{أ}}$ أثبت أن: Δ أ ب جـ متساوي الساقين.

---

٤٥ أ ب جـ د هـ خماسي منتظم طول ضلعه ١٨,٢٦ سم ، أوجد طول قطره $\overline{\text{أ جـ}}$ «٢٩,٥ سم»

---

٤٦ اكتشف الخطأ: أ ب جـ مثلث فيه:

أ = ٧ سم ، ب = ١٠ سم ، جـ = ٥ سم ، ق(∠أ) ≃ ٤٠,٥٤°

أوجد: ق(∠ب)

حل زياد

∵ $\frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{أ}}{\text{جا أ}}$

∴ $\frac{١٠}{\text{جا ب}} = \frac{٧}{\text{جا } ٤٠,٥٤^\circ}$

∴ جا ب = $\frac{١٠\ \text{جا } ٤٠,٥٤^\circ}{٧}$ ≃ ٠,٩٢٨٥

∴ ق(∠ب) = ٦٨,٢°

حل كريم

∵ جتا ب = $\frac{\text{أ}^2 + \text{جـ}^2 - \text{ب}^2}{٢\ \text{أ}\ \text{جـ}}$

∴ جتا ب = $\frac{(٧)^2 + (٥)^2 - (١٠)^2}{٢ \times ٧ \times ٥}$

≃ −٠,٣٧١٤

∴ ق(∠ب) ≃ ١١١,٨°

أي من الحلين هو الصحيح ؟ ولماذا ؟

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

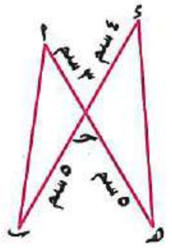
١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت: أ (٠ ، ١) ، ب (٣ ، ٤) ، جـ (١ ، ٣) هي رؤوس مثلث

فإن: جتا (∠أ جـ ب) = ...

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{-٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{-٣}{٥}$

(٢) فى الشكل المقابل :

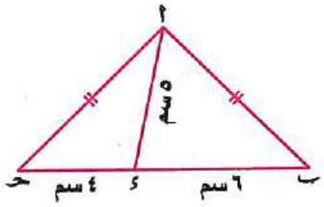


لإيجاد طول $\overline{ءهـ}$ يلزم معرفة ....

(أ) طول $\overline{أب}$ (ب) مساحة Δ أب حـ

(جـ) محيط Δ أب حـ (د) أى مما سبق.

(٣) فى الشكل المقابل :

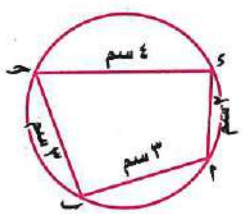


أب = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٧

(جـ) ٨ (د) ٩

(٤) فى الشكل المقابل :

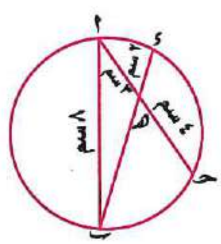


حتا أ = ...

(أ) $-\frac{١}{٦}$ (ب) $-\frac{١}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(٥) فى الشكل المقابل :

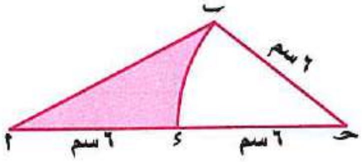


ق(∠ب أ هـ) ≃ ....

(أ) ٣٤° ٣٩َ (ب) ٣٩° ٣٤َ

(جـ) ١٨° ٣٤َ (د) ٣٤° ١٨َ

(٦) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ق(∠حـ) = ٠,٤ ء

فإن محيط الجزء المظلل = ... سم

(أ) ١٥,٣ (ب) ١٣,٤ (جـ) ٦,٩ (د) ٢١,٣

(٧) إذا كانت مساحة المثلث أب حـ = ١٢ سم² فإن : $(ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢)$ طا أ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٦

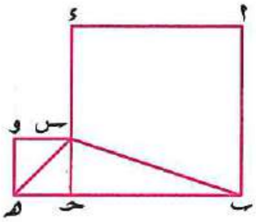
(٨) فى Δ أب حـ إذا كان : ق(∠أ) = ٦٠° فإن : $\left(١ + \frac{أ}{حـ} + \frac{ب}{حـ}\right)\left(١ + \frac{حـ}{ب} - \frac{أ}{ب}\right)$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٩) فى أى مثلث أ ب جـ إذا كان : $\frac{\text{أ}^3 + \text{ب}^3 + \text{جـ}^3}{\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}} = \text{أ}^2$ فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) 30° (ب) 60° (جـ) 45° (د) 150°

(١٠) فى الشكل المقابل :

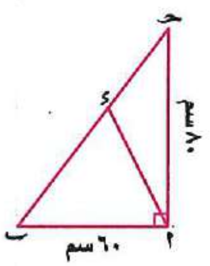


أ ب جـ ء ، س جـ هـ و مربعان

إذا كان : ب جـ = ٣ جـ هـ فإن : جا (∠ ب س هـ) = ...

(أ) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ب) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (جـ) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ (د) $\frac{-2}{\sqrt{5}}$

(١١) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ ، أ ب = ٦٠ سم ، أ جـ = ٨٠ سم

ورسم $\overline{\text{أ ء}}$ يقسم Δ أ ب جـ إلى مثلثين لهما نفس المحيط

فإن : أ ء = ... سم

(أ) $24\sqrt{5}$ (ب) $5\sqrt{24}$ (جـ) $35\frac{2}{3}$ (د) $45\frac{1}{3}$

---

٢ فى Δ أ ب جـ إذا كان : $\frac{\text{جتا ب}}{\text{أ}} = \frac{\text{جتا أ}}{\text{ب}}$

فأثبت أن : Δ أ ب جـ إما قائم الزاوية أو متساوى الساقين.

---

٣ Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب فإذا كان هـ نقطة داخل المثلث بحيث أن

هـ أ = ١٠ سم ، هـ ب = ٦ سم ، ق (∠ أ هـ ب) = ق (∠ ب هـ جـ) = ق (∠ جـ هـ أ)

أوجد : طول $\overline{\text{هـ جـ}}$ «٣٣ سم»

---

٤ Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، م ، ن تنتميان إلى $\overline{\text{أ جـ}}$ بحيث أ م = م ن = ن جـ

فإذا كان ب م = ٣ سم ، ب ن = ٤ سم **أوجد :** محيط Δ أ ب جـ لأقرب سنتيمتر. «١٦ سم»

---

٥ فى أى مثلث أ ب جـ أثبت أن :

(١) $\frac{\text{جتا أ}}{\text{أ}} + \frac{\text{جتا ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{جتا جـ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}{2\,\text{أ ب جـ}}$

(٢) $\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2 = 2\,(\text{ب جـ جتا أ} + \text{أ جـ جتا ب} + \text{أ ب جتا جـ})$

(٣) $\frac{\text{طا أ}}{\text{طا جـ}} = \frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{جـ}^2}{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2 - \text{أ}^2}$



الدرس

3

حل المثلث

حل المثلث يعنى إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه المجهولة إذا علم ثلاثة من هذه العناصر الستة (أحدها على الأقل طول ضلع). **وهناك أربعة حالات لحل المثلث نعرض لها فيما يلى :**

الحالة الأولى حل المثلث إذا علم فيه قياسا زاويتين وطول ضلع

فى Δ أ ب حـ إذا علم ق (∠ أ) ، ق (∠ ب) ، أ :

١ نستخدم العلاقة : ق (∠ حـ) = ١٨٠° − [ق (∠ أ) + ق (∠ ب)] لإيجاد : ق (∠ حـ)

٢ نستخدم القانون : أ / جا أ = ب / جا ب = حـ / جا حـ لإيجاد : ب ، حـ

مثال ١

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ أ) = ٥٢° ٣٨َ ، ق (∠ ب) = ٥١° ٩٦َ ، أ = ٢٢,٣ سم

الحل

ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (٥٢° ٣٨َ + ٥١° ٩٦َ) = ١٧° ٤٤َ

، ∵ أ / جا أ = ب / جا ب = حـ / جا حـ

∴ ٢٢,٣ / جا ٥٢° ٣٨َ = ب / جا ٥١° ٩٦َ = حـ / جا ١٧° ٤٤َ

∴ ب = (٢٢,٣ جا ٥١° ٩٦َ) / جا ٥٢° ٣٨َ ≈ ٣٥,٣ سم ، حـ = (٢٢,٣ جا ١٧° ٤٤َ) / جا ٥٢° ٣٨َ ≈ ٢٤,٨ سم

الحالة الثانية حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

في Δ أ ب حـ إذا علم أ ، ب ، ق (∠ حـ) :

١ نستخدم القانون : حـ^2 = أ^2 + ب^2 − ٢ أ ب جتا حـ لإيجاد : حـ

٢ يفضل استخدام القانون : جتا أ = $\frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{٢ ب حـ}$ لإيجاد : ق (∠ أ)

وذلك لأن قانون جيب التمام يفرق بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة (أو يستخدم قانون الجيب لإيجاد قياس الزاوية المقابلة لأصغر الضلعين المعلومين)

٣ نستخدم العلاقة : ق (∠ ب) = ١٨٠° − [ق (∠ أ) + ق (∠ حـ)] لإيجاد : ق (∠ ب)

مثال ٢

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٥ سم ، ق (∠ حـ) = ٢َ ٦٠°

الحل

∵ حـ^2 = أ^2 + ب^2 − ٢ أ ب جتا حـ = ٦٤ + ٢٥ − ٢ × ٨ × ٥ جتا ٢َ ٦٠° ≈ ٤٩,٠٤

∴ حـ ≈ **٧ سم**

∴ جتا أ = $\frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{٢ ب حـ}$ = $\frac{٢٥ + ٤٩ - ٦٤}{٢ × ٥ × ٧}$ = $\frac{١}{٧}$

∴ ق (∠ أ) ≈ **٤٧َ ٨١°**

∴ ق (∠ ب) = ١٨٠° − (٢َ ٦٠° + ٤٧َ ٨١°) = **١١ً ٣٨°**

حل آخر :

بعد إيجاد حـ يمكن إيجاد ق (∠ ب) باستخدام قانون الجيب لأن ∠ ب تقابل أصغر الضلعين المعلومين بالمعطيات ، ثم نوجد ق (∠ أ)

∵ $\frac{حـ}{جا حـ}$ = $\frac{ب}{جا ب}$ ∴ $\frac{٧}{جا ٢َ ٦٠°}$ = $\frac{٥}{جا ب}$

∴ جا ب = $\frac{٥ جا ٢َ ٦٠°}{٧}$ ≈ ٠,٦١٨٨ ∴ ق (∠ ب) ≈ ١٤َ ٣٨° أ، ٤٦َ ١٤١°

، ∵ ب ليس طول أكبر أضلاع المثلث ∴ ∠ ب لا يمكن أن تكون منفرجة

∴ ق (∠ ب) = ١٤َ ٣٨°

∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٢َ ٦٠° + ١٤َ ٣٨°) = ٤٤َ ٨١°

لاحظ أن : الاختلافات البسيطة فى قياسات الزوايا بين الحلين يرجع إلى استخدام قيم تقريبية بحاسبة الجيب.

الحالة الثالثة | **حل المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة**

فى Δ أ ب حـ إذا علم أَ ، بَ ، حَ :

[١] نستخدم القانون : حتا أ = $\frac{\text{بَ}^2 + \text{حَ}^2 - \text{أَ}^2}{\text{٢ بَ حَ}}$ لإيجاد : ق (∠ أ)

[٢] نستخدم القانون : حتا ب = $\frac{\text{حَ}^2 + \text{أَ}^2 - \text{بَ}^2}{\text{٢ حَ أَ}}$ لإيجاد : ق (∠ ب)

[٣] نستخدم العلاقة : ق (∠ حـ) = ١٨٠° − [ق (∠ أ) + ق (∠ ب)] لإيجاد : ق (∠ حـ)

مثال ٣

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أَ = ٥ سم ، بَ = ٧ سم ، حَ = ١١ سم

الحل

∵ حتا أ = $\frac{\text{بَ}^2 + \text{حَ}^2 - \text{أَ}^2}{\text{٢ بَ حَ}}$ = $\frac{\text{٤٩ + ١٢١ − ٢٥}}{\text{٢ × ٧ × ١١}}$ = $\frac{\text{١٤٥}}{\text{١٥٤}}$ ∴ ق (∠ أ) ≈ [١٩° ٤١َ]

، ∵ حتا ب = $\frac{\text{حَ}^2 + \text{أَ}^2 - \text{بَ}^2}{\text{٢ حَ أَ}}$ = $\frac{\text{١٢١ + ٢٥ − ٤٩}}{\text{٢ × ١١ × ٥}}$ = $\frac{\text{٩٧}}{\text{١١٠}}$ ∴ ق (∠ ب) ≈ [٢٨° ٨َ]

∴ ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (١٩° ٤١َ + ٢٨° ٨َ) = [١٣٢° ١١َ]

تذكر أن

مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث أكبر من طول الضلع الثالث فمثلًا إذا كان : أَ = ٢ سم ، بَ = ٥ سم ، حَ = ٨ سم فإن هذه الأطوال لا تصلح أن تكون أطوالًا لأضلاع مثلث.

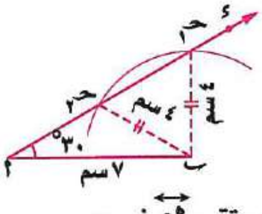
الحالة الرابعة | **حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما [الحالة المبهمة]**

مثال توضيحى

باستخدام الأدوات الهندسية ارسم Δ أ ب حـ الذى فيه :

أ ب = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٣٠° ، ب حـ = ٤ سم ثم تحقق من إجابتك باستخدام قانون الجيب.

الحل



* نرسم قطعة مستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ طولها = ٧ سم
* نرسم ∠ أ قياسها ٣٠° مع $\overline{\text{أ ب}}$ ولتكن ب أ ء
* نركز بسن الفرجار فى النقطة ب وبفتحة طولها ب حـ = ٤ سم ونرسم قوس يقطع المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ فى حـ
* نلاحظ أن النقطة حـ لها موضعين أى أننا يمكننا رسم مثلثين لهم نفس الشروط السابقة هما أ ب حـ_1 ، أ ب حـ_2 وبالقياس نجد أن : ق (∠ حـ) ≈ ٦١° فى Δ أ ب حـ_1 أ، ق (∠ حـ) ≈ ١١٩° فى Δ أ ب حـ_2

التحقق من الإجابة باستخدام قانون الجيب

∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}}$ ∴ $\frac{٤}{\text{حا } ٣٠°} = \frac{٧}{\text{حا حـ}}$

∴ حا حـ $= \frac{٧ \text{ حا } ٣٠°}{٤} = \frac{٧}{٨}$ (موجبة) ∴ حـ تقع فى الربع الأول (حادة) أ، الثانى (منفرجة)

∴ ق (∠حـ) ≈ ٦١° أ، ق (∠حـ) ≈ ١١٩°

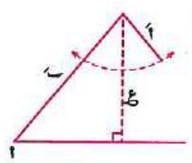
وعمومًا باستخدام الحل الهندسى يمكن التوصل إلى ما يلى :

* فى $\triangle$ أ ب حـ إذا علم أَ ، بَ ، ق (∠ أ) نوجد ع = بَ حا أ

ولإيجاد عدد الحلول الممكنة للمثلث نقارن بين قيم أَ ، بَ ، ع كما يلى :

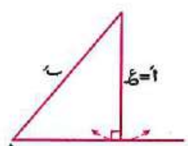
أولًا : إذا كانت ∠ أ حادة وكان :

١



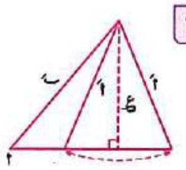
أَ < ع فإنه لا يمكن رسم مثلث

٢



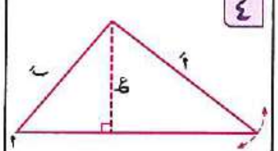
أَ = ع فإنه يمكن رسم مثلث وحيد قائم الزاوية

٣



ع < أَ < بَ فإنه يمكن رسم مثلثين

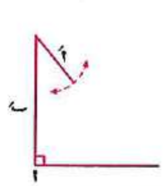
٤



أَ ≥ بَ فإنه يمكن رسم مثلث وحيد

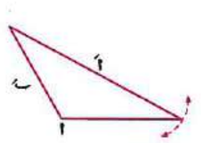
ثانيًا : إذا كانت ∠ أ قائمة أو منفرجة وكان :

١



أَ ≤ بَ فإنه لا يمكن رسم مثلث

٢



أَ > بَ فإنه يمكن رسم مثلث وحيد

* يمكن حل المثلث فى هذه الحالة باستخدام قانون الجيب مباشرة دون تحديد عدد المثلثات الممكنة مع الأخذ فى الاعتبار ما يلى :

١ ∠ أ تقع فى الربع الأول (إذا كانت حادة)، تقع فى الربع الثانى (إذا كانت منفرجة).

٢ دالة الجيب مداها [−١ ، ١]

٣ إذا كان فى المثلث زاوية منفرجة فإن الزاويتين الأخريين لابد وأن تكونا حادتين.

مثال ٤

بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق ثم أوجد الحلول الممكنة :

١ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ١١٢° ، أ = ٧ سم ، ب = ٤ سم

٢ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ١١٢° ، أ = ٤ سم ، ب = ٧ سم

٣ ل م ن مثلث فيه : ق (∠ ل) = ٥٠° ، ل = ٤ سم ، م = ٧ سم

٤ ء هـ و مثلث فيه : ق (∠ ء) = ٦٠° ، ء = ٧,٥ سم ، هـ = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

٥ ل م ن مثلث فيه : ق (∠ ل) = ٣٠° ، ل = ٦ سم ، م = ٩ سم

٦ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٤٠° ، أ = ٨,٥ سم ، ب = ٧ سم

الحل

١ ∵ ∠ أ منفرجة ، أ > ب

∴ يوجد للمثلث حل وحيد

، ∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب}$

∴ $\frac{٧}{جا ١١٢°} = \frac{٤}{جا ب}$

∴ جا ب = $\frac{٤ جا ١١٢°}{٧}$ ≈ ٠,٥٢٩٨ ∴ ق (∠ ب) ≈ ٣٢°

ومنها ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (١١٢° + ٣٢°) = ٣٦°

، ∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{حـ}{جا حـ}$ ∴ $\frac{٧}{جا ١١٢°} = \frac{حـ}{جا ٣٦°}$

∴ حـ ≈ ٤,٤ سم

لاحظ أن

المثلث به زاوية واحدة على الأكثر منفرجة.

، ∵ ∠ أ منفرجة ∴ ∠ ب لا بد وأن تكون حادة

∴ ب تقع فى الربع الأول فقط

٢ ∵ ∠ أ منفرجة ، أ < ب

∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق

لاحظ أن

∵ $\frac{٤}{جا ١١٢°} = \frac{٧}{جا ب}$ ∴ جا ب = $\frac{٧ جا ١١٢°}{٤}$ ≈ ١,٦

وهذا مستحيل لأن جا ب ∉ [−١ ، ١]

٣ ∵ ∠ ل حادة ، ع = م جا ل = ٧ جا ٥٠° ≈ ٥,٤ سم

، ∵ ل < ع ∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق.

٤ ∵ ∠ ء حادة ، ع = هـَ حا ء = ٥ $\sqrt{3}$ حا ٦٠° = ٧,٥ سم

، ∵ ءَ = ع ∴ يوجد للمثلث حل وحيد وهو مثلث قائم الزاوية فى هـ

∴ ق (∠ و) = ١٨٠° − (٦٠° + ٩٠°) = **٣٠°** ، وَ = $\sqrt{(٥\sqrt{٣})^2 - (٧,٥)^2}$ = **$\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ سم**

٥ ∵ ∠ ل حادة ، ع = مَ حا ل = ٩ حا ٣٠° = ٤,٥ سم ، ∵ ٤,٥ < ٦ < ٩

أى أن ع < لَ < مَ ∴ يوجد للمثلث حلان

∵ $\frac{لَ}{حا ل} = \frac{مَ}{حا م}$ ∴ $\frac{٦}{حا ٣٠°} = \frac{٩}{حا م}$ ∴ حا م = $\frac{٣}{٤}$

∴ م تقع فى الربع الأول أو الثانى

∴ ق (∠ م) ≈ **٤٨° ٣٥َ ٢٥ً**

ومنها ق (∠ ن)

= ١٨٠° − (٣٠° + ٤٨° ٣٥َ ٢٥ً)

= **١٠١° ٢٤َ ٣٥ً**

، ∵ $\frac{لَ}{حا ل} = \frac{نَ}{حا ن}$

∴ $\frac{٦}{حا ٣٠°} = \frac{نَ}{حا ١٠١° ٢٤َ ٣٥ً}$

∴ نَ ≈ **١١,٧٦ سم**

أ ،

ق (∠ م) = ١٨٠° − ٤٨° ٣٥َ ٢٥ً

= **١٣١° ٢٤َ ٣٥ً**

ومنها ق (∠ ن)

= ١٨٠° − (٣٠° + ١٣١° ٢٤َ ٣٥ً)

= **١٨° ٣٥َ ٢٥ً**

، ∵ $\frac{٦}{حا ٣٠°} = \frac{نَ}{حا ١٨° ٣٥َ ٢٥ً}$

∴ نَ ≈ **٣,٨٣ سم**

٦ ∵ ∠ أ حادة ، أَ > بَ

∴ يوجد للمثلث حل وحيد

، ∵ $\frac{أَ}{حا أ} = \frac{بَ}{حا ب}$

∴ $\frac{٨,٥}{حا ٤٠°} = \frac{٧}{حا ب}$

∴ حا ب = $\frac{٧ حا ٤٠°}{٨,٥}$ ≈ ٠,٥٣ ∴ ق (∠ ب) ≈ **٣٢°**

ومنها ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٣٢°) = **١٠٨°**

، ∵ $\frac{أَ}{حا أ} = \frac{حـَ}{حا حـ}$ ∴ $\frac{٨,٥}{حا ٤٠°} = \frac{حـَ}{حا ١٠٨°}$

∴ حـَ = $\frac{٨,٥ حا ١٠٨°}{حا ٤٠°}$ ≈ **١٢,٥٨ سم**

لاحظ أنه

إذا أخذنا هنا ق (∠ ب) بحيث تقع فى الربع الثانى

∴ ق (∠ ب) = ١٨٠° − ٣٢° = ١٤٨°

وهذا مستحيل لأنه ليس من المعقول أن يكون مجموع قياسى زاويتين فى مثلث = ٤٠° + ١٤٨° = ١٨٨° أكبر من ١٨٠°

ملاحظــة

يمكن حل المثلث في الحالة المبهمة باستخدام قانون جيب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث فنحصل على معادلة تربيعية وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة الناتجة من هذه المعادلة.

مثال ٥

باستخدام الملاحظة السابقة حل المثلث أ ب حـ الذي فيه :

أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم ، ق(∠أ) = ٣٠°

الحـــل

∵ أ^{٢} = ب^{٢} + حـ^{٢} − ٢ ب حـ جتا أ

∴ $(٦)^{٢} = (٨)^{٢}$ + حـ^{٢} − ٢ × ٨ × حـ جتا ٣٠°

∴ حـ^{٢} − ٨$\sqrt{٣}$ حـ + ٢٨ = ٠

∴ حـ = $\frac{٨\sqrt{٣} \pm \sqrt{(-٨\sqrt{٣})^{٢} - ٤(١)(٢٨)}}{٢(١)}$

∴ حـ ≈ ١١,٤ سم أو حـ ≈ ٢,٤٥٦ سم

، ∵ كل قيمة موجبة لـ حـ تقابل مثلثًا واحدًا

∴ يوجد لدينا مثلثان ثم نوجد جتا ب من العلاقة : جتا ب = $\frac{\text{حـ}^{٢} + \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}{٢ \text{ حـ أ}}$

تذكر أن

القانون العام لحل معادلة تربيعية على الصورة أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠ .

هو س = $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤ \text{ أ حـ}}}{٢ \text{ أ}}$

عندما حـ ≈ ١١,٤ سم

∴ جتا ب$_{١}$ = $\frac{(١١,٤)^{٢} + (٦)^{٢} - (٨)^{٢}}{٢ (١١,٤)(٦)}$

∴ ق(∠ب$_{١}$) ≈ ٤٩ ٤١°

ومنها ق(∠حـ$_{١}$) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٩ ٤١°)

= ١٠٨ ١١°

عندما حـ = ٢,٤٥٦ سم

∴ جتا ب$_{٢}$ = $\frac{(٢,٤٥٦)^{٢} + (٦)^{٢} - (٨)^{٢}}{٢ (٢,٤٥٦)(٦)}$

∴ ق(∠ب$_{٢}$) ≈ ١٢ ١٣٨°

ومنها ق(∠حـ$_{٢}$) = ١٨٠° − (٣٠° + ١٢ ١٣٨°)

= ٤٨ ١١°

∴ الحل الأول هو حـ = ١١,٤ سم ، ق(∠ب) = ٤٩ ٤١° ، ق(∠حـ) = ١١ ١٠٨°

، الحل الثاني هو حـ = ٢,٤٥٦ سم ، ق(∠ب) = ١٢ ١٣٨° ، ق(∠حـ) = ٤٨ ١١°

* حاول حل هذا المثال باستخدام قاعدة الجيب.

تمارين 21 على حل المثلث

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) يقصد بحل المثلث ....

(أ) إيجاد أطوال أضلاعه. (ب) إيجاد قياسات زواياه.

(جـ) إيجاد العلاقة بين أطوال أضلاعه وقياسات زواياه. (د) إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه.

(٢) محيط Δ أ ب حـ الذي فيه : ب = ١١ سم ، ق(∠أ) = ٦٧° ، ق(∠حـ) = ٤٦°

يساوى ≃ .... (لأقرب سم).

(أ) ٢٢ (ب) ٣٨ (جـ) ٣١ (د) ٢٧

(٣) عند حل المثلث أ ب حـ الذي فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق(∠حـ) = ٦٥°

فإن : حـ ≃ .... سم (لأقرب جزء من عشره).

(أ) ٤,٤ (ب) ٢,١ (جـ) ٦,٧ (د) ٨,٢

(٤) عند حل Δ أ ب حـ الذي فيه : أ = ٢ سم ، ب = ٤ $\sqrt{٢}$ سم ، حـ = ٢ $\sqrt{٥}$ سم فإن :

أولًا : حتا أ = ...

(أ) $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{١٠}}$ (د) $\frac{\sqrt{١٠}}{٥}$

ثانيًا : ق(∠حـ) = ...°

(أ) ١٨ َ ٣٢° (ب) ٤٣ َ ٢٧° (جـ) ١٣٥° (د) ٤٥°

(٥) عدد حلول Δ أ ب حـ الذي فيه : ق(∠حـ) = ١١٥° ، حـ = ١٢ سم ، أ = ٩ سم

هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(٦) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ الذي فيه : أ = ٨ سم ، ب = ١٠ سم ، ق(∠أ) = ٤٢°

هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) عدد لا نهائي. (د) صفر

(٧) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ حيث : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ب = ٣ سم ، أ = ٥ سم

هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) عدد لا نهائى.

(٨) عدد حلول المثلث س ص ع الذى فيه : س = ٥ سم ، ص = ٦ سم ، ق (∠ س) = ٧٠°

يساوى ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٣

(٩) Δ س ص ع فيه : س = ٣٠ سم ، ص = ٢٠ سم ، ق (∠ س) = ١٠٠°

فإن هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.

(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أى مثلث.

(١٠) Δ أ ب حـ فيه : أ = ٢٠ سم ، ب = ٢٥ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠° فإن هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.

(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أى مثلث.

(١١) Δ س ص ع فيه : ق (∠ س) = ١٠٠° ، س = ٣ سم ، ص = ٤ سم

هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.

(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أى مثلث.

(١٢) إذا كان للمثلث أ ب حـ حيث أ = ١٥ سم ، ق (∠ ب) = ٣٠° حل وحيد

فإن : ب يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٨ (ب) ٧ (جـ) ٧,٥ (د) ٨,٥

(١٣) إذا كان للمثلث س ص ع حيث س = ١٠ سم ، ق (∠ ص) = ٥٠° حلان

فإن : ص يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٦ (ب) ١١ (جـ) ٧,٦٦ (د) ٨

(١٤) إذا كانت الشروط التالية لا تحقق وجود للمثلث س ص ع حيث س = ١٧ سم ، ق (∠ ص) = ٩٢°

فإن : ص يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٢٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٨ (د) ١٦

(١٥) إذا كانت الشروط التالية لا تحقق وجود للمثلث ل م ن حيث لَ = ٣٥ سم ، ق (∠ م) = ٧٥°

فإن : مَ يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٤٥ (ب) ٧٥ (جـ) ٣٣ (د) ٤٠

(١٦) عند حل Δ أ ب حـ الذى فيه : أ = ١٥ سم ، جتا ب = $\frac{١}{٢}$ ، ظا حـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

فإن محيط Δ أ ب حـ = ... نق «حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث»

(أ) $(٢ + \sqrt{٢})$ (ب) $(٢ + \frac{\sqrt{٣}}{٢})$ (جـ) $(٣ + \sqrt{٣})$ (د) ٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

مسائل على الحالة الأولى لحل المثلث (طول ضلع وقياسا زاويتين)

(١) حل المثلث ل م ن الذى فيه : مَ = ١٧ سم ، ق (∠ ل) = ١٦ َ ٣٣° ، ق (∠ ن) = ١٩ َ ٤٤°

«٩,٥ سم ، ١٢,٢ سم ، ٢٥ َ ١٠٢°»

---

(٢) حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٩ سم ، ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب) = ٨٠°

ثم احسب مساحته لأقرب سم²

«١٠,٢ سم ، ٦,٧ سم ، ٦٠° ، المساحة ≈ ٣٠ سم²»

---

(٣) حل المثلث س ص ع الذى فيه : س ص = ٤٠ سم ، ق (∠ س) = ١٢ َ ٧٥°

، ق (∠ ص) = ١٥ َ ٤٨° ثم أوجد ارتفاع المثلث المرسوم من ع على $\overline{\text{س ص}}$

«٤٦,٤ سم ، ٣٥,٨ سم ، ٣٣ َ ٥٦° ، الارتفاع ≈ ٣٤,٦ سم»

مسائل على الحالة الثانية لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة)

(٤) حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ أ) = ١٢ َ ١٥٣° ، بَ = حـَ = ٦ سم

«١١,٦٧ سم ، ٢٤ َ ١٣° ، ٢٤ َ ١٣°»

---

(٥) حل المثلث ل م ن الذى فيه : لَ = ١٢,٥ سم ، نَ = ٧,٢٥ سم ، ق (∠ م) = ٩١,٢°

«١١,٩٦ سم ، ٥٣ َ ٧٦° ، ٢٢ َ ٣٤°»

---

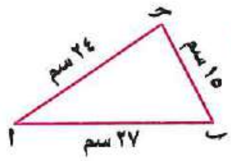
(٦) حل المثلث ل م ن الذى فيه : ل م = ٤٨,٥ سم ، م ن = ٤٦ سم ، جتا م = -٠,٦

«٨٤,٥٣ سم ، ٤٨ َ ٢٥° ، ٥٢ َ ١٢٦° ، ٢٠ َ ٢٧°»

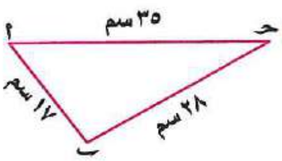
مسائل على الحالة الثالثة لحل المثلث (أطوال ثلاثة أضلاع)

٧ حل المثلث أ ب حـ فى كل من الشكلين الآتيين :

(١)



(٢)



---

٨ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أَ = ١٣ سم ، بَ = ١٤ سم ، حـَ = ١٥ سم

«٨َ ٥٣° ، ٢٩َ ٥٩° ، ٢٣َ ٦٧°»

---

٩ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أَ = ٥ سم ، بَ = ٢ حـَ = ٨ سم

«٤٥َ ٣٠° ، ٦َ ١٢٥° ، ٩َ ٢٤°»

مسائل على الحالة الرابعة لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية مقابلة لأحدهما)

١٠ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أَ = ١٠ سم ، بَ = ٩ سم ، ق (∠ ب) = ٥٧°

---

١١ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، أَ = ٤ سم ، بَ = ٣ سم

---

١٢ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ حـ) = ١١٦° ، حـَ = ١٢ سم ، أَ = ١٠ سم

---

١٣ بيِّن ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق ثم أوجد الحلول الممكنة مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة :

(١) أَ = ١٥ سم ، بَ = ١٠ سم ، ق (∠ أ) = ١٢٠°

(٢) أَ = ٤ سم ، حـَ = ١٦ سم ، ق (∠ حـ) = ١١٥°

(٣) أَ = ١٢ سم ، بَ = ١٥ سم ، ق (∠ أ) = ١٠٠°

(٤) أَ = ٢٠ سم ، بَ = ٢٨ سم ، ق (∠ أ) = ٤٢°

(٥) أَ = ٥ سم ، بَ = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠°

(٦) أَ = ١٢ سم ، حـَ = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٢٧°

(٧) أَ = ٤ $\sqrt{3}$ سم ، بَ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٦٠°

(٨) أَ = ٦ سم ، بَ = ٨ سم ، ق (∠ أ) = ٤٧°

---

١٤ مسألة مفتوحة : أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ ب) = ٥٨° ، أَ = ٤٢ سم

أوجد : بَ التى لا يوجد حل للمثلث أ ب حـ عندها . فسر إجابتك.

مسائل متنوعة

١٥ حل المثلث أ ب حـ المتساوى الساقين الذى فيه : ق (∠ أ) = ١١٠° ، أَ = ٨ سم

«٤,٩ سم ، ٤,٩ سم ، ٣٥° ، ٣٥°»

---

١٦ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أَ = ٢١ سم ، جتا ب = $\frac{٣}{٥}$ ، ظا حـ = $\frac{٥}{١٢}$

«١٧,٣ سم ، ٨,٣ سم ، ١٠٤° ١٥َ ، ٥٣° ٨َ ، ٢٢° ٣٧َ»

---

١٧ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أَ = ٥ سم ، ق (∠ ب) = ١٢٠°

، ومساحته تساوى ١٠ $\sqrt{٣}$ سم^{٢} «١١,٣٦ سم ، ٨ سم ، ٢٢° ٢٤َ ، ٣٧° ٣٦َ»

---

١٨ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٤ : ٥ : ٦

ومحيطه يساوى ٥٠ سم «١٤,٥ سم ، ١٦,٩ سم ، ١٨,٦ سم ، ٤٨° ، ٦٠° ، ٧٢°»

---

١٩ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : جا أ : جا ب : جا حـ = ٣ : ٤ : ٦ ومحيطه يساوى ٥٢ سم

«١٢ سم ، ١٦ سم ، ٢٤ سم ، ٢٦° ٢٣َ ، ٣٦° ٢٠َ ، ١١٧° ١٧َ»

---

٢٠ 📖 حل المثلث أ ب حـ الحاد الزوايا الذى فيه : أَ = ٢١ سم ، بَ = ٢٥ سم ، وطول قطر الدائرة

المارة برؤوسه يساوى ٢٨ سم «٢٦ سم ، ٤٨° ٣٥َ ، ٦٣° ١٤َ ، ٦٨° ١١َ»

---

٢١ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : حَ = ٥ سم ، ق (∠ أ) = ٨٢° ، وطول نصف قطر الدائرة المارة

برؤوسه = ٨ سم «١٥,٨ سم ، ١٥,٧ سم ، ٧٩° ٤٧َ ، ١٨° ١٣َ»

---

٢٢ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أَ = ٧ سم ، ق (∠ ب) = ٤٠°

، ومحيط الدائرة المارة برؤوس المثلث = ٤٤ سم ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$) «٩ سم ، ١٣ سم ، ٣٠° ، ١١٠°»

---

٢٣ حل المثلث س ص ع الذى فيه : ق (∠ س) = ٨٢° ، ق (∠ ع) = ٥٦°

ومساحته = ٩٠٠ سم^{٢} «٥٦ سم ، ٣٨ سم ، ٤٧ سم ، ٤٢°»

---

٢٤ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه :

ق (∠ أ) = ٣٥° ، ق (∠ ب) = ٧٥° ، أَ + ٣ حَ = ٢٥ سم «٤,٢ سم ، ٧,١ سم ، ٦,٩ سم ، ٧٠°»

---

٢٥ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أَ = ١٣ سم ، ق (∠ ب) = ٤٢° ، طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

يساوى ٨ سم «١٠,٧ سم ، ١٥,٩ سم ، ٥٤° ٢٠َ ، ٨٣° ٤٠َ أ ، ١٠,٧ سم ، ٣,٤ سم ، ١٢٥° ٤٠َ ، ١٢° ٢٠َ»

٢٦ في كل مما يأتي هل يمكن تكوين مثلث أ ب ح أم لا ؟ وإذا كان ممكنًا حل هذا المثلث :

① أ = ٣,٢ سم ، ب = ٧,٦٣ سم ، ح = ٦,٤ سم

② أ = ١٢ سم ، ب = ٢١ سم ، ق (∠ ح) = ٩٥°

③ أ = ١ سم ، ب = ٥ سم ، ح = ٤ سم

④ ق (∠ أ) = ٤٢° ، أ = ٧ سم ، ب = ١٠ سم

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان أ ب ح مثلث فيه : أ = ٣ سم ، ب = ٨ سم ، جا أ = $\frac{٥}{١٣}$
فإن عدد المثلثات التي يمكن تكوينها من المعلومات السابقة هي ....

(أ) صفر (ب) ١

(جـ) ٢ (د) المعلومات غير كافية.

② إذا كان أ ب ح مثلث فيه : أ ح = ٨ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠° وكان ٨ جا ٤٠° < ب ح < أ ح
فإن ....

(أ) لا يمكن رسم المثلث. (ب) يمكن رسم مثلث وحيد.

(جـ) يمكن رسم مثلثين. (د) يمكن رسم عدد لا نهائي من المثلثات.

③ إذا كان أ ب ح مثلث فيه : أ ح = ٨ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠° وكان ب ح < ٨ جا ٤٠°
فإن ....

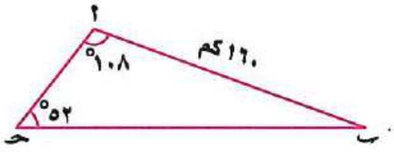
(أ) لا يمكن رسم المثلث. (ب) يمكن رسم مثلث وحيد.

(جـ) يمكن رسم مثلثين. (د) يمكن رسم عدد لا نهائي من المثلثات.

تطبيقات حياتية على الوحدة الرابعة

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

١ 📖 **الربط بالجغرافيا :**



الشكل المقابل يمثل مواقع ثلاث مدن أ ، ب ، حـ

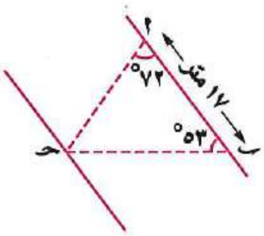
أوجد لأقرب كيلو متر :

(١) المسافة بين أ ، حـ

(٢) المسافة بين ب ، حـ «٦٩ كم ، ١٩٣ كم»

---

٢ 📖 **فى الشكل المقابل :**



العلامتان أ ، ب تقعان على الحافة نفسها لجدول مياه

والمسافة بينهما ١٧ مترًا ، تقع العلامة حـ على الحافة

المقابلة بحيث : ق (∠ ب أ حـ) = ٧٢° ، ق (∠ أ ب حـ) = ٥٣°

أوجد : (١) المسافة بين العلامتين أ ، حـ لأقرب متر.

(٢) المسافة بين حافتى الجدول بفرض أنهما متوازيتان لأقرب رقمين عشريين.

«١٧ م ، ١٥,٧٦ م»

---

٣ 📖 **معارض الفنون :** علقت صورة فى معرض بواسطة خيط مربوط بحلقتين على الحافة الأفقية العليا من الصورة ويمر على مسمار فى حائط ، فإذا كان طول الخيط على كل جهة من المسمار ٣٠ سم ، وقياس الزاوية بين جزئى الخيط ٥٠° فأوجد المسافة بين الحلقتين على حافة الصورة لأقرب سنتيمتر. «٢٥ سم»

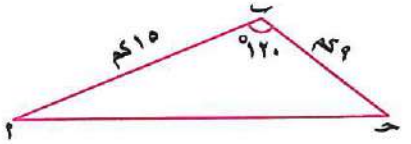
---

٤ 📖 **الربط بالزراعة :** يريد مزارع وضع سياج بقطعة أرض مثلثة الشكل طولا ضلعين فيها ٩٨ م ، ٦٤ م ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٥٢° فما طول هذا السياج ؟ «٢٣٩ م»

---

٥ 📖 تحركت سفينتان أ ، ب فى نفس اللحظة من أحد الموانئ ، فإذا تحركت أ فى اتجاه ٢٠° جنوب الشرق حيث قطعت مسافة ٢٤ كم وتحركت ب فى اتجاه ٥٥° شمال الشرق حيث قطعت مسافة ١٠ كم فى نفس الزمن أوجد المسافة بين السفينتين فى نهاية هذا الزمن. «٢٣,٥ كم»

٦ مسافات : يركب كريم دراجته البخارية ليقطع المسافة من المدينة ؟ إلى المدينة حـ مرورًا بالمدينة ب بسرعة منتظمة مقدارها ٣٦ كم/س ، ثم يعود من المدينة حـ إلى المدينة ؟ مباشرة بسرعة منتظمة مقدارها ٤٢ كم/س أوجد :



(١) الإزاحة بالكيلو متر بين المدينة حـ ، المدينة ؟

(٢) الزمن الكلى بالدقيقة للرحلة كلها.

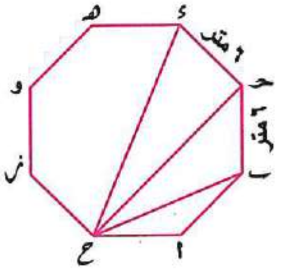
«٢١ كم ، ٧٠ دقيقة»

---

٧ التصميم المعمارى :

صمم مهندس معمارى مبنى على شكل مثمن منتظم ، طول كل ضلع من أضلاعه ٦ أمتار.

أوجد أطوال الأقطار $\overline{\text{ع ب}}$ ، $\overline{\text{ع حـ}}$ ، $\overline{\text{ع ء}}$



«١١,١ متر ، ١٤,٥ متر ، ١٥,٧ متر»

الرياضيات

الجزء الخاص
بالامتحانات

البحتة

- اختبارات تراكمية
- اختبارات شهرية
- الأسئلة الهامة
- امتحانات نهائية

امتحانات إلكترونية
باستخدام تقنية QR

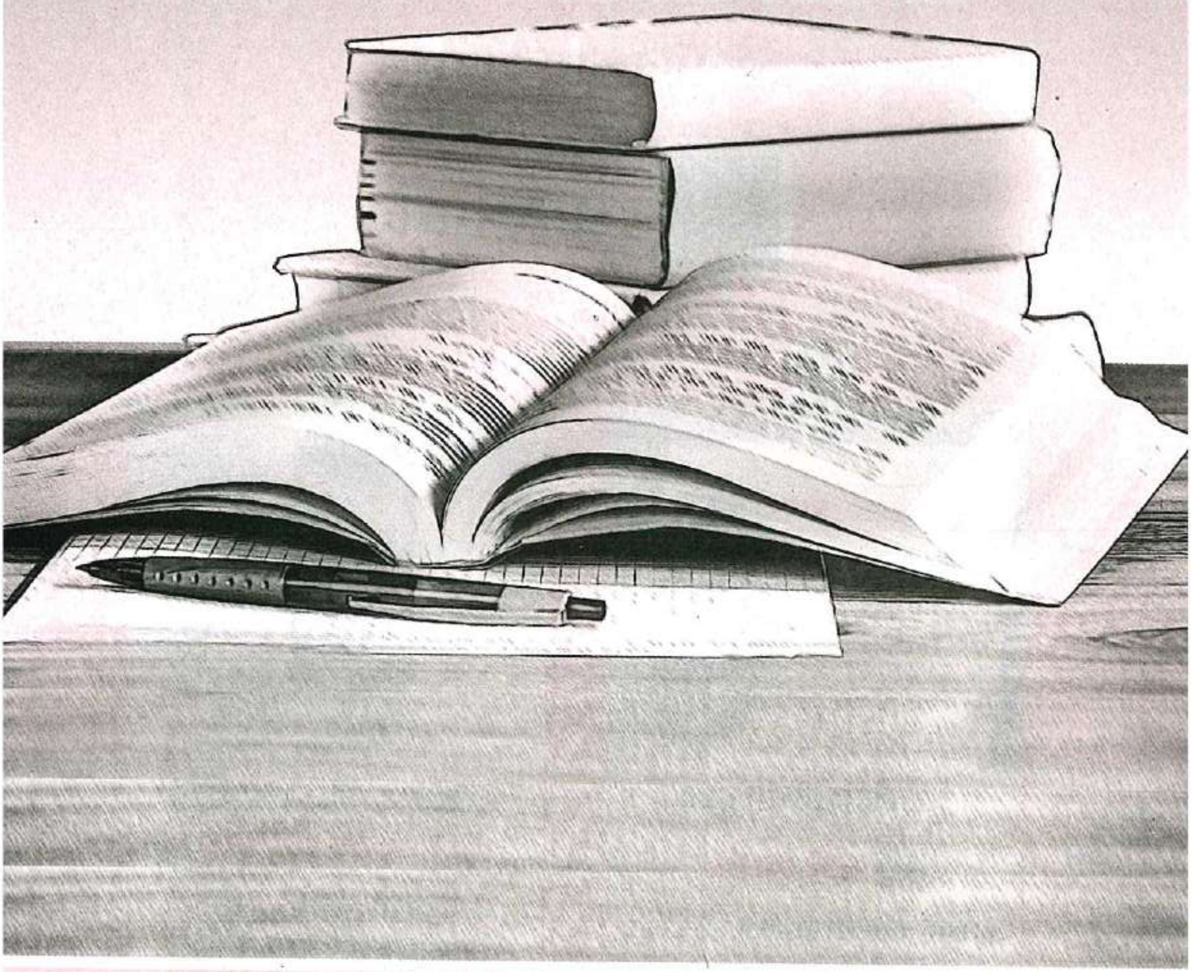


الصف الثاني الثانوي
القسم العلمي
الفصل الدراسي الأول

2025
المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

محتويات الكتاب



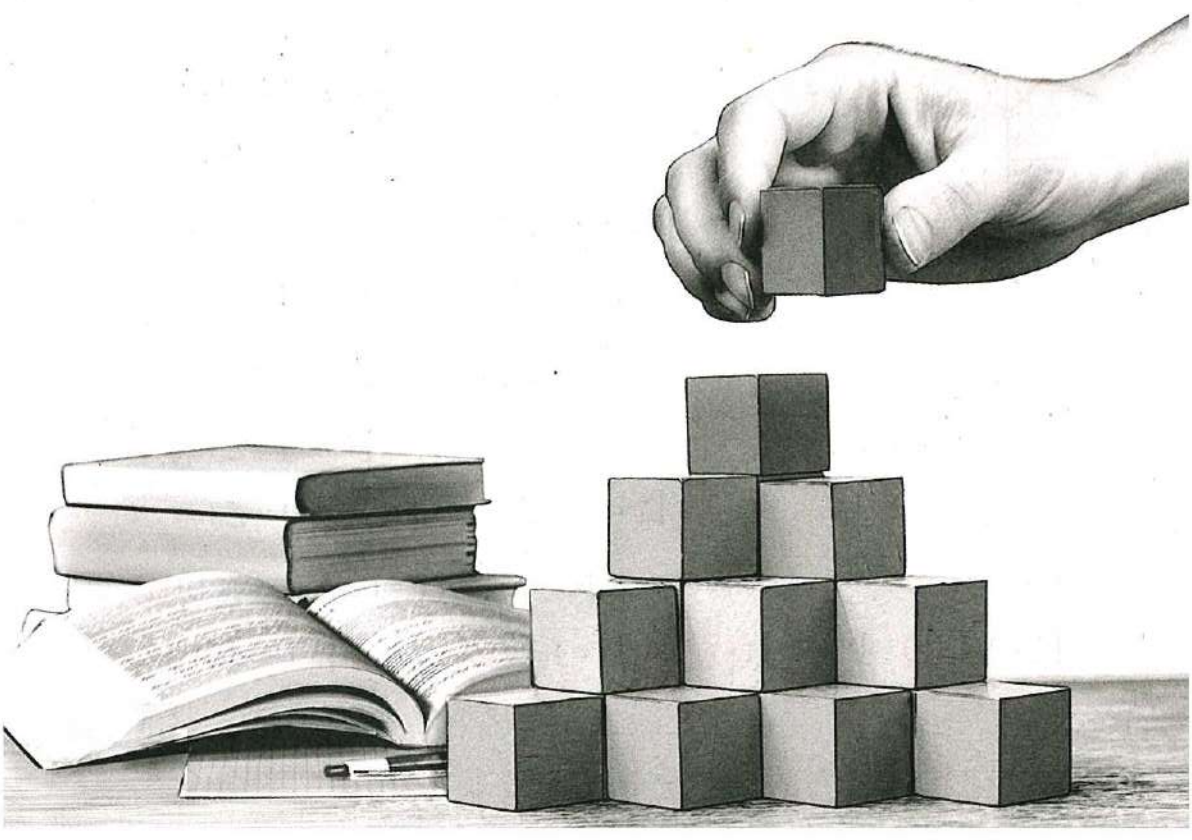
- الاختبـارات التراكميـــة القصيـــرة.
- الاختبـارات الشهرية.
- الأسئلة الهامة.
- امتحانـــات الكتـــاب المدرســـى.
- الامتحانـــات النهائيـــة.
- الإجـابـــات.

الاختبارات التراكمية القصيرة

أولًا : اختبارات تراكمية قصيرة فى الجبر.

ثانيًا : اختبارات تراكمية قصيرة فى التفاضل.

ثالثًا : اختبارات تراكمية قصيرة فى حساب المثلثات.



الدرجة الكلية
....
١٠

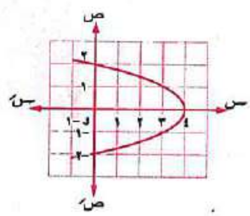
اختبـار 1 على درس 1 من الوحدة الأولى

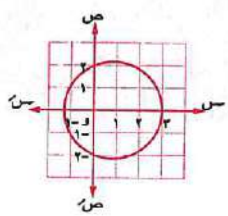
أجب عن الأسئلة الآتية :

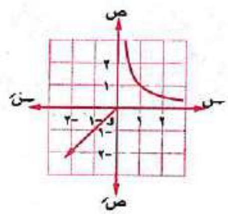
السـؤال الأول ٤ درجات كل جزئية درجة

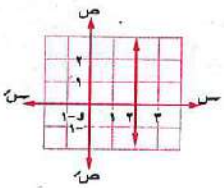
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أى من الأشكال الآتية يمثل دالة فى س ؟

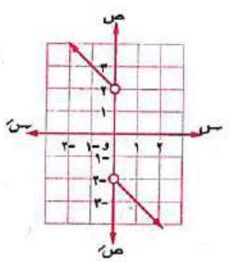

(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

② الشكل المقابل يمثل دالة فى س

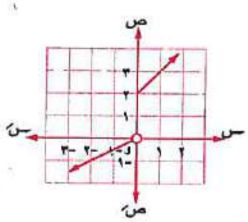


مجالها ....

(أ) ح　　(ب) ح −]−٢ ، ٢[

(جـ) ح − [−٢ ، ٢]　　(د) ح − {٠}

③ الشكل المقابل يمثل دالة فى س مداها ....



(أ) ح − [٠ ، ٢]　　(ب) ح − {٠}

(جـ) ح − [٠ ، ٢[　　(د) ح −]٠ ، ٢]

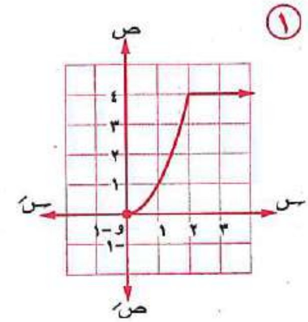
④ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ فإن : مجال د = ...

(أ) [−٢ ، ٢]　　(ب)]−٢ ، ٢[　　(جـ) [−٢ ، ٢[　　(د)]−٢ ، ٢]

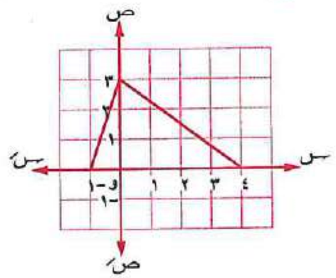
السـؤال الثانى **٦ درجات** كل جزئية درجتان

ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :

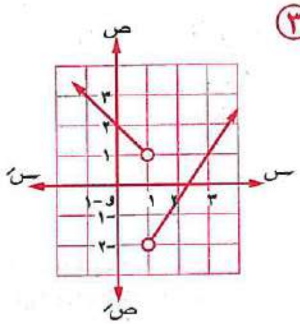
(١)



(٢)



(٣)



الدرجة الكلية
....
١٠

اختبـار 2 حتى درس 2 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = ١/س ، ر (س) = √س فإن : مجال (د . ر) = ...

(أ) ح − {٠} (ب) ح (جـ) ح⁺ (د)]٠ ، ∞[

(٢) إذا كانت : د (س) = س + ١ ، ر (س) = س٢ فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٩

(٣) مجال الدالة د : د (س) = √(٥ − س) يساوى ....

(أ) ح − {٥} (ب) ح⁺ (جـ)]−∞ ، ٥] (د)]٥ ، ∞[

(٤) إذا كانت : د (س) = √س ، ر (س) = س٢ فإن : مجال (د ∘ ر) = ...

(أ)]٠ ، ∞[(ب) ح (جـ) ح⁺ (د) ح⁻

(٥) إذا كانت : د (س) = √(س − ١) ، ر (س) = √(١ − س)

فإن : مجال (د + ر) هو ....

(أ)]١ ، ∞[(ب)]−∞ ، ١] (جـ)]−١ ، ∞[(د) {١}

(٦) إذا كانت العلاقة بين س ، د (س) ، ر (س) كما بالجدول المقابل لبعض قيم س فإن قيمة س التى تحقق أن ر (د (س)) = −١ هى ....

س	د (س)	ر (س)
−١	−٢	٤
صفر	٠	٣
١	٢	٢
٢	٤	١
٣	٦	٠
٤	٨	−١

(أ) ٨ (ب) ٣

(جـ) ٢ (د) ٤

السؤال الثانى **٤ درجات** كل جزئية درجتان

إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س}$ ، ر (س) = س + ٣

فأوجد : (١) (د ο ر) (س) (٢) (ر ο د) (س)

واذكر المجال فى كل من الحالتين.

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الأولى

الدرجة الكلية ..... / ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت الدالة د زوجية فى [أ ، ب] فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) − أ (جـ) ٢ أ (د) $أ^٢$

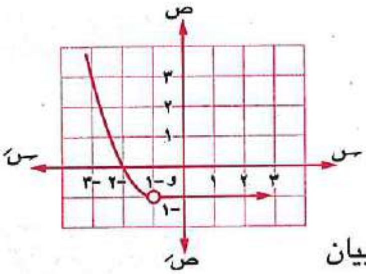
(٢) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٥}{\sqrt[٣]{س - ٨}}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٢} (جـ) ح − {٨} (د)]٨ ، ∞[

(٣) الدالة الفردية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = س جا س (ب) د (س) = جتا س

(جـ) د (س) = ٥ (د) د (س) = س جتا س



④ الشكل المقابل يمثل دالة
مداها ....

(أ) $ح - \{-١\}$ (ب) $[-١ ، \infty[$
(جـ) $]-١ ، \infty[$ (د) $ح$

⑤ إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطة (٢ ، ٣) تنتمى لبيان الدالة د ، فأى النقط الآتية يمكن أن تنتمى لبيان د ؟

(أ) (٥ ، ٣) (ب) (٢ ، -١) (جـ) (٣ ، ٢) (د) كل ما سبق.

⑥ إذا كانت د (س) = $س^٣$ ، ر (س) = $س^٢$ + ١ فأى مما يأتى يكون دالة فردية ؟

(I) (د × ر) (II) (د ∘ ر) (III) (ر ∘ د)

(أ) I فقط (ب) II ، III (جـ) I ، II (د) I ، III

السؤال الثانى ٤ درجات

إذا كانت : $د_١$ (س) = $س^٥$ ، $د_٢$ (س) = جا س أوجد : ($د_١$ + $د_٢$) (س)

ثم ابحث نوع ($د_١$ + $د_٢$) من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

الدرجة الكلية
١٠

اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٣ درجات

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = $\begin{cases} |س| & \text{عندما } س \le ٠ \\ س^٢ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة

وبيّن نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وادرس اطرادها.

السؤال الثانى ٢ درجة

أوجد مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٢ س + ١}{س - ٢}$

وأثبت أن : د دالة أحادية.

السؤال الثالث ٣ درجات

إذا كانت : د (س) = $س^{٢}$ − ١ ، ر (س) = س + ١

فارسم الدالة $\frac{د}{ر}$ مبيناً مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها.

السؤال الرابع ٢ درجة

ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = { س − ١ ، ٢ < س ≤ ٤ ؛ −١ ، −٢ ≤ س ≤ ٢

ومن الرسم عين المدى.

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) منحنى الدالة د : د (س) = $س^{٢}$ + ٤ هو نفس منحنى الدالة ر : ر (س) = $س^{٢}$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overleftharpoonup{وس}$ (جـ) $\overleftarrow{وص}$ (د) $\overleftharpoonup{وص}$

(٢) الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) $د_{١}$ (س) = س + ٢ (ب) $د_{٢}$ (س) = $س^{٢}$

(جـ) $د_{٣}$ (س) = | س | (د) $د_{٤}$ (س) = ٥

(٣) إذا كانت د دالة حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ فإن نقطة التماثل للدالة التى قاعدتها د (س + ١) هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (−١ ، ٠) (د) (−١ ، ١)

(٤) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س + ٤}$ ، ر (س) = $س^{٢}$ − ٤

فإن : (د ∘ ر) (س) = ...

(أ) | س | (ب) $س^{٢}$ (جـ) $س^{٢}$ + ٤ (د) ٢

⑤ إذا كانت د (س) دالة حقيقية مجالها [−٢ ، ٣] فإن مجال الدالة ر (س) = د (س − ٢) هو ....

(أ) [−٢ ، ٣]　　(ب) [−٤ ، ١]　　(جـ) [٠ ، ٥]　　(د) ح

⑥ إذا كانت د (س) دالة فردية فإن | د (س) | تكون ....

(أ) فردية.　　(ب) زوجية.

(جـ) زوجية وفردية معًا.　　(د) ليست زوجية وليست فردية.

السـؤال الثانى　٤ درجات

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = | ٤ − $س^٢$ | ومن الرسم استنتج مدى الدالة وبيِّن نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وادرس اطرادها.

الدرجة الكلية

١٠

اختبـار 6 حتى درس 6 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول　٦ درجات　كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س - ٤}}$ هو ....

(أ) [٤ ، ∞[　　(ب)]٤ ، ∞[　　(جـ)]− ∞ ، ٤]　　(د)]− ∞ ، ٤[

② الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} ٢ & \text{عندما } س > ٠ \\ -٢ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$ متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٢ ، ٠)　　(ب) (−٢ ، ٠)　　(جـ) (٠ ، ٠)　　(د) (٢ ، −٢)

③ المساحة المحصورة بين منحنيى الدالتين د : د (س) = | س + ٣ | − ٢ ، ر : ر (س) = صفر هى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(جـ) ٤　　(د) ٥

④ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = $س^٢$ (ب) د (س) = | س |

(جـ) د (س) = $\frac{١}{س}$ (د) د (س) = ٣

⑤ مجموعة حل المتباينة : | س − ٢ | ≥ −٤ فى ح هى ....

(أ)]−٢ ، ٦[(ب) [−٢ ، ٦] (جـ) ح (د) Ø

⑥ نفرض أن المنحنى د (س) = $-س^٣$ انتقل ٤ وحدات لليمين ووحدتين لأسفل وكان المنحنى الناتج هو ر (س) فإن : ر (−٢) = ...

(أ) −٢١٨ (ب) −٢٠ (جـ) ٦ (د) ٢١٤

السـؤال الثانى **٤ درجات** *كل جزئية درجتان*

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من :

① $\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩}$ + ٢س = ٩ ② $\frac{١}{|٢س - ٣|} \geq ٢$

الدرجة الكلية

١٠

اختبـار 7 حتى درس 1 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول **٦ درجات** *كل جزئية درجة*

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د دالة فردية فى الفترة [أ ، ب] فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) −أ (جـ) ٢أ (د) $أ^٢$

② نقطة تماثل الدالة د : د (س) = $(س - ٢)^٣$ + ١ هى ....

(أ) (٢ ، ١) (ب) (−٢ ، ١) (جـ) (٢ ، −١) (د) (−٢ ، −١)

③ مجموعة الحل للمعادلة : $\sqrt[٣]{س^٣}$ = ٨ فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {٤} (جـ) {١٦} (د) {٦٤}

④ مجموعة الحل للمعادلة : $س^{\frac{٢}{٣}} = ٢٥$ فى ح هى ....

(أ) {٥}　　　(ب) {٥ ، −٥}

(جـ) {١٢٥}　　　(د) {١٢٥ ، −١٢٥}

⑤ إذا كان : $٧^{س + ١} = ٣^{٢س + ٢}$ فإن : س = ...

(أ) −١　　　(ب) ١　　　(جـ) ٤　　　(د) صفر

⑥ إذا كانت : $د_١(س) = ٣^{س}$ ، $د_٢(س) = ٩^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق أن $د_١(٢س − ١) + د_٢(س + ١) = ٧٥٦$ هى ....

(أ) ٢　　　(ب) ٤　　　(جـ) ٦　　　(د) ٧

السـؤال الثانى **٤ درجات** *كل جزئية درجتان*

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

① $س^{\frac{٤}{٣}} − ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ = ٠$

② $|س + ٢| = ٣س − ١٠$

اختبـار 8 حتى درس 2 من الوحدة الثانية

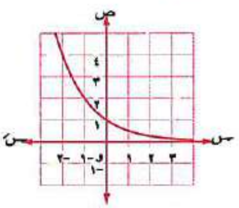
الدرجة الكلية ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

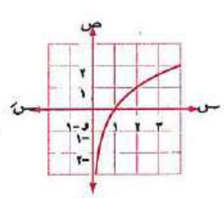
السـؤال الأول **٦ درجات** *كل جزئية درجة*

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

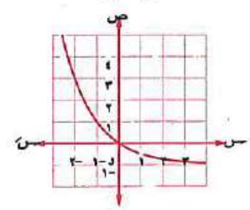
① الدالة د حيث $د(س) = ٢^{س}$ يمثلها الشكل البيانى ....



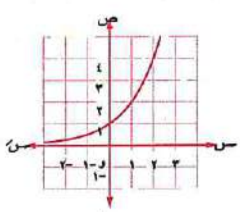
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

(٢) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ فإن نقطة التماثل للدالة التى قاعدتها د (س + ١) هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (−١ ، ٠) (د) (−١ ، ١)

(٣) مجموع جذور المعادلة : $س^{٤}$ = ١٦ يساوى ....

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) ± ٢

(٤) إذا كانت : د (س) = $أ^{س}$ ، أ > ١ فإن : د (س) > ١ عندما ....

(أ) س ∈ ح (ب) س ∈ $ح^{+}$ (جـ) س ∈ $ح^{-}$ (د) س ∈ ص

(٥) الدالة د : د (س) = $(٢ أ)^{س}$ تكون متناقصة عندما أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٢[(د)]٠ ، $\frac{١}{٢}$[

(٦) إذا كانت : د (س) = ٣ س + ١ ، ر (س) = $س^{٢}$ − ٣ فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) −٤

السؤال الثانى ٤ درجات

يتكاثر النحل فى إحدى الخلايا فيزداد بمعدل ٢٥ ٪ كل أسبوع فإذا كان عدد النحل ٦٠ نحلة اكتب دالة أسية تمثل عدد النحل بعد ن أسبوع ثم قدر عدد النحل بعد ٦ أسابيع.

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 9 حتى درس 3 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

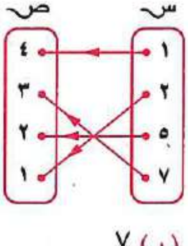
السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الشكل المقابل يمثل دالة

د : س ⟵ ص

فإن : $د^{-١}$ (٤) = ...



(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٧

(٢) إذا كانت : $٣^{د(س)} = ٢ س - ١$ فإن : $د^{-١}(٠) =$ ....

(أ) ١ (ب) ‎-١ (جـ) ٢ (د) ٥

(٣) منحنى ر : ر (س) = |س + ٣| هو نفس منحنى د : د (س) = |س| بإزاحة مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overrightarrow{وس}$ (جـ) $\overleftarrow{وص}$ (د) $\overrightarrow{وص}$

(٤) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س| - ٣}$ هو ....

(أ) {٣ ، ‎-٣} (ب) [‎-٣ ، ٣]

(جـ) ح - [‎-٣ ، ٣] (د) ح - {‎-٣ ، ٣}

(٥) إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة $د^{-١}$ فى نقطة $(أ ، \frac{٤}{أ})$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ±٢ (جـ) ٤ (د) ±٤

(٦) إذا كانت : د (س) = $س^٢$ ، ر (س) = س - ٣ فإن مجموعة حل المعادلة :
ر (د (س)) = $ر^{-١}$ (س) فى ح هى ....

(أ) {٢ ، ‎-٣} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، ‎-٢} (د) {٢ ، ٣}

السـؤال الثانى **٤ درجات** كل جزئية درجتان

إذا كانت د دالة بحيث د (س) = $\frac{٢ س + ٣}{س + ١}$ فأوجد :

(١) مجال ومدى د (٢) $د^{-١}$ (س) وعين مجال ومدى $د^{-١}$

الدرجة الكلية
......
١٠

اختبـار 10 حتى درس 4 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $لو_{س} ٤ = ٢$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ±٢ (جـ) ٢ (د) ‎-٢

(٢) مجال الدالة د : د (س) = لو $_{١ - س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١ (جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

(٣) إذا كانت : د (س) = ٦ س فإن : د$^{-١}$ (س) = ...

(أ) ٦ س (ب) $\frac{٦}{س}$ (جـ) $\frac{س}{٦}$ (د) س − ٦

(٤) مجموعة حل المعادلة : | س − ٣ | + ١ = ٠ فى ح هى ....

(أ) ح (ب) {−١} (جـ) ∅ (د) {٤}

(٥) إذا كانت د (س) = لو$_{م}$ (٢ س + ٤) وكانت د$^{-١}$ (٥) = ١٤ فإن : م = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٦) حاصل ضرب جذرى المعادلة : س^{٢} − ٣ | س | − ١٠ = ٠ يساوى ....

(أ) −٢٥ (ب) −١٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

السؤال الثانى ٤ درجات كل جزئية درجتان

حل فى ح المعادلتين الآتيتين :

(١) لو$_{٤}$ لو$_{٢}$ لو$_{٣}$ (س + ١) = ٠ (٢) $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{|س - ٢|} = ٣\frac{٣}{٨}$

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 11 حتى درس 5 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المقدار $\frac{٣ \text{ لو } ٢}{\text{لو } ٤ + \text{لو } ٣}$ يكافئ ....

(أ) لو$_{٣}$ ٢ (ب) لو$_{٧}$ ٢ (جـ) لو$_{١٢}$ ٨ (د) لو$_{٧}$ ٨

(٢) إذا كان منحنى ص = لو$_{٤}$ (١ − م س) يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢}\right)$ فإن : م = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

③ إذا كانت : د (س) = ٣ س + ١ ، ر (س) = س^{٢} − ٥

فإن : (ر ∘ د) (−٣) = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٥٩ (د) −٩٥

④ إذا كانت : ص = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ لكل س ≥ ٠ فإن الدالة العكسية لها ص = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} (ب) س^{٣} (جـ) س^{٣} − ١ (د) س$^{-\frac{١}{٢}}$

⑤ إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : ٣ س^{٢} − ١٦ س + ١٢ = ٠

فإن : لو$_{٢}$ ل + لو$_{٢}$ م = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٢ (د) ١٦

⑥ $\frac{١}{١ + \text{لو}_{\text{ب}} \text{أ} + \text{لو}_{\text{ب}} \text{حـ}} + \frac{١}{١ + \text{لو}_{\text{حـ}} \text{أ} + \text{لو}_{\text{حـ}} \text{ب}} + \frac{١}{١ + \text{لو}_{\text{أ}} \text{ب} + \text{لو}_{\text{أ}} \text{حـ}}$ = ...

(أ) لو$_{\text{أ}}$ ب حـ (ب) لو$_{\text{ب}}$ أ حـ (جـ) لو$_{\text{حـ}}$ أ ب (د) ١

السـؤال الثانى ٤ درجات

إذا كان : لو (س + ص) = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) + لو ٢

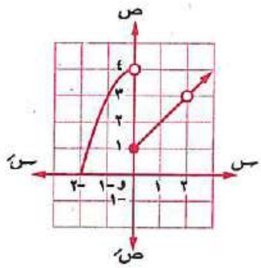
أثبت أن : س = ص

الدرجة الكلية
....
١٠

اختبـار 1 على درس 1 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول ٤ درجات *كل جزئية درجة*



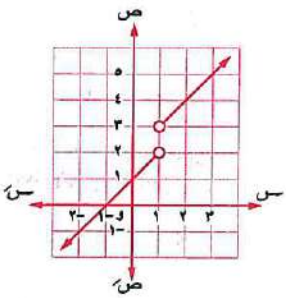
من الشكل المقابل أوجد :

(١) د (صفر$^{+}$) (٢) د (صفر$^{-}$)

(٣) د (٢) (٤) نهــا د (س) حيث س ← ٢

السـؤال الثانى ٦ درجات *كل جزئية درجتان*

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

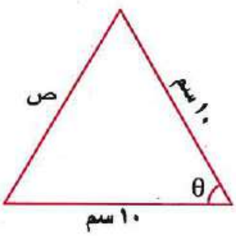


(١) الشكل المقابل هو التمثيل البيانى للدالة د

فإن : نهــا د (س) حيث س ← ١ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ١ (د) غير موجودة.



(٢) فى الشكل المقابل :

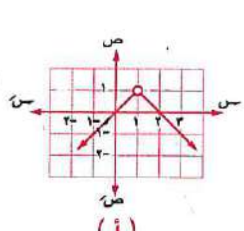
عندما θ ← $\frac{\pi}{2}$

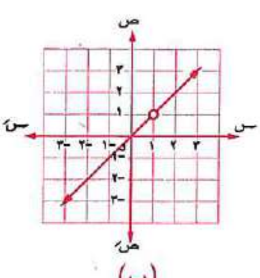
فإن : ص ← .... سم

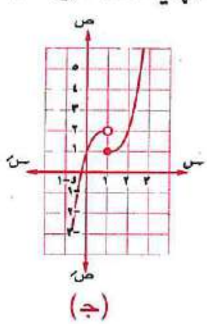
(أ) صفر (ب) ٥

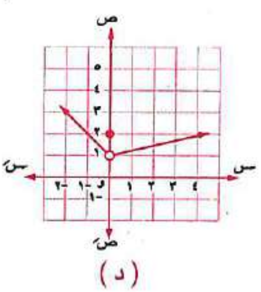
(جـ) ١٠ (د) ١٠ $\sqrt{2}$

(٣) أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ليس لها نهاية عند س = ١ ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

الدرجة الكلية

....

١٠

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٢ درجة *كل جزئية نصف درجة*

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

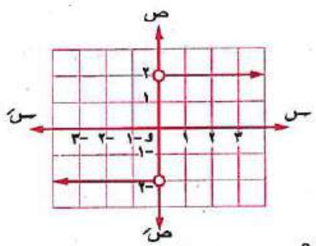
① $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ + س}{٤ س - ١} =$ ....

(أ) -١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{-١}{٤}$ (د) ١

② $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} =$ ....

(أ) -٦ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ٦

③ الشكل البيانى المقابل يمثل د (س)

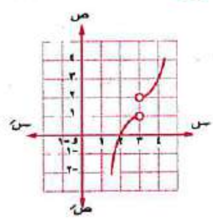


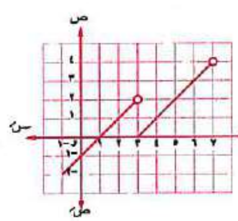
فإن : $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

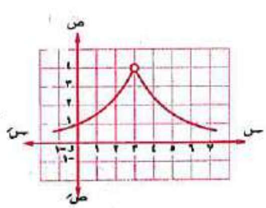
(أ) ٠ (ب) -٢

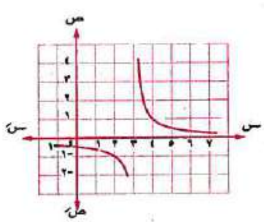
(جـ) ٢ (د) غير موجودة.

④ أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية لها نهاية عند س = ٣ ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

السؤال الثانى ٨ درجات *كل جزئية درجتان*

أوجد قيمة : ① $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{س^{٢} + س}$ ② $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣ س^{٢} + س - ٤}{س^{٢} - ١}$

③ $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} - ١٥ س - ٤}{س - ٤}$ ④ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{١}{س - ١} - \dfrac{٣}{س^{٣} - ١}\right)$

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٧} - ١}{س - ١} =$ ....

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) صفر

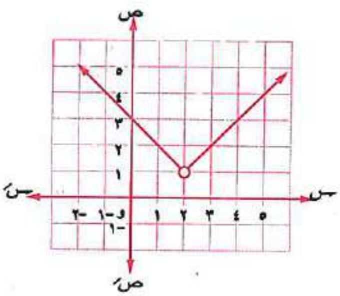
② $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} =$ ....

(أ) $\dfrac{م}{ن}$ (ب) $\dfrac{م}{ن} (أ)^{م - ن}$ (جـ) $\dfrac{ن}{م} (أ)^{م - ن}$ (د) $\dfrac{ن}{م} (أ)^{ن - م}$

③ $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + هـ)^{٥} - س^{٥}}{هـ} =$ ....

(أ) $س^{٥}$ (ب) $٥ س^{٤}$ (جـ) صفر (د) ١

④ في الشكل المقابل :



$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} د(س) =$ ....

(أ) ١ (ب) ١−

(جـ) ٢ (د) غير موجودة.

⑤ إذا كانت : ر دالة وكانت $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{ر(س) - ٨}{س - ٢} = ٧$ فإن :

$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ س^{٢} - ر(س)}{س - ٢} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٥

⑥ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٦} - ٦٤}{س - ٢} =$ ....

(أ) $٦ (٢)^{٥}$ (ب) ١٢٨ (جـ) $٦٤ (٢)^{٥}$ (د) ٦٣

السـؤال الثانى **٤ درجات** *كل جزئية درجتان*

أوجد قيمة :

(١) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٢} + ٣س - ١٠}$

(٢) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}} \frac{(س + ٣)^{٥} - ١}{س + ٢}$

الدرجة الكلية

....

١٠

اختبـار 4 حتى درس 4 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول **٢ درجة** *كل جزئية نصف درجة*

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \frac{س^{-٣} + ٣س^{-٢} + ١}{س^{-٢} + س^{-١} + ٣} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) $\frac{١}{٣}$

(٢) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $٤\frac{١}{٢}$ (جـ) ٣ (د) ٢٧

(٣) إذا كانت : $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٢} - ٤أ}{س - ٢}$ لها وجود فإن : أ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٤) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} (٤ + ٣س - س^{٣}) =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ∞ (د) $-\infty$

السـؤال الثانى **٨ درجات** *كل جزئية درجتان*

أوجد قيمة :

(١) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \frac{١}{س} \sqrt{٣ + ٤س^{٢}}$

(٢) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} س \left(\sqrt{٤س^{٢} + ١} - ٢س\right)$

(٣) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٧} + ٥}{٣س^{٤} - ٨}$

(٤) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}} \frac{(س - ٣)^{٧} - ١}{س - ٤}$

الدرجة الكلية
……
١٠

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ ٢ س قتا ٤ س = ……………

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) صفر

② $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نها}} \frac{س^{٣} + ٥}{س\,(٢\,س^{٢} + ٣)}$ = ……………

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

③ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٢\,س + \text{جا}\,٣\,س}{\text{طا}\,٥\,س}$ = ……………

(أ) ٥ (ب) $\frac{٦}{٥}$ (جـ) ١ (د) صفر

④ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٥ - ٥\,\text{جتا}\,س}{س}$ = ……………

(أ) ٢٥ (ب) ٥ (جـ) صفر (د) ٢

⑤ إذا كان : أ > ب > صفر فإن : $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نها}} \frac{س^{أ}}{س^{ب}}$ = ……………

(أ) ∞ (ب) $-\infty$ (جـ) صفر (د) أ − ب

⑥ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,س + \text{جا}\,٢\,س + \text{جا}\,٣\,س + \text{جا}\,٤\,س}{\text{طا}\,س + \text{طا}\,٢\,س + \text{طا}\,٣\,س + \text{طا}\,٤\,س}$ = ……………

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ١٠

السـؤال الثانى ٤ درجات — كل جزئية درجتان

أوجد قيمة :

① $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{س^{٢} + \text{جا}^{٢}\,٣\,س}{س\,\text{طا}\,٢\,س}$

② $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{س^{٢} + س}$

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 6 حتى درس 6 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = $س^٢$ فإن : $\lim_{س \to ٢}$ د (دَ (س)) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٣٢

② $\lim_{س \to ٩} \frac{٣ - \sqrt{س}}{٢٧ - \sqrt{س}^{٣}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٩}$ (ب) $\frac{١}{٢٧}$ (جـ) ٣ (د) $-\frac{١}{٢٧}$

③ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} أ \text{ حتا } س + \frac{١٥ \text{ جا } س}{س} & ، س > ٠ \\ \frac{س^٦ - ٦٤}{س^٣ - ٨} & ، س < ٠ \end{cases}$

وكانت د لها نهاية عندما س = ٠ فإن : أ = ...

(أ) −٧ (ب) ٨ (جـ) −١ (د) ١

④ إذا كانت : $\lim_{س \to \infty} \frac{أ س + ٦}{٢ س - ٧} = ٤$ فإن : أ = ... حيث أ ∈ ع

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

⑤ إذا كانت د دالة زوجية وكانت $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ٥ أى الجمل الآتية صحيح ؟

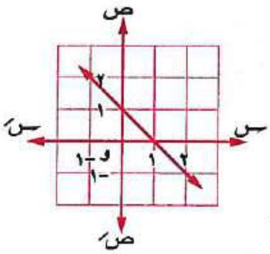
(أ) $\lim_{س \to -٢}$ د (س) = ٥

(ب) $\lim_{س \to -٢}$ د (س) = −٥

(جـ) $\lim_{س \to -٢}$ د (س) = صفر

(د) $\lim_{س \to -٢}$ د (س) = −٢

(٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن : $\lim_{س \to ٢} |د(س)| =$ ....

(أ) -١　　(ب) صفر

(جـ) ١　　(د) غير موجودة.

السؤال الثانى　٤ درجات

ابحث وجود $\lim_{س \to ٣} د(س)$ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٧س + ١٢}{س - ٣} & ، س > ٣ \\ ٢س - ٧ & ، س < ٣ \end{cases}$

الدرجة الكلية

......

١٠

اختبار 7　حتى درس 7 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول　٦ درجات　كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة د : $د(س) = ٤ س^{-٣} + \frac{س}{س^٢ - ٩}$ متصلة لكل $س \in$ ....

(أ) ح　　(ب) ح $- \{٠\}$

(جـ) ح $- \{٣ ، -٣\}$　　(د) ح $- \{٣ ، -٣ ، ٠\}$

(٢) إذا كانت د : $د(س) = \begin{cases} \frac{س^٨ - أ^٨}{س^٥ - أ^٥} & ، س \neq أ \\ ٢٠٠ & ، س = أ \end{cases}$

متصلة عند س = أ　فإن : أ = ...

(أ) ٥　　(ب) $\frac{٨}{٥}$　　(جـ) ١٢٥　　(د) $\frac{١}{٥}$

③ الدالة د : د $(س) = \frac{س + ٢}{\sqrt{س} - ٢}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) $]٤ ، \infty[$ (ب) $]٠ ، \infty[$ (جـ) $]٠ ، \infty[- \{٤\}$ (د) $]- \infty ، ٢[$

④ إذا كانت د : د $(س) = \begin{cases} \frac{|س|}{س} + ٦ & ، \quad س < ٠ \\ أ^٢ + جتا ٣ س & ، \quad س \geq ٠ \end{cases}$ متصلة عند س = ٠

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) $\pm \sqrt{٦}$ (جـ) ± ٢ (د) $\pm \sqrt{٥}$

⑤ إذا كانت د دالة أحادية كثيرة حدود وكانت $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ د (س) = ٣

فإن : $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) −٢ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) ٣

⑥ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{س جا ٢ س + جا ٣ س^٢}{ظا^٢ ٣ س + س^٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) $\frac{١١}{١٠}$

السـؤال الثانى ٤ درجات

ابحث اتصال الدالة د حيث د $(س) = \begin{cases} س^٢ + ٣ & ، \quad س \geq ١ \\ \frac{س^٢ + ٢ س - ٣}{س - ١} & ، \quad س < ١ \end{cases}$ عند س = ١

ثالثًا اختبارات تراكمية قصيرة فى حساب المثلثات

الدرجة الكلية

10

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة ونصف

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى Δ أ ب حـ إذا كان : أَ = ٦ سم ، ق(∠ب) = ٢ ق(∠أ) = ٨٠°

فإن : حَ = ... سم.

(أ) $\frac{٦ \text{ حا } ٤٠°}{\text{حا } ٦٠°}$ (ب) $\frac{\text{حا } ٦٠°}{٦ \text{ حا } ٤٠°}$ (جـ) $\frac{\text{حا } ٤٠°}{٦ \text{ حا } ٦٠°}$ (د) $\frac{٦ \text{ حا } ٦٠°}{\text{حا } ٤٠°}$

(٢) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا متساوى الأضلاع طول ضلعه يساوى ٨ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى .... سم.

(أ) ٨ (ب) ١٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٦ (د) ٤ $\sqrt{٣}$

(٣) فى المثلث س ص ع إذا كان : $\frac{٢ \text{ سَ}}{\text{حا س}}$ = ٨ سم

فإن مساحة الدائرة المارة برؤوسه تساوى .... سم^{٢}

(أ) ١٦ π (ب) ٨ π (جـ) ٤ π (د) ٦٤ π

(٤) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا فإن : $\frac{\text{حا } (أ + ب)}{\text{حا } أ + \text{حا } ب}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\text{حَ}}{\text{أَ} + \text{بَ}}$ (جـ) $\frac{\text{أَ}}{\text{أَ} + \text{حَ}}$ (د) $\frac{\text{بَ}}{\text{أَ} + \text{حَ}}$

السؤال الثانى ٤ درجات

أ ب حـ مثلث فيه : حَ = ١٩ سم ، ق(∠أ) = ١١٢° ، ق(∠ب) = ٣٣°

أوجد لأقرب رقمين عشريين كلًّا من : بَ ، طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث.

الدرجة الكلية
....
١٠

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى المثلث س ص ع إذا كان : $\frac{\text{جا س}}{٣} = \frac{\text{جا ص}}{٤} = \frac{\text{جا ع}}{٥}$

فإن قياس أكبر زاوية فى المثلث يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٧٥° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

② فى Δ ا ب حـ يكون $\frac{\text{أ}}{\text{أ} + \text{ب}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{جا ا}}{\text{جا ب}}$ (ب) $\frac{\text{جا ا}}{\text{جا حـ}}$ (جـ) $\frac{\text{جا ا}}{\text{جا ا} + \text{جا ب}}$ (د) $\frac{\text{جا ا}}{\text{جا ا} + \text{جا حـ}}$

③ طول قطر الدائرة الخارجة للمثلث ا ب حـ الذى فيه : أ = ٨ جا ا سم يساوى .... سم.

(أ) ٤ (ب) ٨ جا ا (جـ) ٨ (د) ٥

④ المثلث س ص ع فيه : سَ = صَ ، $\frac{\text{عَ}^٢ - ٢\,\text{سَ}^٢}{\text{سَ}^٢}$ = ١ فإن : ق (∠ ع) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

⑤ إذا كان : ا ب حـ مثلثًا مساحته ٢٤ سم² وكان طول نصف قطر الدائرة الخارجة عنه ٥ سم

فإن : جا ا جا ب جا (ا + ب) = ...

(أ) $\frac{٣}{٢٥}$ (ب) $\frac{٦}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

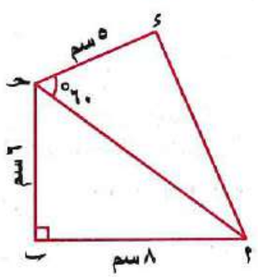
⑥ فى Δ ا ب حـ إذا كان : ق (∠ ا) = ٦٠°

فإن : $\left(١ + \frac{\text{أ}}{\text{حـ}} + \frac{\text{ب}}{\text{حـ}}\right)\left(١ + \frac{\text{حـ}}{\text{ب}} - \frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

السؤال الثانى ٤ درجات

فى الشكل المقابل :



ا ب حـ ء شكل رباعى فيه : ا ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم

، ق (∠ ب) = ٩٠° ، ء حـ = ٥ سم ، ق (∠ ا حـ ء) = ٦٠°

أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ ا ء حـ

الدرجة الكلية

....

١٠

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) عدد حلول المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق(∠ أ) = ٦٠° ، أَ = ٧ سم ، حَ = ٩ سم هو ....

(أ) واحد. (ب) اثنان. (جـ) صفر. (د) ثلاثة.

(٢) إذا كان نق هو طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ

فإن : $\frac{أَ}{٢ \text{ جا } أ}$ = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\frac{١}{٢}$ نق (د) $نق^{٢}$

(٣) فى المثلث أ ب حـ إذا كان : أَ = حَ فإن : جتا حـ = ...

(أ) $\frac{٢ بَ}{حَ}$ (ب) $\frac{حَ}{٢ بَ}$ (جـ) $\frac{بَ}{٢ أَ}$ (د) $\frac{حَ}{٢ أَ}$

(٤) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٦ سم ، ١٠ سم ، ١٤ سم يساوى ....

(أ) ١٢٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ١٣٥° (د) ٦٠°

(٥) إذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ = ١٢ $سم^{٢}$ فإن : $(بَ^{٢} + حَ^{٢} - أَ^{٢})$ ظا أ = ...

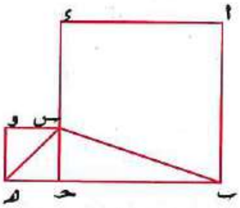
(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٦

(٦) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء ، س حـ هـ و مربعان

إذا كان : ب حـ = ٣ حـ هـ

فإن : جا (∠ ب س هـ) = ...



(أ) $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ (جـ) $\frac{-١}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$

السؤال الثانى ٤ درجات

فى المثلث أ ب حـ إذا كان : ق(∠ أ) = ٤٠° ، أَ = ٢٤ سم ، بَ = ٣٠ سم

كم مثلثًا يحقق ذلك ؟ أوجد حَ إذا كان ممكنًا فى كل حالة.

الاختبـارات الشهرية

أولًا : نماذج اختبارات شهر أكتوبر.

ثانيًا : نماذج اختبارات شهر نوفمبر.

محتوى امتحان شهر أكتوبـر

الجبـــر

من : الوحدة الأولى – درس (١) : الدوال الحقيقية.

إلى : نهاية درس التمثيل البيانى للدوال والتحويلات الهندسية.

التفاضل

من : الوحدة الثالثة – درس (١) : مقدمة فى النهايات.

إلى : نهاية درس إيجاد نهاية الدالة جبريًا.

حساب المثلثات

الوحدة الرابعة – نهاية درس (١) : قاعدة الجيب.

محتوى امتحان شهر نوفمبر

الجبـــر

من : حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

إلى : الدالة الأسية وتطبيقاتها وحل المعادلات الأسية.

التفاضل

من : نهاية الدالة عند اللانهاية.

إلى : نهاية الدوال المثلثية.

حساب المثلثات

قانون جيب التمام «قاعدة جيب التمام»

«الوحدة الرابعة الدرس رقم (٢)».

أولاً

نماذج اختبارات شهر أكتوبر

اختبار ١

الدرجة ٢٠

(١٢ درجة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س^{٢} - ٩} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٢) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٤}$ هو ....

(أ)]٢ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٢]

(جـ)]٢ ، ∞[− {٤} (د)]−∞ ، ٢] − {٤}

(٣) جميع الدوال الآتية أحادية على مجالها ما عدا الدالة د (س) = ...

(أ) ٣ س (ب) $\frac{١}{س}$ (جـ) ٥ (د) $س^{٣}$

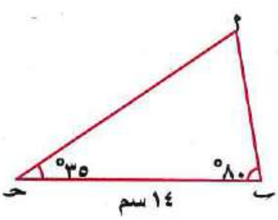
(٤) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ٩ ب حـ يساوى ٣ سم

وكان جا ٩ + جا ب + جا حـ = ٢ فإن محيط المثلث = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٥) طول أكبر ضلع فى المثلث المرسوم ≃ .... سم.

(لأقرب عدد صحيح)



(أ) ٢٠ (ب) ١٦

(جـ) ١٥ (د) ١٤

(٦) إذا كانت : $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ك}{س + ٢} = -١$ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ±٢

(٧) الدالة د : د (س) = | س + ٢ | تكون تناقصية فى الفترة ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]٢ ، ∞[(جـ)]−٢ ، ∞[(د)]−∞ ، −٢[

(٨) إذا كانت د دالة فردية فإن : $\frac{\text{٧ د (٣) + ٣ د (−٣)}}{\text{٢ د (−٣)}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٥ (د) −٠,٥

(٩) إذا كانت : د (س) = س − ٣ ، ر (س) = $\text{س}^{٢}$ فإن : (د ∘ ر) (٥) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٢٢ (د) ٢٥

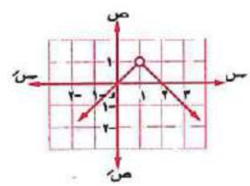
(١٠) نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{\text{س + ١}}{\text{س}}$ هى ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (١ ، −١)

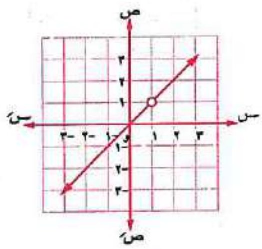
(١١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{(س + ١)}^{٤} \text{ − ٨١}}{\text{س − ٢}}$ = ...

(أ) ١٨ (ب) ٨١ (جـ) −١٠٨ (د) ١٠٨

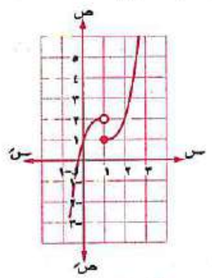
(١٢) أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ليس لها نهاية عند س = ١ ؟



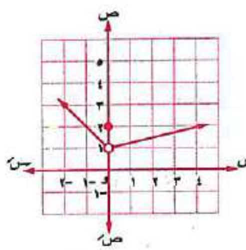
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان : د (س) = $\text{س}^{٢}$ − ٣ ، ر (س) = $\sqrt{\text{س − ٢}}$

أوجد (د ∘ ر) (س) فى أبسط صورة محددًا المجال ثم أوجد (د ∘ ر) (٣) (٤ درجات)

(٢) أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{٤س + ٥}} \text{ − ٣}}{\text{س − ١}}$ (٤ درجات)

اختبـــار ٢

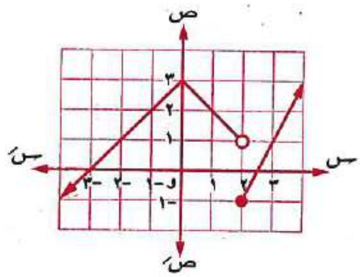
الدرجة ..... / ٢٠

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

(١) فى المثلث أ ب جـ يكون $\frac{\text{٤ ب}}{\text{جا ب}}$ = ... نق

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٨}$



(٢) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ...

(أ) ٣ (ب) ١

(جـ) ١- (د) غير موجودة.

(٣) الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = س^{٢} (ب) د (س) = ٢-

(جـ) د (س) = |س| (د) د (س) = $\frac{١}{س}$

(٤) إذا كانت د دالة زوجية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (-٣ ، ٢ م + ١)

وكانت د (٣) = ٥ ، فإن م = ...

(أ) صفر (ب) ١- (جـ) ١ (د) ٢

(٥) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٣}$ ....

(أ) ح (ب) ح - {٣} (جـ) [٣ ، ∞[(د)]-∞ ، ٣]

(٦) إذا كانت د (س) = $\sqrt{س}$ ، ر (س) = س^{٢} - ١

فإن : (د ○ ر) (-٣) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤- (جـ) ٢$\sqrt{٢}$ (د) غير معرفة.

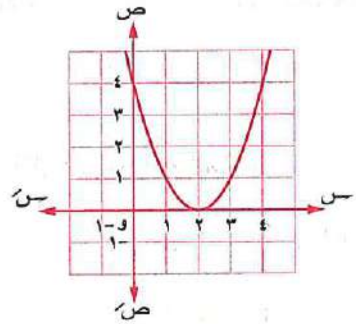
(٧) $\lim_{س \to ٧}$ $\frac{س^{٢} - ٤٩}{٧ - س}$ = ...

(أ) ١٤ (ب) ٤٩- (جـ) ٤٩ (د) ١٤-

(٨) نقطة تماثل الدالة د : د (س) = (س - ٢)^{٣} + ١ هى ....

(أ) (٢ ، ١) (ب) (٢ ، -١) (جـ) (-٢ ، ١) (د) (-١ ، -٢)

(٩) الشكل المقابل يمثل الدالة د : د (س) = ...



حيث د : ح ⟵ ح

(أ) $س^{٢} + ٢$

(ب) $(س + ٢)^{٢}$

(جـ) $س^{٢} - ٤ س + ٤$

(د) $-(س - ٢)^{٢}$

(١٠) إذا كان : $\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{س^{٢} - ل}{س - ٣} = م$ فإن : (ل ، م) = ...

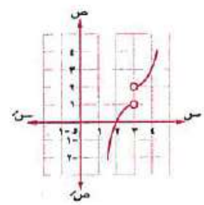
(أ) (٣ ، ٣) (ب) (-٩ ، ٠) (جـ) (٩ ، ٦) (د) (٠ ، ٠)

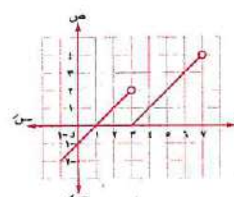
(١١) في Δ س ص ع إذا كان ق (∠ س) : ق (∠ ص) : ق (∠ ع) = ٢ : ٣ : ١

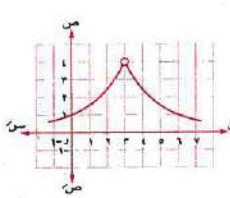
فإن : سَ : صَ : عَ = ...

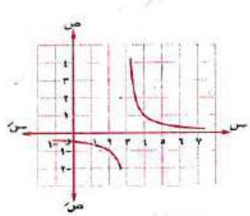
(أ) ٣ : $\sqrt{٢}$: ١ (ب) $\sqrt{٣}$: ٢ : ١ (جـ) $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$: ١ (د) ٢ : ٣ : ١

(١٢) أي من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية لها نهاية عند س = ٣ ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ ح ، د (س) = |س| + ١ ومن الرسم أوجد المدى وابحث الاطراد وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك. (٤ درجات)

(٢) **أوجد :** $\underset{س \to ٥}{نهـا} \frac{\sqrt{س + ١١} - ٤}{س^{٢} - ٢٥}$ (٤ درجات)

الدرجة

٢٠

اختبــار ١

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

(١) مجموعة الحل فى ح للمعادلة : |س − ٧| = ٢ س − ٢ تساوى ....

(أ) {٣ ، −٥}   (ب) {٣}   (جـ) {−٥}   (د) ∅

(٢) الدالة د حيث د (س) = أ^س تكون تناقصية على مجالها إذا كان ....

(أ) أ = ١   (ب) أ > ١   (جـ) ٠ < أ < ١   (د) أ = −١

(٣) نهــا (س ← ٠) ٥ س قتا ٢ س = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ١٠   (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) صفر

(٤) نهــا (س ← ∞) $\left(\sqrt{س^٢ + س} - س\right)$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر   (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) ليس لها وجود

(٥) إذا كانت : ٣^(س − ٢) = ٢^(س − ٢) فإن : س = ...

(أ) ٣   (ب) −٢   (جـ) صفر   (د) ٢

(٦) نهــا (س ← ∞) $\frac{\sqrt{٩ س^٢ + ٤} + ٥ س}{٤ س + ٣}$ = ...

(أ) ∞   (ب) ٥   (جـ) ٣   (د) ٢

(٧) إذا كانت : د (س) = ٢^س فإن قيمة س التى تحقق المعادلة :

د (س + ١) − د (س − ١) = ٢٤ تساوى ....

(أ) ١٦   (ب) ٤   (جـ) ٨   (د) ٢

(٨) نهــا (س ← ٠) $\frac{جا ٢ س + ٥ طا ٣ س}{س}$ = ...

(أ) ٢   (ب) ١٥   (جـ) ٢١   (د) ١٧

(٩) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم يساوى ....

(أ) ١٥٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

(١٠) مجموعة حل المتباينة : | ٢ س − ٦ | + | ٣ − س | > ١٢ هى ....

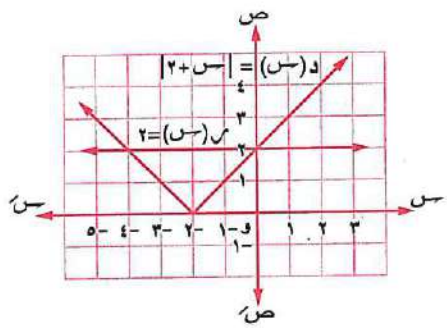
(أ)]−١ ، ٧[(ب) ح − [−٣ ، ٩]

(جـ) ح − [−١ ، ٧] (د)]−٣ ، ٩[

(١١) فى Δ س ص ع إذا كان : سَ = صَ فإن : جتا س = ...

(أ) $\frac{\text{٢ صَ}^{٢}}{\text{عَ}}$ (ب) $\frac{\text{عَ}}{\text{٢ صَ}}$ (جـ) $\frac{\text{عَ}}{\text{٤ سَ}}$ (د) $\frac{\text{صَ}}{\text{٢ سَ}}$

(١٢) فى الشكل المقابل :



مجموعة حل المتباينة د (س) < ر (س) فى ح هى ....

(أ) {−٤ ، ٠}

(ب) [−٤ ، ٠]

(جـ) ح − [−٤ ، ٠]

(د)]−٤ ، ٠[

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) أوجد : نهـا (س ← ٠) ظتا ٣ س جا ٥ س (٤ درجات)

(٢) أوجد جبريًا فى ح مجموعة حل المعادلة : | س − ٣ | = | ٩ − ٢ س | (٤ درجات)

اختبـــار ٢

الدرجة ٢٠

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

(١) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{جا ٣ س − جا ٢ س}}{\text{٥ س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

(٢) مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^٢ - ٤ س + ٤} > ٠$ فى ح هى ....

(أ) ح - {٢} (ب) ح - {-٢} (جـ) ح (د) ∅

(٣) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢ س + ٣}{٥ س^٢ + ٤} =$ ....

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

(٤) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س| - ٣}$ هو ....

(أ) {٣ ، -٣} (ب) [-٣ ، ٣]

(جـ) ح - [-٣ ، ٣] (د) ح - {-٣ ، ٣}

(٥) إذا كان : د (س) = $٢^{س}$ فإن : $\frac{د (س + ١) + د (س)}{د (س - ١)} =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٨

(٦) إذا كان : $(٢ س - ١)^٤ = ٨١$ فإن : س ∈ ....

(أ) {١} (ب) {١ ، -٢} (جـ) {٢} (د) {-١ ، ٢}

(٧) فى Δ س ص ع يكون : $سَ^٢ + صَ^٢ - ٢ سَ صَ$ حا (٩٠° - ع) = ...

(أ) $سَ^٢$ (ب) $صَ^٢$ (جـ) $عَ^٢$ (د) عَ

(٨) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢ س \text{ حتا } ٨ س + ٢ \text{ حا } ٥ س}{\text{ظا } ٢ س} =$ ....

(أ) ١٣ (ب) ١٠ (جـ) ٩ (د) ٦

(٩) إذا كان : د (س) = |س - ٢| + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة د (س + ٢) = ٦

هى ....

(أ) {٠ ، ٤} (ب) {٢ ، -٢} (جـ) {٢ ، ٤} (د) {-٢ ، -٤}

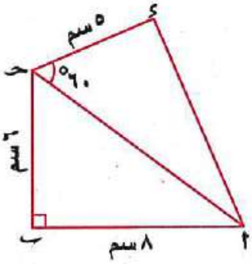
(١٠) مجموعة حل المعادلة : $٣^{س + ١} + ٣^{س} = ٣٦$ فى ح هى ....

(أ) {٠} (ب) {١} (جـ) {٢} (د) {٠ ، ٢}

(١١) $\lim\limits_{س \to \infty} \sqrt{\frac{٣ + ٢ س}{٤ س - ١}} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(١٢) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعي فيه :

أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٩٠°

، ء حـ = ٥ سم ، ق (∠ أ حـ ء) = ٦٠°

فإن مساحة الدائرة المارة

برؤوس Δ أ ء حـ = ... سم²

(أ) ٩ π (ب) ١٦ π (جـ) ٢٥ π (د) ٤٩ π

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

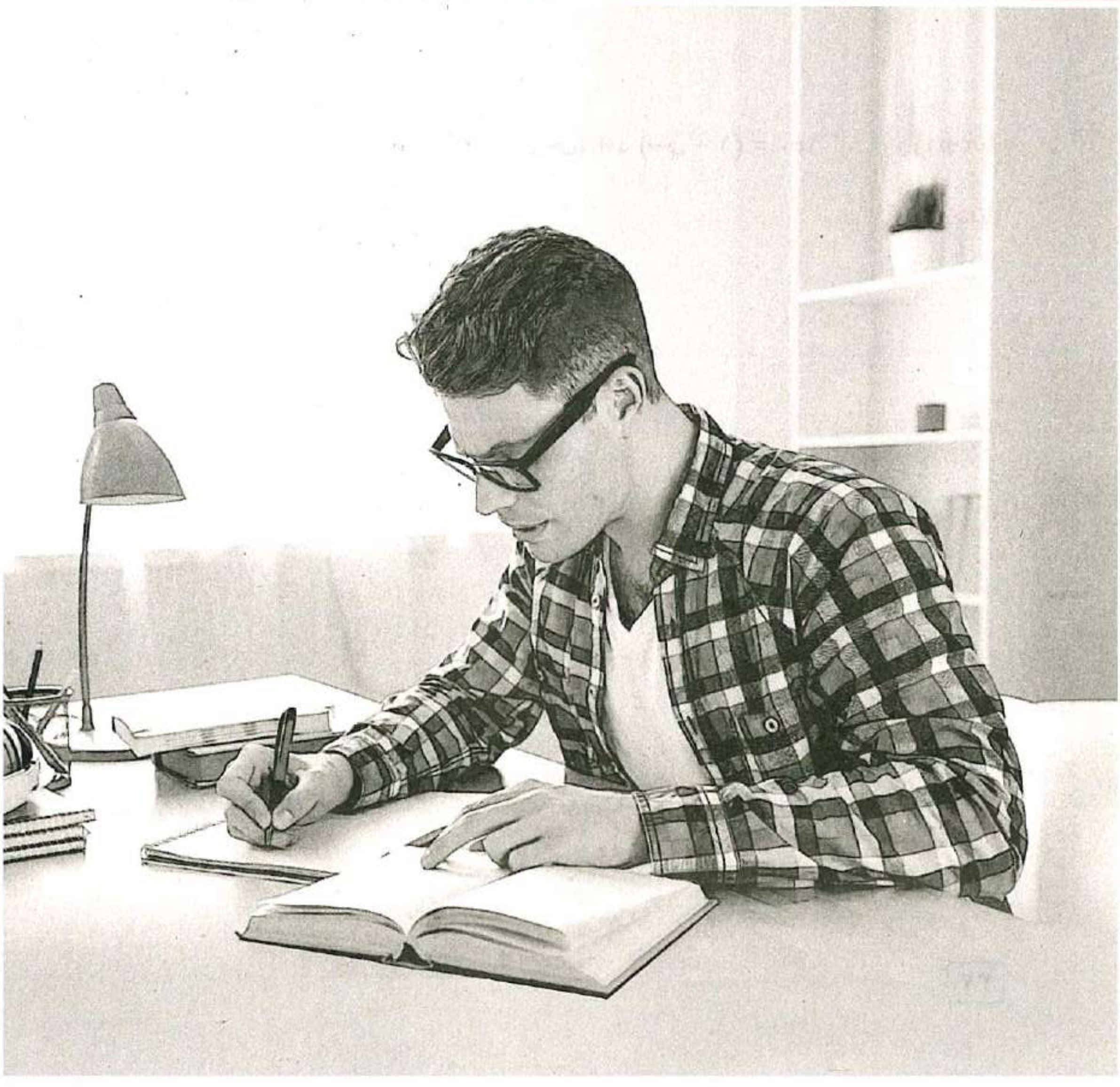
(١) إذا كان : د (س) = ٥^س

فأوجد في ح مجموعة حل المعادلة : د (س) + د (س − ١) = ١٥٠ (٤ درجات)

(٢) أوجد : نهـا س ← ٠ $\frac{\text{جا س}}{\sqrt{\text{س} + 1} - 1}$ (٤ درجات)

الأسئلة الهامة

من امتحانات
الإدارات التعليمية



أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

١ كل العلاقات الآتية لا تمثل دالة ما عدا .... (أبو حماد - الشرقية)

(أ) س = ص^٢ + ١

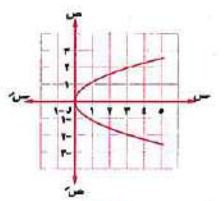
(ب) ص = س^٢ − ١

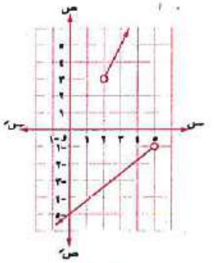
(جـ) س^٢ + س ص + ص^٢ = ٣

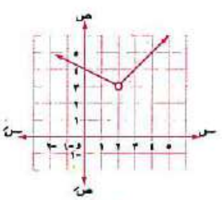
(د) {(١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (−١ ، ٤)}

---

٢ الشكل الذى يمثل دالة فى س من بين الأشكال الآتية هو .... (قلين - كفر الشيخ)


(أ)

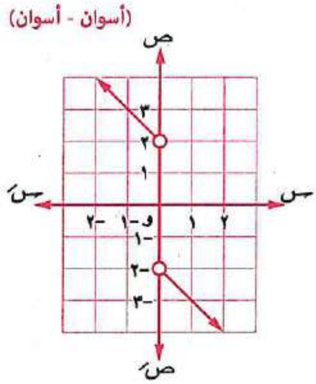

(ب)


(جـ)


(د)

---

٣ الشكل المقابل يمثل دالة فى س مجالها .... (أسوان - أسوان)



(أ) ح

(ب) ح −]−٢ ، ٢[

(جـ) ح − [−٢ ، ٢]

(د) ح − {٠}

---

٤ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س}{\sqrt[3]{س - ٢}}$ هو .... (أبشواى - الفيوم)

(أ) {٨} (ب) ح − {٨} (جـ) ح^+ − {٨} (د) ح − {٢}

٥ مجال الدالة د $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\sqrt{1 - \text{س}}}$ هو .... (قليوب - القليوبية)

(أ) ح (ب) ح $- \{1\}$ (جـ) $]-\infty , 1]$ (د) $]-\infty , 1[$

---

٦ مجال الدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \frac{5}{\sqrt{\text{س} + 1} - 2}$ هو .... (أوسيم - الجيزة)

(أ) $[-1 , \infty[- \{3\}$ (ب) $[-1 , \infty[- \{5\}$

(جـ) $]-1 , \infty[- \{3\}$ (د) $[-1 , \infty[$

---

٧ مجال الدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \frac{\sqrt{\text{س} + 1}}{2 - \text{س}}$ هو .... (الأقصر - الأقصر)

(أ) $]-1 , \infty[$ (ب) $]-\infty , -1[$

(جـ) $[-1 , \infty[- \{2\}$ (د) $]-\infty , -1[- \{2\}$

---

٨ مجال الدالة د $\text{د}(\text{س}) = \frac{3\text{س}}{\sqrt[3]{\text{س} - 8}}$ هو .... (العمرانية - الجيزة)

(أ) ح (ب) ح $- \{8\}$ (جـ) ح $- \{2\}$ (د) $]8 , \infty[$

---

٩ مجال الدالة : $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{|\text{س}| + \text{ك}}$ هو ح $- \{5 , -5\}$

فإن : ك = ... (غرب المحلة - الغربية)

(أ) ٥ (ب) ‎-٥ (جـ) ± ٥ (د) صفر

---

١٠ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - 1}$ ، $\text{ر}(\text{س}) = \sqrt{1 - \text{س}}$

فإن : مجال (د + ر) هو .... (بلطيم - كفر الشيخ)

(أ) $[1 , \infty[$ (ب) $]-\infty , 1]$ (جـ) $[-1 , \infty[$ (د) $\{1\}$

---

١١ مجال $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\frac{\text{س} - 5}{\text{س} - 3}}$ هو .... (برج العرب - الإسكندرية)

(أ) ح $- \{3\}$ (ب) ح $- [3 , 5[$ (جـ) ح $-]3 , 5]$ (د) $[5 , \infty[$

---

١٢ مجال الدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{4 - \text{س}^2}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح $- [-2 , 2]$ (جـ) $[-2 , 2]$ (د) $]-2 , 2[$

١٣ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{\sqrt{٩ - س^٢}}$ هو .... (المحمودية - البحيرة)

(أ) ح (ب) ح - [-٣ ، ٣] (جـ) ح - {-٣ ، ٣} (د)]-٣ ، ٣[

---

١٤ مجال الدالة د (س) = $\sqrt{س^٢ - ٦ س + ٩}$ هو .... (أبو قرقاص - المنيا)

(أ) ح (ب) ح - {٣} (جـ) ح - {-٣} (د) ح - [-٣ ، ٣]

---

١٥ مدى الدالة د (س) = -٣ هو .... (مصر القديمة - القاهرة)

(أ) ح (ب) ح َ (جـ) {-٣} (د) ح - {-٣}

---

١٦ مجال الدالة د : د (س) $\sqrt[٤]{س - ٣}$ هو .... (سوهاج - سوهاج)

(أ) [٣ ، ∞[(ب)]٣ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ٣] (د) ح

---

١٧ مجال الدالة د (س) = $\sqrt{٢ - س}$ هو .... (التل الكبير - الاسماعيلية)

(أ) [٢ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٢] (جـ)]٢ ، ∞[(د)]-∞ ، ٢[

---

١٨ مجال الدالة $\frac{س - ٢}{\sqrt{س - ٤} + ١}$ هو .... (سرس الليان - المنوفية)

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]٤ ، ∞[

(جـ) [٤ ، ∞[- {٥} (د) ح

---

١٩ مدى الدالة د : [-٢ ، ٣] ⟵ ح ، د (س) = $س^٢$ هو .... (بندر دمنهور - البحيرة)

(أ) [٤ ، ٩] (ب) $ح^+$ (جـ) [٠ ، ٩] (د) [٠ ، ٤]

---

٢٠ مدى الدالة د (س) = $\frac{س^٢ - س - ٦}{س - ٣}$ هو .... (سرس الليان - المنوفية)

(أ) ح (ب) ح - {٥} (جـ) ح - {٣} (د) ح - {٢}

---

٢١ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٢ س + ٣ & ، س \le ٤ \\ س^٢ - ٤ س & ، ٤ < س \le ٧ \end{cases}$

فإن : د (٢) + د (٥) = ... (مغاغة - المنيا)

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ٢٥

٢٢ إذا كانت : د (س) = س^٢ ، ر (س) = √(س + ١)

فإن : [د + ر] (٣) = ... (التل الكبير - الاسماعيلية)

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ٩ (د) ٤

---

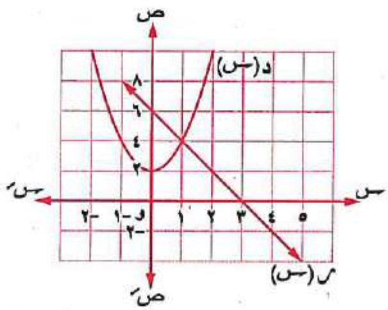
٢٣ إذا كانت : د (١) = ٥ ، ر (٥) = ٦

فإن : (ر ० د) (١) = ... (التل الكبير - الاسماعيلية)

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ١١

---

٢٤ الشكل المقابل يبين منحنى الدالتين د ، ر



فإن : (ر ० د) (١) = ... (غرب طنطا - الغربية)

(أ) ٦

(ب) ٥

(جـ) -٢

(د) ٤

---

٢٥ إذا كان : د (س) = س^٢ ، ر (س) = ٣ س

فإن : د (د ० ر) (س) = ... عندما س = ١ (الخارجة - الوادى الجديد)

(أ) ٩ (ب) ٦ (جـ) ٣ (د) ٢٧

---

٢٦ إذا كانت : د (س) = س^٣ ، ر (س) = س + ١

فإن : (ر ० د) (١) = ... (السويس - السويس)

(أ) ٨ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ٤

---

٢٧ إذا كان د : ح ← ح ، د (س) = ٣ س + ١ ، ر (س) = { ٢ س + ١ ، س > ٢ ؛ ٣ س ، س < ٢ }

فإن : (د ० ر) (٣) = ... (أوسيم - الجيزة)

(أ) ٢١ (ب) ٢٢ (جـ) ٢٨ (د) ٣٠

٢٨ إذا كانت : د (س) = س − ١ ، ر (س) = ١ − س

فإن : (د ∘ ر) (−١) = …………… (بنى سويف - بنى سويف)

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ١٣ (د) −١٣

---

٢٩ إذا كان : د (س) = $\sqrt{س + ٥}$ ، ر (س) = س^{٢}

فإن : (د ∘ ر) (٢) = …………… (أسوان - أسوان)

(أ) ٧ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٩

---

٣٠ إذا كان : د (س) = س^{٢} + ٢ فإن : (د ∘ د) (١) = …………… (سوهاج - سوهاج)

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ١١ (د) ٧

---

٣١ إذا كان : د (س) = $\sqrt{س + ١}$ ، ر (س) = س^{٢} + ٢

فإن : (ر ∘ د) (٣) = …………… (أبشواى - الفيوم)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٦

---

٣٢ إذا كان : د (س) = جا (π − س) ، هـ (س) = $\frac{٣\pi}{٢}$ + س

فإن : (د ∘ هـ) (س) = …………… (مغاغة - المنيا)

(أ) جا س (ب) جتا س (جـ) − جا س (د) − جتا س

---

٣٣ د (س) = $\sqrt[٣]{س}$ ، ر (س) = س^{٣}

فإن : (د ∘ ر) (س) = …………… (غرب المحلة - الغربية)

(أ) س^{٣} (ب) |س| (جـ) $\sqrt[٣]{س}$ (د) س

---

٣٤ إذا كانت : د ، ر دالتين حيث د (س) = ٣ س + ١ ، ر (س) = س^{٢} + أ

وكان : (د ∘ ر) (٢) = −٢ فإن : أ = …………… (شرق المنصورة - الدقهلية)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) −٥

---

٣٥ إذا كان : د (س) = ٣ س + ٢ ، ر (س) = ٢ س + ك

وكان : (د ∘ ر) (س) = (ر ∘ د) (س) فإن : ك = …………… (عين شمس - القاهرة)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٣٦ إذا كانت : (د ∘ ر) (س) = س وكان : ر (٥) = ٧

فإن : د (٧) = ... (العمرانية - الجيزة)

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٣٥

---

٣٧ إذا كانت د : $ح^+$ ⟵ ح ، د(س) = $س^٢$

فإن نوع الدالة .... (سرس الليان - المنوفية)

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) ليست زوجية ولا فردية. (د) ليست أحادية.

---

٣٨ إذا كانت : د (س) = $س^٣$ ظاس فإنها تكون .... (التل الكبير - الاسماعيلية)

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) أحادية. (د) ليست فردية وليست زوجية.

---

٣٩ الدالة د : د (س) = س جتاس تكون .... (أسوان - أسوان)

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) ليست زوجية ولا فردية. (د) أحادية.

---

٤٠ إذا كانت د دالة حيث د :]-٦ ، ٦[⟵ ح ، د (س) = $س^٢$

فإن الدالة د (س) تكون .... (القنطرة غرب - الإسماعيلية)

(أ) زوجية. (ب) فردية. (جـ) أحادية. (د) غير ذلك.

---

٤١ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

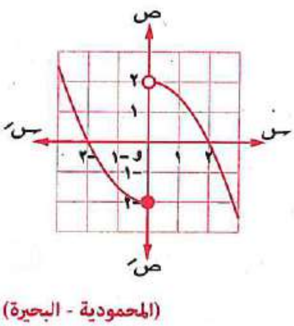
فإن د تكون ....

(أ) أحادية.

(ب) زوجية.

(جـ) فردية.

(د) ليست زوجية ولا فردية.



(المحمودية - البحيرة)

٤٢ من بين الدوال الآتية الدالة الزوجية هى د (س) = ... (الخارجة - الوادى الجديد)

(أ) حا س (ب) س حتا س (جـ) س حا ٣٠° (د) حتا ٦٠°

---

٤٣ الدالة الفردية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى .... (البنجر - مطروح)

(أ) د (س) = س طا س (ب) د (س) = حتا س

(جـ) د (س) = ٧ (د) د (س) = $س^٢$ حا س

---

٤٤ إذا كانت : د (س) دالة زوجية فإن : د (أ) + د (– أ) = ... (مصر القديمة - القاهرة)

(أ) صفر (ب) د (أ) (جـ) ٢ د (أ) (د) د (٢ أ)

---

٤٥ إذا كانت : د (س) دالة فردية فإن : $\frac{د (أ)}{د (-أ)}$ = ... (المعادى - القاهرة)

(أ) ١ (ب) –١ (جـ) د (أ) (د) د (– أ)

---

٤٦ إذا كانت الدالة د زوجية فى الفترة [أ ، ب]

فإن : ب = ... (أسوان - أسوان)

(أ) أ (ب) – أ (جـ) ٢ أ (د) $أ^٣$

---

٤٧ إذا كانت : د (س) زوجية فى الفترة [أ ، ب] ، ب > ٢

فإن : د (أ + ٢) = ... (أبو قرقاص - المنيا)

(أ) د (ب + ٢) (ب) د (ب – ٢) (جـ) – د (أ) (د) (ب + ٤)

---

٤٨ إذا كانت د دالة زوجية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (–٣ ، ٢ م + ١)

، وكانت : د (٣) = ٥ فإن : م = ... (بندر دمنهور - البحيرة)

(أ) –١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

---

٤٩ إذا كانت د دالة فردية وكانت : س × د (– س) + $س^٣$ × د (س) = ٨

فإن : د (٣) = ... (غرب طنطا - الغربية)

(أ) $\frac{-١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٣ (د) –٣

٥٠ إذا كانت د دالة زوجية وكان : ٦ د (س) + ٤ د (− س) = ٤٠

فإن : د (٣) = ... (القوصية - أسيوط)

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) −٣ (د) ٢٠

---

٥١ إذا كان د دالة فردية فإن : $\frac{٢ \text{ د } (س) + ٨ \text{ د } (-س)}{٣ \text{ د } (س)}$ = ... (العامرية - الإسكندرية)

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) −٤ (د) ٤

---

٥٢ إذا كانت د دالة فردية د (٢) = حـ ، د (−٢) = حـ − ٨

فإن : حـ = ... (القنطرة غرب - الإسماعيلية)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

---

٥٣ إذا كانت د دالة فردية ، د (١) = ٢ ، النقطة (−١ ، ٣ م + ٧) تقع على المنحنى د

فإن : م = ... (الأقصر - الأقصر)

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) $-\frac{٥}{٣}$

---

٥٤ الدالة الأحادية من الدوال الآتية هى د (س) = ... (أبشواى - الفيوم)

(أ) ١ − $س^٢$ (ب) | س − ٢ | (جـ) | $س^٣$ | (د) $٢^س$

---

٥٥ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى .... (أهناسيا - بنى سويف)

(أ) د (س) = $(س + ٢)^٢$ (ب) د (س) = −٦

(جـ) د (س) = س + ٣ (د) د (س) = | ١ − س |

---

٥٦ جميع الدوال الآتية أحادية على مجالها ما عدا .... (شرق المنصورة - الدقهلية)

(أ) د (س) = ٤ س (ب) ر (س) = $\frac{٢}{س}$

(جـ) ع (س) = ٣ (د) هـ (س) = $س^٣$

---

٥٧ إذا كانت الدالة فى تناقص مستمر لجميع قيم س ∈ مجال الدالة

فإن الدالة تكون .... (أدفو - أسوان)

(أ) زوجية. (ب) فردية. (جـ) أحادية. (د) ليست أحادية.

٥٨ د (س) = س^٢ ، س < ٠ وهى دالة .... (غرب المحلة - الغربية)

(أ) زوجية. (ب) فردية. (جـ) أحادية. (د) غير ذلك.

---

٥٩ إذا كانت د دالة أحادية وكان : د (ك^٢ + ٤) = د (٤ ك)

فإن : ك = ... (طامية - الفيوم)

(أ) −٢ (ب) ٢ (جـ) −٤ (د) ٤

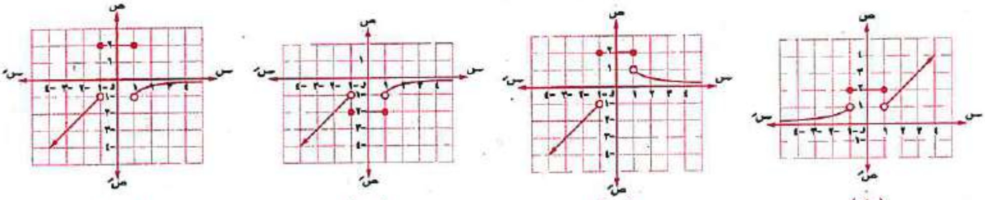
---

٦٠ الدالة د : د (س) = { ٢ ، س > ٠ ؛ −٢ ، س < ٠ } متماثلة حول النقطة .... (السويس - السويس)

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (−٢ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٢ ، −٢)

---

٦١ منحنى الدالة د : د (س) = { س ، س < −١ ؛ ٢ ، −١ ≤ س ≤ ١ ؛ ١/س ، س > ١ } هو .... (عين شمس - القاهرة)



(أ) (ب) (جـ) (د)

---

٦٢ إحداثيى نقطة رأس المنحنى د : د (س) = (س − ٣)^٢ هو .... (البنجر - مطروح)

(أ) (٠ ، −٣) (ب) (−٣ ، ٠) (جـ) (٣ ، ٠) (د) (٣ ، ٣)

---

٦٣ نقطة تماثل منحنى الدالة د (س) = س^٣ − ٢ هى .... (مغاغة - المنيا)

(أ) (٠ ، −٢) (ب) (−٢ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (٠ ، ٢)

---

٦٤ نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = (٢ − س)^٢ + ٣ هى .... (أسوان - أسوان)

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، −٣) (جـ) (−٢ ، ٣) (د) (−٢ ، −٣)

---

٦٥ إذا كانت د : د (س) = س^٣ فإن نقطة تماثل الدالة ر : ر (س) = د (س) + ٣

هى .... (القوصية - أسيوط)

(أ) (٣ ، ٠) (ب) (٠ ، ٣) (جـ) (−٣ ، ٠) (د) (٠ ، −٣)

٦٦ نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٥ هى .... (نجع حمادى - قنا)

(أ) (-٢ ، ٥) (ب) (٢ ، ٥) (جـ) (٢ ، -٥) (د) (-٢ ، -٥)

---

٦٧ معادلة محور التماثل لمنحنى الدالة د (س) = (٣ - س)^{٢} + ٢

هى .... (قويسنا - المنوفية)

(أ) س = -٣ (ب) س = ٢ (جـ) س = ٣ (د) ص = ٣

---

٦٨ محور تماثل د : د (س) = | س - ٣ | + ٢ هو المستقيم الذى معادلته

هى .... (الأقصر - الأقصر)

(أ) س = ٣ (ب) س = ٢ (جـ) س = -٣ (د) ص = ٣

---

٦٩ نقطة رأس المنحنى للدالة د (س) = س^{٢} + ٢ س + ١ هى .... (سوهاج - سوهاج)

(أ) (١ ، صفر) (ب) (-١ ، صفر) (جـ) (صفر ، -١) (د) (صفر ، ١)

---

٧٠ نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{٢ س + ١}{س - ١}$ هى .... (أبشواى - الفيوم)

(أ) (٢ ، صفر) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (صفر ، ١) (د) (١ ، ٢)

---

٧١ المنحنى ر (س) = س^{٢} + ٤ هو نفس المنحنى د (س) = س^{٢} بإزاحة قدرها ٤ وحدات

فى اتجاه .... (الخارجة - الوادى الجديد)

(أ) و س← (ب) و س′← (جـ) و ص← (د) و ص′←

---

٧٢ منحنى الدالة ر (س) = (س -٣)^{٢} هو نفس منحنى الدالة د (س) = س^{٢} بإزاحة

قدرها ٣ وحدات فى اتجاه .... (أهناسيا - بنى سويف)

(أ) و س← (ب) و س′← (جـ) و ص← (د) و ص′←

---

٧٣ منحنى ر (س) = | س + ٣ | هو نفس منحنى د (س) = | س | بإزاحة مقدارها ٣

وحدات فى اتجاه .... (بندر دمنهور - البحيرة)

(أ) و س← (ب) و س′← (جـ) و ص← (د) و ص′←

٧٤ نفرض أن د (س) = $س^٣$ ينتقل ٣ وحدات لليمين ووحدتين لأسفل وكان المنحنى الناتج هو ر (س) فإن : ر (−١) = ... **(أوسيم - الجيزة)**

(أ) −٦٤ (ب) ٦ (جـ) −١ (د) −٦٦

---

٧٥ إذا كان : د (س) = $\frac{أ}{س + ب}$ + حـ حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية نقطة تماثلها (٤ ، ٤) فإن : $أ^{ب+حـ}$ = ... **(أوسيم - الجيزة)**

(أ) $أ^{١٦}$ (ب) $أ^{٨}$ (جـ) ١ (د) صفر

---

٧٦ الدالة د (س) = $(س - ٢)^٢$ + ١ تزايدية فى الفترة .... **(أوسيم - الجيزة)**

(أ)]٢ ، ∞[(ب)]−١ ، ∞[(جـ)]١ ، ∞[(د)]−∞ ، ٢[

---

٧٧ فترة تناقص الدالة د (س) = ١ − $(س + ٣)^٢$ هى .... **(سرس الليان - المنوفية)**

(أ)]−∞ ، −٣[(ب)]−٣ ، ∞[(جـ)]−١ ، ∞[(د)]−∞ ، −١[

---

٧٨ الدالة د : د (س) = |س − ٢| + ٣ تزايدية فى .... **(التل الكبير - الإسماعيلية)**

(أ)]٣ ، ∞[(ب)]٢ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٣[(د)]−∞ ، ٢[

---

٧٩ الدالة د : د (س) = $\frac{٢س - ١}{س + ١}$ تزايدية فى الفترة .... **(الأقصر - الأقصر)**

(أ)]−∞ ، ١[(ب)]−١ ، ∞[

(جـ)]−١ ، ∞[،]−∞ ، −١[(د) ح − {−١}

---

٨٠ المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د (س) = |س − ٣| − ٤ ومحور السينات = ... وحدة مساحة. **(غرب طنطا - الغربية)**

(أ) ٨ (ب) ٧ (جـ) ١٤ (د) ١٦

---

٨١ مدى الدالة د (س) = ٢ − $س^٢$ ، س ≠ ٠ هو .... **(غرب المحلة - الغربية)**

(أ)]−∞ ، ٢[(ب)]٢ ، ∞[(جـ)]صفر ، ٢] (د) [صفر ، ٢]

---

٨٢ مدى الدالة د : د (س) = |٤ − س| هو .... **(بنى سويف - بنى سويف)**

(أ) $ح^+$ (ب) ح (جـ) [٠ ، ∞[(د)]−∞ ، ٠]

٨٣ مدى الدالة د : د (س) = ٤ − (س − ١)^٢ هو .... (القوصية - أسيوط)

(أ) [١ ، ∞−[(ب)]∞ ، ١] (جـ)]∞ ، ٤] (د) [٤ ، ∞−[

---

٨٤ مدى الدالة د (س) = $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢}$ هو .... (القنطرة غرب - الإسماعيلية)

(أ) ح (ب) ح − {٢} (جـ) ح − {١} (د) ح^+

---

٨٥ مدى الدالة د (س) = $\frac{٥\text{س} - ١}{\text{س} - ١}$ هو .... (شرق المنصورة - الدقهلية)

(أ) ح − {١} (ب) ح (جـ) ح − {١ ، ٥} (د) ح − {٥}

---

٨٦ مدى الدالة د (س) = $\frac{٢ |\text{س}|}{\text{س}}$ هو .... (أبو حماد - الشرقية)

(أ) {٢ ، −٢} (ب) {−٢} (جـ) [−٢ ، ٢] (د) ح − {٠}

---

٨٧ إذا كانت د دالة مجالها هو ح − {١} ، مداها = ح − {٣}

حيث د (س) = $\frac{\text{أس} + ٣}{\text{س} - \text{ب}}$ فإن : د (٣) = ... (دمياط - دمياط)

(أ) −٣ (ب) ٦ (جـ) ١ (د) غير معرفة.

---

٨٨ مجموعة حل المعادلة : |س − ٣| = ٥ في ح هي .... (السويس - السويس)

(أ) {٣ ، ٥} (ب) {−٢ ، ٨} (جـ) [−٢ ، ٨] (د) {−٨ ، ٨}

---

٨٩ إذا كان : د (س) = |س − ٢| − ٣ فإن مجموعة الحل للمعادلة : د (س) = ٠

هي .... (بورسعيد - بورسعيد)

(أ) {−١ ، ٥} (ب) {١ ، ٥} (جـ) {٠ ، ٥} (د) {١ ، ٠}

---

٩٠ مجموعة حل المعادلة : |س − ٢| + ٣ = صفر في ح هي .... (قويسنا - المنوفية)

(أ) −٣ (ب) ٥ (جـ) −٥ (د) ∅

---

٩١ إذا كان : د (س) = |س − ٣| + ١ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س + ٣) = ٤

في ح هي .... (أوسيم - الجيزة)

(أ) {٣ ، −٣} (ب) {٠ ، ٣} (جـ) {٠ ، −٣} (د) {٣}

٩٢ إذا كان : د (س) = س |س + ٢| + ٣ ، د (م − ١) = ٦

فإن : م = ... (مغاغة - المنيا)

(أ) −٢ (ب) ٢ (جـ) √٢ (د) −√٢

---

٩٣ حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^٢$ − ٣ |س| − ١٠ = ٠

يساوى .... (طامية - الفيوم)

(أ) −٢٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٥ (د) −١٠

---

٩٤ مجموعة حل المعادلة : √(٤$س^٢$ − ١٢س + ٩) = ٧ فى ح هى .... (البنجر - مطروح)

(أ) {٥} (ب) {−٢} (جـ) {−٢ ، ٥} (د) ح

---

٩٥ مجموعة حل المعادلة : س |س| + ٩ = صفر فى ح هى .... (الأقصر - الأقصر)

(أ) {٣ ، −٣} (ب) {−٣} (جـ) {٣} (د) ∅

---

٩٦ مجموعة حل المعادلة : |س| = −س فى ح هى .... (دمياط - مياط)

(أ) ∅ (ب) ح

(جـ) ح_ (د)]−∞ ، صفر]

---

٩٧ مجموعة حل المعادلة : |س − ١| = س − ١ فى ح هى .... (العمرانية - الجيزة)

(أ) ح (ب) ح − {١} (جـ) [١ ، ∞[(د)]−∞ ، ١]

---

٩٨ مجموعة حل المعادلة : |س − ٣| = ٢س + ٩ فى ح هو .... (برج العرب - الإسكندرية)

(أ) {−١١} (ب) {−٢} (جـ) {−٢ ، −١١} (د) ∅

---

٩٩ مجموعة حل المتباينة : |س| − ٢ > صفر فى ح هى .... (العمرانية - الجيزة)

(أ) ح − [−٢ ، ٢] (ب)]−٢ ، ٢[(جـ) ح −]−٢ ، ٢[(د) [−٢ ، ٢]

---

١٠٠ مجموعة حل المتباينة : |س − ٢| > ٣ فى ح هى .... (التل الكبير - الإسماعيلية)

(أ) ح − [−١ ، ٥] (ب) ح −]−١ ، ٥[(جـ) [−١ ، ٥] (د)]−١ ، ٥[

١٠١ مجموعة حل المتباينة : | ٢ − س | ≥ ٤ فى ح هى .... (غرب طنطا - الغربية)

(أ) ح − [−٢ ، ٦] (ب) ح −]−٢ ، ٦[(جـ)]−٢ ، ٦[(د) [−٢ ، ٦]

---

١٠٢ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{\text{س}^{2} - 2\text{س} + 1}$ ≤ ٤ فى ح هو .... (بلطيم - كفر الشيخ)

(أ) [−٣ ، ٥] (ب) ح −]−٣ ، ٥[(جـ)]−٣ ، ٥[(د) ح − [−٣ ، ٥]

---

١٠٣ مجموعة حل المتباينة : ٢ $\sqrt{\text{س}^{2} - 6\text{س} + 9}$ − | ٣ − س | + ٥ > ٥ فى ح

هى .... (سوهاج - سوهاج)

(أ) ∅ (ب) ح (جـ) {٣} (د) ح − {٣}

---

١٠٤ مجموعة حل المتباينة : $\frac{1}{|\text{س} - 2|} \geq \frac{1}{2}$ فى ح هى .... (عين شمس - القاهرة)

(أ)]٠ ، ٤[− {٢} (ب) [٠ ، ٤] − {٢}

(جـ) [٠ ، ٤] (د)]٠ ، ٤[

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت : $د_1$ (س) = س^{5} ، $د_2$ (س) = جا ٣ س أوجد : ($د_1$ + $د_2$) (س)

ثم ابحث : نوع ($د_1$ + $د_2$) من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك. (المراغة - سوهاج)

---

٢ ابحث نوع الدالة المعرفة بالقاعدة الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

د (س) = ٣ س − ٤ س^{3} (التل الكبير - الإسماعيلية)

---

٣ أوجد جبريًا مجموعة حل المعادلة فى ح : $\sqrt{4\text{س}^{2} - 12\text{س} + 9}$ = ٥ (بندر دمنهور - البحيرة)

---

٤ أوجد مجموعة حل فى ح المتباينة :

| س − ٢ | + | ١٢ − ٦ س | ≥ ١٤ (أبو قرقاص - المنيا)

---

٥ أوجد مجموعة حل المعادلة التالية فى ح :

$\sqrt{4\text{س}^{2} - 4\text{س} + 1}$ − ٣ س = ١١ (سرس الليان - منوفية)

٦ ارسم الشكل البيانى للدالة د $د(س) = (س - ١)^{٢}$ ومن الرسم أوجد مدى الدالة وابحث اضطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك. **(بورسعيد - بورسعيد)**

---

٧ ارسم الشكل البيانى للدالة د : $د(س) = (س - ٢)^{٢} + ٣$ ومن الرسم حدد مجال الدالة ، ومداها ، وابحث اطراد الدالة وحدد نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك ، ثم وضح هل د (س) أحادية أم لا ؟ **(نجع حمادى - قنا)**

---

٨ ارسم الشكل البيانى للدالة د : $د(س) = س^{٢} - ٤ س + ٣$ ومن الرسم عين المجال والمدى وابحث الاطراد. **(طامية - الفيوم)**

---

٩ ارسم منحنى الدالة د : $د(س) = \sqrt{س^{٢} - ٤ س + ٤}$ ومن الرسم أوجد مدى الدالة وابحث اطرادها. **(بلطيم - كفر الشيخ)**

---

١٠ ارسم الشكل البيانى للدالة د $د(س) = |س^{٢} - ٢ س - ٣|$ ومن الرسم أوجد مدى الدالة وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك. **(ميت غمر - الدقهلية)**

---

١١ ارسم الشكل البيانى للدالة د : $د(س) = س^{٢} + ١$ ومن الرسم أوجد مدى الدالة ، ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك ، ثم ابحث اطراد الدالة. **(السويس - السويس)**

---

١٢ استخدم منحنى الدالة د : $د(س) = |س|$ لتمثيل الدالة $ر(س) = ٤ - |س - ٢|$ ومن الرسم عين مدى الدالة وابحث الاطراد. **(أدفو - أسوان)**

---

١٣ ارسم منحنى الدالة : $د(س) = (٢ - س)^{٣} + ٣$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك. **(العامرية - الإسكندرية)**

---

١٤ ارسم الشكل البيانى للدالة د $د(س) = |س^{٣}|$ ومن الرسم أوجد : (المجال - المدى - الاطراد - نوع الدالة زوجية أم فردية). **(أبو حماد - الشرقية)**

---

١٥ ارسم $د(س) = \frac{١}{|س|} + ٢$ ثم أوجد : الاطراد - المدى. **(غرب المحلة - الغربية)**

---

١٦ مثل بيانيًا الدالة د : $د(س) = \frac{٣ س - ٥}{س - ٢}$ ومن الرسم أوجد المجال والمدى. **(قلين - كفر الشيخ)**

١٧ باستخدام منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ ارسم الشكل البيانى للدالة ر : ر (س) = $\frac{س}{س - ١}$ ومن الرسم عين مداها وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك. **(الأقصر - الأقصر)**

---

١٨ ارسم منحنى الدالة د (س) = ٢ − (٣س + ١)^{٢} ومن الرسم عين مدى الدالة وابحث اطرادها. **(أوسيم - الجيزة)**

---

١٩ مثل بيانيًا الدالة د ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطراد الدالة

د (س) = { س|س| + ١ ، س < ٠
         { ١ ، س > ٠

(القوصية - أسيوط)

---

٢٠ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = { −|س| ، س ≥ ٠ ؛ س^{٣} ، س < ٠ } ومن الرسم أوجد مدى الدالة وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

(شرق المنصورة - الدقهلية)

---

٢١ مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = { |س| ، س ≤ ٠ ؛ س^{٢} ، س > ٠ } ومن الرسم استنتج مدى الدالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك. **(غرب طنطا - الغربية)**

---

٢٢ مثل بيانيًا الدالة د (س) حيث د (س) = { |س| ، س ≤ ٠ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س > ٠ } ومن الرسم عين مجال ومدى الدالة. **(أهناسيا - بنى سويف)**

---

٢٣ مثل بيانيًا الدالة ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د (س) = { |س − ٣| + ١ ، س ≤ ٤ ؛ $\frac{١}{س - ٤}$ + ٣ ، س > ٤ }

(عين شمس - القاهرة)

أسئلة الاختيار من متعدد

١ إذا كان : $٢^{س - ١} = ٧^{س - ١}$ فإن : $٦^{س - ١}$ = ... (مصر القديمة - القاهرة)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٧ (د) ٦

---

٢ إذا كان : $٧^{س + ١} = ٣^{٢س + ٢}$ فإن : س = ... (بورسعيد - بورسعيد)

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٤

---

٣ إذا كانت : ه < صفر فإن : $\sqrt{ه^{٢}}$ = ... (دمياط - دمياط)

(أ) صفر (ب) ه (جـ) ± ه (د) − ه

---

٤ إذا كان : $٢^{س} = ٥$ فإن : $٢^{س - ٢}$ = ... (الإسماعيلية - الإسماعيلية)

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٨}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

---

٥ إذا كان : $\sqrt[٣]{س^{٢}} = ٤$ فإن : س = ... (الإسماعيلية - الإسماعيلية)

(أ) ± ٤ (ب) ± ٨ (جـ) ± ١٦ (د) ± ٣٢

---

٦ إذا كان : $٣^{س} = ٢$ فإن : $٩^{س} + ١$ = ... (بنى سويف - بنى سويف)

(أ) ٥ (ب) ٣٦ (جـ) ١٢ (د) ٢٧

---

٧ إذا كان : $س^{س - ٥} = ٣^{س - ٥}$ فإن : س ∈ .... (دمياط - دمياط)

(أ) {٣ ، ٥} (ب) {−٣ ، ٥} (جـ) {٣ ، ٥ ، −٣} (د) {٥}

---

٨ مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{٤}{٣}} = ١٦$ فى ح هى .... (القوصية - أسيوط)

(أ) {٨ ، −٨} (ب) {٨} (جـ) {−٨} (د) {٤ ، −٤}

---

٩ مجموعة حل المعادلة : $(٢س - ٢٥)^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$ فى ح هى .... (ميت غمر - الدقهلية)

(أ) {−١} (ب) {٢٦} (جـ) {−١ ، ٢٦} (د) ∅

١٠ إذا كان : $(\frac{١}{٢})^{ا^{٢} - ا - ٢} = ١$ حيث ا > ٠ فإن : ا = …………… (قلين - كفر الشيخ)

(أ) −٣ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

---

١١ إذا كانت : $س^{\frac{٢}{٥}} = ٨$ فإن : س = …………… (البنجر - مطروح)

(أ) ٣٢ (ب) −١٦ (جـ) ± ٣٢ (د) ١٦

---

١٢ إذا كان : $س^{\frac{٤}{٣}} = ٩$ $ص^{-\frac{٢}{٣}} = ٨١$ فإن : |س ص| = …………… (الأقصر - الأقصر)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) ٤

---

١٣ إذا كان : $\frac{٢^{س^{٢}}}{٤^{س}} = ٨$ فإن : قيم س = …………… (الأقصر - الأقصر)

(أ) −٣ أ، ١ (ب) −٣ أ، −١ (جـ) ٣ أ، ١ (د) −١ أ، ٣

---

١٤ إذا كانت : $٣^{س} = ل$ ، $٢^{س} = م$ فإن : $(١٢)^{س} = $ …………… (أهناسيا - بنى سويف)

(أ) ل م (ب) $ل^{٢}$ م (جـ) ل $م^{٢}$ (د) ل + م

---

١٥ إذا كان : $٢^{س} = ٧$ ، $٧^{ص} = ١٦$ فإن : س ص = …………… (طامية - الفيوم)

(أ) −٤ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٤

---

١٦ إذا كان : $٢^{س} = ا$ ، $٣^{س} = ب$ ، $٥^{س} = حـ$

فإن : $(٩٠)^{س} = $ …………… (عين شمس - القاهرة)

(أ) ا ب حـ (ب) $ا^{٢}$ ب حـ (جـ) ا $ب^{٢}$ حـ (د) ا + ٢ب + حـ

---

١٧ إذا كان : ا < ٠ < ب < حـ فأى من الأعداد الآتية لا ينتمى إلى ح ؟ (عين شمس - القاهرة)

(أ) $\sqrt[٣]{ا ب}$ (ب) $\sqrt[٤]{ب حـ}$ (جـ) $\sqrt[٥]{ا ب + حـ}$ (د) $\sqrt[٦]{ا حـ}$

---

١٨ مجموعة حل المعادلة : $٧^{س^{٢}} = ٤٩^{س + ٤}$ هو …………… (بلطيم - كفر الشيخ)

(أ) {−٢} (ب) {−٢ ، ٤} (جـ) {−٢ ، ٣} (د) {٢ ، −٤}

---

١٩ مجموعة حل المعادلة : $٣^{س + ٢} + ٣^{س - ٢} = ٢٤٦$ فى ح هى …………… (أبو حماد - الشرقية)

(أ) {٢} (ب) {١} (جـ) {٣} (د) {صفر}

٢٠ مجموعة حل المعادلة : $٣^{٢س} - ٦ \times ٣^{س} - ٢٧ = ٠$ هى .... (أبو قرقاص - المنيا)

(أ) {١}　(ب) {−١ ، ٢}　(جـ) {١ ، ٢}　(د) {٢}

---

٢١ مجموعة حل المعادلة : $٩^{س} + ٢٧ = ١٢ \times ٣^{س}$ فى ح هى .... (نجع حمادى - قنا)

(أ) {١ ، ٢}　(ب) {٣ ، ٩}　(جـ) {٩ ، ٢٧}　(د) ∅

---

٢٢ إذا كان : $(\sqrt{٣})^{|س - ١|} = ٩$　فإن : س ∈ .... (ميت غمر - الدقهلية)

(أ) {−٣}　(ب) {٥}　(جـ) {−٣ ، ٥}　(د) ∅

---

٢٣ إذا كان : $(\sqrt[٣]{أ})^{|٢س|} = \sqrt{أ}$　فإن : س = ... (أبشواى - الفيوم)

(أ) {٢ ، −٢}　(ب) {٣ ، −٣}　(جـ) $\{\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٢}\}$　(د) $\{\frac{١}{٢}\}$

---

٢٤ إذا كان : د (س) = $٢^{س}$　فإن : د (−٢) = ... (الخارجة - الوادى الجديد)

(أ) −٤　(ب) ٤　(جـ) $\frac{١}{٤}$　(د) $\frac{-١}{٤}$

---

٢٥ إذا كانت : د (س) = $٢^{س}$　فإن : $\frac{د(س + ١)}{د(س - ١)} + \frac{د(س - ١)}{د(س + ١)} =$ .... (المعادى - القاهرة)

(أ) ١　(ب) ٤　(جـ) $\frac{١٧}{٤}$　(د) $\frac{٤}{١٧}$

---

٢٦ إذا كانت د : د (س) = $أ^{س}$ دالة أسية　فإن : أ ∈ .... (دمياط - دمياط)

(أ) ح　(ب) $ح_+ - \{١\}$　(جـ) $ح_-$　(د) $ح_+$

---

٢٧ الشكل المقابل يمثل الدالة د (س) = $أ^{س}$

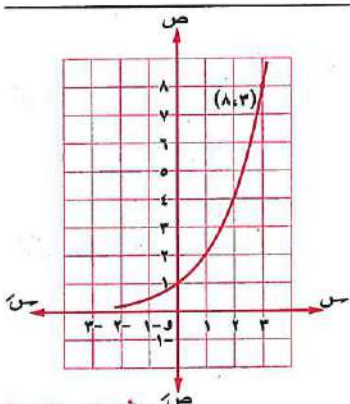
فإن : أ = ...

(أ) ٢

(ب) ٣

(جـ) $\frac{١}{٣}$

(د) $\frac{١}{٢}$



(أبشواى - الفيوم)

٢٨ تكون الدالة الأسية التى أساسها (أ) تزايدية إذا كانت .... (أسوان - أسوان)

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

٢٩ الدالة د (س) = أ^س تكون تناقصية على مجالها ح عندما .... (سوهاج - سوهاج)

(أ) أ = ١ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = -١

٣٠ إذا كان : د (س) = (أ - ٣)^س دالة أسية تناقصية على مجالها

فإن : أ ∈ .... (أبشواى - الفيوم)

(أ)]صفر ، ١[(ب) [صفر ، ٣] (جـ) [٣ ، ٤] (د)]٣ ، ٤[

٣١ تكون الدالة د : د (س) = $\left(\frac{٢}{م}\right)^{س}$ تناقصية إذا كانت .... (بنى سويف - بنى سويف)

(أ) م < ١ (ب) م > ١ (جـ) م > ٢ (د) م < ٢

٣٢ الدالة د (س) = $\left(\frac{١}{أ}\right)^{س}$ تكون متزايدة إذا كان .... (أبو قرقاص - المنيا)

(أ) أ > ١ (ب) ٠ < أ < ١ (جـ) أ < ١ (د) أ < ٠

٣٣ فى الدالة الأسية د حيث د (س) = أ^س حيث صفر < أ < ١ تكون صفر < أ^س < ١

عندما س ∈ .... (أهناسيا - بنى سويف)

(أ)]صفر ، ∞[(ب)]١ ، ∞[

(جـ)]- ∞ ، ١[(د)]- ∞ ، صفر[

٣٤ إذا كان : د (س) = ٢^(س + ١) يقطع محور الصادات فى النقطة .... (الأقصر - الأقصر)

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٠ ، ٢) (جـ) (٠ ، ٤) (د) (٠ ، ٨)

٣٥ الدالة الأسية د حيث د (س) = أ^س ، أ > ١ يقترب خطها البيانى

من .... (أبو حماد - الشرقية)

(أ) محور السينات (الاتجاه الموجب). (ب) محور الصادات (الاتجاه السالب).

(جـ) محور الصادات (الاتجاه الموجب). (د) محور السينات (الاتجاه السالب).

٣٦ إذا كانت : د (س) = $٥^{س}$ فإن قيمة س التي تحقق : د (س − ١) = ١٢٥
هي .... (المعادى - القاهرة)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

٣٧ إذا كانت : د (س − ١) = $٢^{س - ٥}$ ، د (س + ٣) = $\frac{١}{٣٢}$
فإن : قيمة س = ... (مغاغة - المنيا)

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٤ (د) −٤

---

٣٨ إذا كان : د (س) = $٣^{س}$ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س + ١) − د (س − ١) = ٢٤
هي .... (مغاغة - المنيا)

(أ) ٣ (ب) ٨ (جـ) صفر (د) ٢

---

٣٩ إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ فإن قيمة س التي تحقق العلاقة :
د (٢ س) − ٢٤ د (س − ١) − د (٢) = ٠ هي .... (عين شمس - القاهرة)

(أ) ٣ ، $\frac{١}{٣}$ (ب) ٢ ، صفر (جـ) ٢ (د) ٢ ، −١

---

٤٠ أى من الدوال الآتية تمثل دالة نمو أسى ؟ (القوصية - أسيوط)

(أ) د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ (ب) د (س) = $(٣)^{-س}$

(جـ) د (س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{-س}$ (د) د (س) = $\left(\frac{٥}{٣}\right)^{-س}$

---

٤١ جملة مبلغ ٥٠٠٠ جنيه موضوع فى بنك بفائدة مركبة سنويًا ٥ ٪ لمدة ١٠ سنوات
هي .... (غرب المحلة - غربية)

(أ) ١٤٥٤٨ (ب) ٨١٤٤ (جـ) ٩٢٣٥ (د) ٤١١

---

٤٢ إذا بلغ عدد الأبقار فى أحدى مزارع الماشية ١٥٠ بقرة وإذا كان معدل التكاثر لهذه الأبقار ٥ ٪ سنويًا فإن عدد الأبقار فى المزرعة بعد ٣ سنوات .... (سرس الليان - منوفية)

(أ) ١٦٥ (ب) ١٧٤ (جـ) ١٨٢ (د) ١٩٠

---

٤٣ يتناقص إنتاج منجم ذهب سنويًا بمقدار ٥ ٪ إذا كان انتاج المنجم فى السنة الحالية ٢٥٤ كجم فإن انتاج المنجم بعد مرور ٩ سنوات ≈ .... كجم. (أبو حماد - الشرقية)

(أ) ١٦ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٢ (د) ١٦٠

٤٤ إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = س + ٣

فإن : $د^{-١}$ (٥) = ... (قويسنا - المنوفية)

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٣ (د) −٣

---

٤٥ إذا كانت : د (س) = ٥ + $\frac{٤}{س}$ فإن : $د^{-١}$ (س) = ... (أهناسيا - بنى سويف)

(أ) ٤ + ٥ س (ب) ٥ + $\frac{س}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{س - ٥}$ (د) $\frac{س - ٥}{٤}$

---

٤٦ إذا كانت د دالة : د (٥) = ٧ فإن : $د^{-١}$ (٧) = ... (المعادى - القاهرة)

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ٧ (د) −٧

---

٤٧ إذا كانت : د (س) = $\sqrt[٣]{س}$ حيث س ≥ ٠

فإن : $د^{-١}$ (س) = ... (التل الكبير - الإسماعيلية)

(أ) $\frac{١}{٣}$ س (ب) $س^{٣}$ (جـ) $س^{٢}$ (د) $\frac{١}{٢}$ س

---

٤٨ إذا كان : د (س) = ٥ س فإن : $د^{-١}$ (٢) + $د^{-١}$ (٣) = ... (أبو حماد - الشرقية)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢٥

---

٤٩ إذا كانت : د (س) = أ س + ب ، $د^{-١}$ (٩) = ٣ ، $د^{-١}$ (٥) = ٢

فإن : أ × ب = ... (الأقصر - الأقصر)

(أ) −١٢ (ب) −٨ (جـ) −٧ (د) −١٠

---

٥٠ الدوال د ، $د^{-١}$ كل منها على صورة الأخرى بالانعكاس فى المستقيم .... (دمياط - دمياط)

(أ) ص = س (ب) ص = − س (جـ) ص = صفر (د) س = صفر

---

٥١ صورة النقطة (٣ ، −١) بالانعكاس فى المستقيم ص = س هى .... (قلين - كفر الشيخ)

(أ) (٣ ، −١) (ب) (−١ ، −٣) (جـ) (−١ ، ٣) (د) (٣ ، ١)

---

٥٢ إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة $د^{-١}$ فى النقطة (ك ، ٢ ك − ٣)

فإن : ك = ... (غرب طنطا - الغربية)

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) −٣ (د) −١

٥٣ إذا كانت : د$^{-١}$ (س) = ٢ س + ١ فإن : د (س) = ... (عين شمس - القاهرة)

(أ) −٢ س − ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ س + ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٢ س}$ + ١

---

٥٤ إذا كانت : د (س) = {(٤ ، ٥) ، (أ ، ٢)} ، د$^{-١}$ (س) = {(٢ ، ٣) ، (٥ ، ب)}

فإن : أ ب = ... (نجع حمادى - قنا)

(أ) ٧ (ب) ١٢ (جـ) ١ (د) صفر

---

٥٥ إذا كانت د : د (س) = ٢ س + ك هى دالة عكسية للدالة ر (س) = م س + ٣

فإن : م × ك = ... (أوسيم - الجيزة)

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) −١٢ (د) −٣

---

٥٦ إذا كانت الدالتان د ، ر كل منهما عكسية للأخرى حيث

(د ∘ ر) (س) = أ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ ب س + جـ − ٥ فإن : أ + ب + جـ = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١١

---

٥٧ معادلة محور التماثل لمنحنيى الدالتين د ، ر حيث د (س) = ٣^{س} ، ر (س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

هى .... (شمال - السويس)

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = − س

---

٥٨ إذا كان : د (س) = ٣$^{|س|}$ ، ى (س) = $\sqrt[٣]{س - ١}$

فإن : (ى ∘ د) (−٢) = ... (الأقصر - الأقصر)

(أ) ١ (ب) −٢ (جـ) −١ (د) ٢

---

٥٩ الصورة اللوغاريتمية المكافئة للصورة الأسية ٢^{٧} = ١٢٨ هى .... (قليوب - القليوبية)

(أ) لو$_{٢}$ ١٢٨ = ٧ (ب) لو$_{٢}$ ٧ = ١٢٨ (جـ) لو$_{٧}$ ١٢٨ = ٢ (د) لو$_{٧}$ ٢ = ١٢٨

---

٦٠ إذا كان : د (س) = ٢^{س} فإن : د$^{-١}$ (س) = ... (القنطرة غرب - الإسماعيلية)

(أ) س^{٢} (ب) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ (جـ) لو$_{س}$ ٢ (د) لو$_{٢}$ س

٦١ إذا كانت : د (س) = لو$_{٣}$ (س + ك) وكان : د$^{-١}$ (٣) = ١
فإن : ك = ... (العامرية - الإسكندرية)

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

٦٢ إذا كان منحنى الدالة د حيث د (س) = لو$_{ب}$ س يمر بالنقطة (٨ ، ٣)
فإن : د (٤) = ... (أهناسيا - بنى سويف)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٢٠

٦٣ إذا كان المنحنى : ص = لو$_{٤}$ (١ - أ س) يمر بالنقطة ($\frac{١}{٤}$ ، - $\frac{١}{٢}$)
فإن : أ = ... (طامية - الفيوم)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

٦٤ إذا كان : د (أ) = ٢^{أ} فإن : لو$_{٢}$ د (أ) = ... (غرب طنطا - الغربية)

(أ) ٢ (ب) د (أ) (جـ) أ (د) $\frac{١}{٢أ}$

٦٥ مجال الدالة : د (س) = لو (س - ٤) هو .... (أهناسيا - بنى سويف)

(أ)]٤ ، ∞[(ب) [٤ ، ∞[(جـ) [صفر ، ٢] (د)]- ∞ ، ٤[

٦٦ مجال الدالة د حيث د (س) = لو$_{س}$ (٥ - س) هو .... (عين شمس - القاهرة)

(أ)]٠ ، ٥[- {١} (ب) [٠ ، ٥]
(جـ)]٠ ، ٥[(د)]- ∞ ، ٥[

٦٧ مجال الدالة د حيث د (س) = لو$_{س - ١}$ (٦ - س) هو .... (شرق المنصورة - دقهلية)

(أ)]١ ، ٦[(ب) ح -]١ ، ٦[
(جـ)]١ ، ٦[- {٢} (د) [١ ، ٦]

٦٨ مجال الدالة د : د (س) لو$_{|س|}$ (س - ٣) هو .... (الخارجة - الوادى الجديد)

(أ) ح$^{+}$ (ب)]-٣ ، ∞[(جـ) [٣ ، ∞[(د)]٣ ، ∞[

٦٩ مجال الدالة د : د (س) = لو |س^{٢} - ٩| هو .... (المحمودية - البحيرة)

(أ) ح* (ب) ح - {-٣ ، ٣} (جـ) ح - [-٣ ، ٣] (د)]-٣ ، ٣[

٧٠ إذا كان : $٣^{\text{س}} = ٧$ فإن : س = ... (دمياط - دمياط)

(أ) ٣ (ب) $\text{لو}_{٧}\,٣$ (ج) $\text{لو}_{٣}\,٧$ (د) $\varnothing$

---

٧١ إذا كان : $\text{لو}_{٣}\,٢ = \text{أ}$ فإن : $\text{لو}_{٢}\,٦ =$ .... (أبشواي - الفيوم)

(أ) ٢ أ (ب) $\frac{\text{أ} + ١}{\text{أ}}$ (ج) $\frac{\text{أ}}{\text{أ} + ١}$ (د) $\frac{\text{أ}^{٢} + ١}{\text{أ}}$

---

٧٢ إذا كان : $\text{لو}_{٣}\,\text{س} + ٣\,\text{لو}_{٣}\,\text{س} = ٤$ فإن : س = ... (نجع حمادى - قنا)

(أ) ٣ (ب) −٣ (ج) ± ٣ (د) صفر

---

٧٣ $\text{لو}_{٧}\,\text{س} = ١$ فإن : $\text{لو}_{٧}\,٧\,\text{س} + \text{لو}_{٣}\,(\text{س} + ٢) =$ .... (مغاغة - المنيا)

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

---

٧٤ إذا كان : $\text{أ}^{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}} = \text{ص}$ ، فإن قيمة المقدار : $(٢٧)^{\frac{١}{٩}\,\text{لو}_{٣}\,٨} =$ .... (أبشواي - الفيوم)

(أ) ٢ (ب) ٢٧ (ج) ٨ (د) ٩

---

٧٥ ١ + لو ٢ = ... (دمياط - دمياط)

(أ) لو ١٢ (ب) لو ٥ (ج) لو ٢٠ (د) − لو ٥

---

٧٦ $\text{لو}_{\text{س ص}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{س ص}}\,\text{ص} =$ .... (مصر القديمة - القاهرة)

(أ) ص (ب) س (ج) س ص (د) ١

---

٧٧ إذا كان : $٣^{\text{د}(\text{س})} = \text{س} + ٦$ فإن قيمة : د (٣) + د (٧٥) = ... (أبو حماد - الشرقية)

(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ٤ (د) ٧٨

---

٧٨ إذا كان : $\text{لو}_{٢}\,\text{س} = \text{لو}_{٤}\,٩$ فإن : س = ... (أسوان - أسوان)

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٩ (د) ١٢

---

٧٩ إذا كان : $\frac{\text{لو س}}{\text{لو }٥} = \frac{\text{لو }٣٦}{\text{لو }٦} = \frac{\text{لو }٦٤}{\text{لو ص}}$ فإن : س + ص = ... (عين شمس - القاهرة)

(أ) ٢٥ (ب) ٨ (ج) ١٧ (د) ٣٣

٨٠ أى العبارات الآتية صحيحة ؟ (أسوان - أسوان)

(أ) لو ٢ − لو $\sqrt{٢}$ = لو $\sqrt{٢}$ (ب) لو$_{١}$ ١ = صفر

(جـ) لو $\left(\frac{٧}{٥}\right) = \frac{\text{لو } ٧}{\text{لو } ٥}$ (د) لو ٧ ÷ لو ٢ = لو ٥

---

٨١ إذا كان : س = لو$_{٣}$ ٥ فإن قيمة المقدار : ٩^{س} − ٣$^{س+١}$ + ٢ = ... (الأقصر - الأقصر)

(أ) ٢١ (ب) ١٢ (جـ) ٢٢ (د) صفر

---

٨٢ لو$_{م}$ ص ÷ لو$_{م ب}$ ص = ... (المعادى - القاهرة)

(أ) ١ − لو$_{م}$ ب (ب) ١ + لو$_{م}$ ب (جـ) لو$_{م}$ ب (د) لو$_{ب}$ أ

---

٨٣ مجموعة حل المعادلة : (لو س)^{٢} = لو س^{٢} فى ح هى .... (دمنهور - البحيرة)

(أ) {١ ، ١٠} (ب) {١٠٠ ، ١٠}

(جـ) {١ ، ١٠٠} (د) {٠,١ ، ٠,٠١}

---

٨٤ إذا كان : لو$_{٢}$ لو$_{٣}$ س = ١ فإن : س = ... (ميت غمر - الدقهلية)

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ١

---

٨٥ إذا كان : لو$_{٤}$ (١٣ + لو$_{٢}$ (س − ١)) = ٢ فإن : س = ... (دمنهور - البحيرة)

(أ) ٢ (ب) ٩ (جـ) ٤ (د) ١٣

---

٨٦ لو (حاθ) + لو (قاθ) = ... حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[(المحمودية - البحيرة)

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) −١

---

٨٧ مجموعة حل المعادلة : لو |س| = ١ فى ح هى .... (سوهاج - سوهاج)

(أ) {−١٠} (ب) {١٠} (جـ) {١٠ ، −١٠} (د) {١ ، −١}

---

٨٨ إذا كان : لو$_{|س+٢|}$ ٦٤ = ٣ فإن : س ∈ .... (المحمودية - البحيرة)

(أ) {٦ ، −٢} (ب) {٢ ، −٦} (جـ) {٠ ، −٨} (د) {٤ ، −٨}

٨٩ المقدار : ٢ لو$_{ح}$ ٣ + لو$_{ح}$ ٥ − لو$_{ح}$ ٤٥ = ... (القنطرة غرب - الاسماعيلية)

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) صفر

---

٩٠ إذا كان لو$_{أ}$ ب = ٦ ، لو$_{ح}$ ب = ٣ فإن : لو$_{ح}$ أ = ... (مغاغة - المنيا)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٣}$

---

٩١ مجموعة حل المعادلة : لو (س + ٢) + لو (س − ٢) = ١ − لو ٢ فى ح

هى .... (بورسعيد - بورسعيد)

(أ) {٣} (ب) {٣ ، −٣} (جـ) {١ ، ٢} (د) {٥}

---

٩٢ إذا كان : ٢$^{س - ٢}$ = لو ٢٥ أ + لو $\frac{٤}{أ}$ حيث أ > ٠

فإن : س = ... (القنطرة غرب - الاسماعيلية)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

٩٣ ل ، م جذرا المعادلة : ٢ س^{٢} − ٩ س + ٨ = ٠

فإن قيمة المقدار : لو$_{٢}$ ل + لو$_{٢}$ م = ... (البنجر - مطروح)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٢ (د) ٨

---

٩٤ $\frac{١}{لو_{٥} ٣٠} + \frac{١}{لو_{٣} ٣٠} + \frac{١}{لو_{٢} ٣٠}$ = ... (ميت غمر - الدقهلية)

(أ) ٣٠ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) −١

---

٩٥ إذا كان : $\frac{لو س}{لو ٣} + \frac{لو س}{لو ٩} + \frac{لو س}{لو ٢٧}$ = ٢٢ فإن : س = ... (مغاغة - المنيا)

(أ) ٣^{٢} (ب) ٣^{٩} (جـ) ٣^{١٢} (د) ٣^{٢٧}

---

٩٦ إذا كان : لو$_{٢}$ ص = لو$_{٣}$ ٥ × لو$_{٤}$ ٣ × لو$_{٥}$ ٤ فإن : ص = ... (نجع حمادى - قنا)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

٩٧ أبسط صورة للمقدار : لو$_{ب}$ أ^{٣} × لو$_{ح}$ ب^{٥} × لو$_{أ}$ ح = ... (البنجر - مطروح)

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ١ (د) ١٥

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

١ $\lim_{س \to ٠}$ (ظا ٤٥°) = ... (مصر القديمة - القاهرة)

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

٢ $\lim_{س \to ٢}$ (٣ م^{٢}) = ... (إدفو - أسوان)

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٣ م^{٢} (د) ١٢

٣ $\lim_{س \to ٣} \frac{٢ س - ٦}{٧ س - ٢١}$ = ... (أسوان - أسوان)

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٧}$ (جـ) $\frac{٣}{٧}$ (د) ٣

٤ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} + س}{س}$ = ... (بورسعيد - بورسعيد)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٥ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٨ س + ١٥}{س - ٣}$ = ... (دمياط - دمياط)

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) ليس لها وجود. (د) ٥

٦ $\lim_{س \to ٣} \frac{٣ س^{٢} - ٢٧}{س - ٣}$ = ... (سوهاج - سوهاج)

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٨

٧ $\lim_{س \to ٤} \frac{٣ س^{٢} - ٨ س - ١٦}{س^{٢} - ١٦}$ = ... (إهناسيا - بنى سويف)

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٣

٨ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٣ س + ٢}{س^{٣} - ٨}$ = ... (قليوب - القليوبية)

(أ) ١٢ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) صفر (د) غير موجودة.

٩ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{(2\text{س} + 1)^2 - 1}{\text{س}} = \dots\dots\dots$ (دمنهور - البحيرة)

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٤

---

١٠ $\lim\limits_{\text{س} \to 4} \frac{(\text{س} - 3)^2 - 1}{\text{س} - 4} = \dots\dots\dots$ (أسوان - أسوان)

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

١١ إذا كان : $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \frac{2\text{س} + \text{أ}}{\text{س} + 1} = 5$ فإن : أ = ... (الإسماعيلية - الإسماعيلية)

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

---

١٢ إذا كان : $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{أ}\text{س}^2}{2} = 32$ فإن : أ = ... (بنى سويف - بنى سويف)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $4\sqrt{2}$ (د) ٨

---

١٣ $\lim\limits_{\text{س} \to \text{ل}} \frac{2\text{س}^2 - \text{س} - 3}{4\text{س}^2 - 9} = \frac{5}{12}$ فإن قيمة : ل = ... (الأقصر - الأقصر)

(أ) $\frac{3}{2}$ (ب) $-\frac{3}{2}$ (جـ) $-\frac{2}{3}$ (د) $\frac{2}{3}$

---

١٤ إذا كان : $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^2 - 8\text{س} + \text{م}}{\text{س}^2 - 4} = \text{ل}$ فإن : ل + م = ... (أوسيم - الجيزة)

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) ١٣

---

١٥ $\lim\limits_{\text{س} \to 9} \frac{\sqrt{\text{س}} - 3}{\text{س} - 9} = \dots\dots\dots$ (شمال - السويس)

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) ٦ (جـ) $\sqrt{3}$ (د) ٩

---

١٦ $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س} - 1}{\sqrt{\text{س} + 3} - 2} = \dots\dots\dots$ (إهناسيا - بنى سويف)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

١٧ $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \frac{3 - \sqrt{\text{س} + 8}}{1 - \text{س}^2} = \dots\dots\dots$ (أوسيم - الجيزة)

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) −٤ (جـ) $\frac{1}{6}$ (د) $\frac{1}{12}$

١٨ $\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٣)^{٢} - ١}{\sqrt{س + ٢} - ٢} = ...$ (المحمودية - البحيرة)

(أ) -٦ (ب) -٨ (جـ) -٢ (د) غير موجودة.

---

١٩ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ٣\sqrt{س} + ٢} = ...$ (أبشواى - الفيوم)

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) $٢\sqrt{٢}$

---

٢٠ $\lim_{س \to -٤} \frac{س^{٤} - ٢٥٦}{س + ٤} = ...$ (العمرانية - الجيزة)

(أ) ٢٥٦ (ب) ١٢٨ (جـ) -٢٥٦ (د) ٥١٢

---

٢١ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٥} - ٢٤٣}{س^{٣} - ٢٧} = ...$ (دمنهور - البحيرة)

(أ) ٩ (ب) ١٥ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) ٤٥

---

٢٢ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٦} - ٦٤}{س^{٤} - ١٦} = ...$ (سرس الليان - المنوفية)

(أ) ٢ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٤ (د) ٦

---

٢٣ $\lim_{٢س \to -٢} \frac{٢٤٣ س^{٥} + ٣٢}{٢٧ س^{٣} + ٨} = ...$ (قليوب - القليوبية)

(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) $\frac{١٠}{٣}$ (جـ) $\frac{-٢٠}{٣}$ (د) $\frac{٢٠}{٣}$

---

٢٤ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٥]{س} - ١}{\sqrt[٣]{س} - ١} = ...$ (أسوان - أسوان)

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{-١}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{-٣}{٥}$

---

٢٥ $\lim_{س \to \sqrt{٢}} \frac{س^{٥} - ٤\sqrt{٢}}{س^{٢} - ٢} = ...$ (غرب المحلة - الغربية)

(أ) $٥\sqrt{٢}$ (ب) $٢\sqrt{٥}$ (جـ) $١٠\sqrt{٢}$ (د) $٢\sqrt{١٠}$

---

٢٦ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{س} = ...$ (قلين - كفر الشيخ)

(أ) ٥٠ (ب) ٢٥٠ (جـ) ٥٠٠ (د) ١٢٥

٢٧ $\underset{س \to ٥}{\text{نهـــا}} \dfrac{(س - ٣)^{٧} - ١٢٨}{س - ٥} =$ .... (قويسنا - المنوفية)

(أ) ٧ (ب) ٢٨ (ج) ٦٤ (د) ٤٤٨

---

٢٨ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٢} + ٣س - ١٠} =$ .... (أسوان - أسوان)

(أ) ٨٠ (ب) $\frac{٨٠}{٧}$ (ج) $\frac{٧}{٨٠}$ (د) $\frac{١}{٨٠}$

---

٢٩ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{(س + ١)^{٤} - ٨١}{س^{٢} - ٤} =$ .... (نجع حمادى - قنا)

(أ) ٣ (ب) ٩ (ج) ٢٧ (د) صفر

---

٣٠ $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{(س + ٢هـ)^{٥} - س^{٥}}{هـ} =$ .... (غرب المحلة - الغربية)

(أ) $١٠س^{٤}$ (ب) $١٠س^{٥}$ (ج) $١٢س^{٤}$ (د) $١٥س^{٤}$

---

٣١ $\underset{س \to ٦}{\text{نهـــا}} \dfrac{(س - ٥)^{ك} - ١}{س - ٦} = ٧$ فإن : ك = ... (الخارجة - الوادى الجديد)

(أ) ٧ (ب) ٦ (ج) ١ (د) صفر

---

٣٢ $\underset{س^{٢} \to أ}{\text{نهـــا}} \dfrac{س^{٢ن} - أ^{ن}}{س^{٢} - أ} =$ .... (الخارجة - الوادى الجديد)

(أ) $٢ن أ^{ن-١}$ (ب) $ن أ^{٢ن-١}$ (ج) $٢ن أ^{٢ن-١}$ (د) $ن أ^{ن-١}$

---

٣٣ إذا كان : $\underset{س \to أ}{\text{نهـــا}} \dfrac{س^{٥} - أ^{٥}}{س^{٢} - أ^{٢}} = ٦٠$ فإن : أ = ... (سرس الليان - المنوفية)

(أ) ± ٢ (ب) ± ٣ (ج) ± ٥ (د) ± ٦

---

٣٤ إذا كان : $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{س^{م} - ١}{س^{ن} - ١} = ٢$ وكان : م + ن = ١٢ فإن : م = ...

(طامية - الفيوم)

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٢

---

٣٥ $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{س^{٢٠} + س^{١٠} - ٢}{س - ١} =$ .... (بلطيم - كفر الشيخ)

(أ) ٣٠ (ب) ٢٠ (ج) ١٠ (د) ١

٣٦ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٥} + \text{س}^{٢} - ٣٦}{\text{س} - ٢} = \ldots\ldots$ **(ميت غمر - الدقهلية)**

(أ) ٨٠ (ب) ٤ (جـ) ٨٤ (د) ٣٦

---

٣٧ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٥]{\text{س}} + ٢\sqrt{\text{س}} - ٣}{\text{س} - ١} = \ldots\ldots$ **(عين شمس - القاهرة)**

(أ) $\frac{٦}{٥}$ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٣

---

٣٨ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جاس}}{\text{س}} = \ldots\ldots$ **(المحمودية - البحيرة)**

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٩٠^{\circ}}$ (جـ) $\frac{٢}{\pi}$ (د) صفر

---

٣٩ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٧ + ٣\text{س}}{\text{جتاس}} = \ldots\ldots$ **(عين شمس - القاهرة)**

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١

---

٤٠ $\underset{\text{س} \to \pi}{\text{نهـا}} \text{س جتاس} = \ldots\ldots$ **(العامرية - الإسكندرية)**

(أ) صفر (ب) $-\pi$ (جـ) π (د) غير موجودة.

---

٤١ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\text{س}}{\text{جا}٥\text{س}} = \ldots\ldots$ **(المعادى - القاهرة)**

(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) ٥ (د) ٣

---

٤٢ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}٢\text{س} + ٥\,\text{ظا}٣\text{س}}{\text{س}} = \ldots\ldots$ **(بلطيم - كفر الشيخ)**

(أ) ٢ (ب) ١٥ (جـ) ٢١ (د) ١٧

---

٤٣ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\frac{\text{س}}{٥}}{\text{ظا}\frac{٢\text{س}}{٣}} = \ldots\ldots$ **(العامرية - الإسكندرية)**

(أ) $\frac{٣}{١٠}$ (ب) $\frac{١٠}{٣}$ (جـ) $\frac{١٥}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٦}$

---

٤٤ إذا كان : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا م س}}{\text{ك س}} = ٢$ ، $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا ك س}}{\text{ن س}} = ٣$ فإن : $\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \ldots\ldots$

(أوسيم - الجيزة)

(أ) ٦ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ١

٤٥ $\lim_{س \to 0} \frac{س \text{ جا } س + \text{ظا } ٢ س^٢}{\text{جتا } س \text{ جا } ٥ س^٢} = \dots\dots\dots\dots$ (سوهاج - سوهاج)

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

---

٤٦ $\lim_{س \to 0} \frac{٥ - ٥ \text{ جتا } س}{س} = \dots\dots\dots\dots$ (البنجر - مطروح)

(أ) صفر (ب) ٥ (جـ) ١ (د) ١٠

---

٤٧ $\lim_{س \to 0} \frac{٣ س + ١ - \text{جتا } س}{٥ س} = \dots\dots\dots\dots$ (نجع حمادى - قنا)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

---

٤٨ $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا } س + \text{جا } ٣ س}{١ - \text{جتا } س + \text{ظا } ٢ س} = \dots\dots\dots\dots$ (المحمودية - البحيرة)

(أ) صفر (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ١ (د) $\frac{٤}{٣}$

---

٤٩ $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا}^٢ ٢ س}{\text{ظا } ٢ س^٢} = \dots\dots\dots\dots$ (سرس الليان - المنوفية)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) $- \frac{١}{٢}$

---

٥٠ $\lim_{س \to 0} \frac{٥ س^٣ + \text{جا}^٢ ٤ س}{٦ س^٣ + \text{ظا } ٢ س^٢} = \dots\dots\dots\dots$ (برج العرب - الإسكندرية)

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ٧ (د) ٦

---

٥١ $\lim_{س \to 0} \frac{(\text{جا } س + \text{جتا } س)^٢ - ١}{٣ س} = \dots\dots\dots\dots$ (عين شمس - القاهرة)

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) صفر

---

٥٢ $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{قا } س}{\text{جتا } س - ١} = \dots\dots\dots\dots$ (المحمودية - البحيرة)

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ١-

---

٥٣ $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } ٥ س}{\text{لو}_٣ ٩^{س}} = \dots\dots\dots\dots$ (القوصية - أسيوط)

(أ) ٥ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٥}{٩}$ (د) $\frac{٥}{٢}$

٥٤ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س} - ٣)}{٢\text{س} - ٦} =$ .... (القنطرة غرب - الإسماعيلية)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ١ (د) صفر

---

٥٥ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(٢\text{س} - ٦)}{\text{س}^٢ - ٩} =$ .... (أبشواى - الفيوم)

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٩}$ (د) ١

---

٥٦ إذا كان : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{٢\text{س} \,\text{ظتا}\, ٦\text{س}} =$ .... (بنى سويف - بنى سويف)

(أ) ١٢ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{١}{٣}$

---

٥٧ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}\,\text{س}}{\pi - ٢\text{س}} =$ .... (أبشواى - الفيوم)

(أ) ٢ (ب) $\frac{٢}{\pi}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

---

٥٨ $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظتا}\,\text{س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٢}} =$ .... (المعادى - القاهرة)

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) π

---

٥٩ $\underset{\text{س} \to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\,\text{س}}{\pi - \text{س}} =$ .... (ميت غمر - الدقهلية)

(أ) ١ (ب) $\pi^٢$ (جـ) π (د) $-\pi$

---

٦٠ إذا كان : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتا}^٢\, \text{ب}\,\text{س}}{٣\text{س}^٢ + \text{ظا}\,\text{س}^٢} = ١٦$ فإن : ب = ... (أبوقرقاص - المنيا)

(أ) ± ٨ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ٢

---

٦١ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٧}{\text{س}^٢} + \dfrac{٤}{\text{س}} + ١٧\right) =$ .... (مصر القديمة - القاهرة)

(أ) ٩ (ب) ١٧ (جـ) صفر (د) ٨

---

٦٢ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{-٣} + ٢\text{س}^{-٢} + ١}{٢\text{س}^{-٣} - \text{س}^{-١} + ٣} =$ .... (البنجر - مطروح)

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{١}{٣}$

٦٣ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢س^{٢} + ٥س - ٤}{٣س^{٢} - ٧س + ١} =$ .... (المعادى - القاهرة)

(أ) صفر (ب) ∞ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

---

٦٤ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{١}{س} \sqrt{٣ + ٤س^{٢}} =$ .... (إدفو - أسوان)

(أ) ٥ (ب) صفر (جـ) ∞ (د) ٢

---

٦٥ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢س + ٣}{\sqrt{٩س^{٢} - ٢٥}} =$ .... (المراغة - سوهاج)

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٩}$ (جـ) ٢ (د) ٣

---

٦٦ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٢٧س + ١}}{\sqrt{١٦س + ٢}} =$ .... (سرس الليان - المنوفية)

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) صفر (جـ) ∞ (د) $\frac{١}{٢}$

---

٦٧ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^{٣} + ٥}{س(٢س^{٢} + ٣)} =$ .... (دمنهور - البحيرة)

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

---

٦٨ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{(٢س + ١)(٤س - ١)^{٢}}{(٢س + ٣)^{٣}} =$ .... (مغاغة - المنيا)

(أ) ٤ (ب) ٦٤ (جـ) ٨ (د) ٣٢

---

٦٩ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{(٢س + ٥)^{٢}}{٦ + ٥س - ٤س^{٣}} =$ .... (القوصية - أسيوط)

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) $-\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

---

٧٠ إذا كان : أ > ب > صفر فإن : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^{أ}}{س^{ب}} =$ .... (غرب طنطا - غربية)

(أ) أ − ب (ب) صفر (جـ) ∞ (د) $-\infty$

---

٧١ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{٩س + ٥}{٧ + ٣س} + (١٢)^{\frac{١}{س}} \right) =$ .... (نجع حمادى - قنا)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ∞ (د) −٣

٧٢ إذا كان : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{أ}^{٢} \text{س} + ٧}{٢ \text{س} - ٥} = ٨$ فإن : أ = ... (إدفو - أسوان)

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) ± ٤ (د) ± ٨

---

٧٣ إذا كان : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^{٢} + (٣\text{أ} - ١)\text{س}^{٣} + ٢}{\text{أ}\text{س}^{٣} + ٥ \text{س} - ٣} = ٢$ فإن : أ = ... (أبوقرقاص - المنيا)

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) -٣ (د) ٢

---

٧٤ إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{ك} \text{س} + ٥}{\sqrt{٩ + ٤ \text{س}^{٢}}} = ٣$ فإن قيمة : ك = ... (نجع حمادى - قنا)

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ١٢

---

٧٥ إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٤ \text{أ} \text{س}^{\text{ن}} - ٤ \text{س} + ٥}{٣ - ٩ \text{س} + ٨ \text{س}^{٢}} = ٣$

فإن : ن + أ = ... حيث أ ، $\text{ن} \in \text{ص}$ (ميت غمر - الدقهلية)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

---

٧٦ إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^{\text{ن}} + ٦}{\text{س}^{٣} + ١} = \infty$

فإن : ن يمكن أن تساوى .... حيث $\text{ن} \in \text{ط}$ (القنطرة غرب - الإسماعيلية)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

٧٧ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} (٥ + \text{س} - ٣ \text{س}^{٢}) =$ .... (الخارجة - الوادى الجديد)

(أ) ∞ (ب) -٣ (جـ) ٥ (د) $-\infty$

---

٧٨ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^{٢} + ١} - \text{س}\right) =$ .... (قلين - كفر الشيخ)

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) ∞ (د) ١

---

٧٩ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} (٥ \text{س}^{٢} + ٣ \text{س} + ٢) =$ .... (سوهاج - سوهاج)

(أ) ٢ (ب) ١٠ (جـ) ∞ (د) غير موجودة.

٨٠ إذا كان : $\lim_{س \to \infty}$ (أ س^{3} + ٣ س − ٥) = − ∞ فإن : أ يمكن أن تساوى ....

(أوسيم - الجيزة)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) −٤ (د) صفر

---

٨١ $\lim_{\frac{1}{س} \to \infty}$ $\frac{\text{جتا س} - \text{جتا}^{أ}\text{ س}}{س^{2}}$ = ١ فإن : أ = ... (الأقصر - الأقصر)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

---

٨٢ $\lim_{ن \to \infty}$ ن $\left((أ + \frac{1}{ن})^{4} - أ^{4}\right)$ = ... (أبوقرقاص - المنيا)

(أ) ٣ أ^{3} (ب) ٤ أ^{3} (جـ) ٥ أ^{3} (د) ٦ أ^{3}

---

٨٣ إذا كان : $\lim_{س \to 3}$ $\frac{\sqrt{2س + 3} - ك}{س - 3}$ = م فإن : (ك ، م) = ... (أبوحماد - الشرقية)

(أ) $\left(3 ، \frac{1}{6}\right)$ (ب) $\left(3 ، \frac{1}{3}\right)$ (جـ) $\left(3 ، \frac{1}{12}\right)$ (د) $\left(9 ، \frac{1}{3}\right)$

---

٨٤ $\lim_{س \to 3}$ $\frac{س^{2} + أ س + ب}{س - 3}$ = −١ فإن : أ + ب = ... (برج العرب - الإسكندرية)

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) ١٢

---

٨٥ إذا كانت : $\lim_{س \to \infty}$ $\frac{(أ - 3) س^{3} + ب س^{2} - 7}{أ س^{2} + 5 س + 1}$ = ٢ فإن : ب = ...

(طامية - الفيوم)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ١٢

---

٨٦ $\lim_{س \to م}$ $\frac{س + 2}{س^{2} - س - 6}$ غير موجودة فإن : م = ... (بنى سويف - بنى سويف)

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) −٢ (د) ٢

---

٨٧ $\lim_{س \to .}$ $\frac{|س|}{3 س}$ = ... (المعادى - القاهرة)

(أ) ليس لها نهاية. (ب) $\frac{1}{3}$ (جـ) $-\frac{1}{3}$ (د) $\pm \frac{1}{3}$

---

٨٨ $\lim_{س \to 3}$ $\frac{س - 7}{س - 3}$ = ... (مصر القديمة - القاهرة)

(أ) −٤ (ب) $-\frac{7}{3}$ (جـ) $\frac{7}{3}$ (د) ليس لها وجود

٨٩ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س} - ٢}}{٤} =$ .... (برج العرب - الإسكندرية)

(أ) ٠ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) غير موجودة

---

٩٠ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ - ١ & ، \text{س} > ٢ \\ ٣\text{س} + ١ & ، \text{س} \leq ٢ \end{cases}$

فإن : $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) =$ .... (المحمودية - البحيرة)

(أ) ليس لها وجود (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) ٧

---

٩١ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س} - ١ & ، \text{س} < ٢ \\ ٦ & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$

فإن : $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) =$ .... (بنى سويف - بنى سويف)

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٥− (د) ليس لها وجود

---

٩٢ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + ١ & ، \text{س} > \text{أ} \\ ٣\text{س} - ٧ & ، \text{س} < \text{أ} \end{cases}$

فإن : $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ لها وجود فإن : أ = ... (القنطرة غرب - الإسماعيلية)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٤− (د) ٨

---

٩٣ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^٢ + \text{أ}\text{س} - ٢ & \text{عند } \text{س} > ٣ \\ ٢\text{س} + \text{ب} & \text{عند } \text{س} < ٣ \end{cases}$

وكانت : $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = ١٦$ فإن : أ + ب = ... (بلطيم - كفر الشيخ)

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ١− (د) ١٣

---

٩٤ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{جا}^٢ ٢\text{س}}{\text{س}^٢} & ، \text{س} < ٠ \\ ٢\text{أ} + ٣ \text{جتا} \text{س} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$

وكانت : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$ موجودة فإن : أ = ... (عين شمس - القاهرة)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) $-\frac{١}{٢}$

٩٥ إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} \frac{|س|}{س} + ٦ & ، س < ٠ \\ ٢ + جا ٣ س & ، س > ٠ \end{cases}$

لها نهاية عند س = صفر فإن : ٢ = ... (القوصية - أسيوط)

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ٢ (د) −٢

---

٩٦ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} جا ٤ س طا ٩ س & ، \frac{-\pi}{٢} < س < ٠ \\ ٤ س + ٢^٢ & ، س > ٠ \end{cases}$

وكانت : نهـا (س ← ٠) د (س) لها وجود فإن : ٢ = ... (الخارجة - الوادى الجديد)

(أ) $\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ± $\frac{٢}{٣}$ (د) ± $\frac{٤}{٩}$

---

٩٧ إذا كان : د (س) = $\frac{٣ س + ٩}{|س + ٣|}$ فإن : $\left(د (-٣)^{+}\right)^{٢} - \left(د (-٣)^{-}\right)^{٢}$ = ... (أوسيم - الجيزة)

(أ) صفر (ب) ٩ (جـ) ١ (د) ١٨

---

٩٨ إذا كانت : نهـا (س ← ٣) $\frac{د (س) - ٢٧}{س - ٣}$ = ١٢ فإن : نهـا (س ← ٣) $\frac{د (س) - س^٣}{س - ٣}$ = ... (مغاغة - المنيا)

(أ) −٢٧ (ب) −١٥ (جـ) ١٢ (د) −١٢

---

٩٩ إذا كانت : د دالة فإنها تكون متصلة عند س = ٢ إذا كان : .... (أسوان - أسوان)

(أ) د (٢) موجودة (ب) د (٢) = د (٢^{+}) = د (٢^{-})

(جـ) د (س) لها نهاية عند س ← ٢ (د) ٢ ، حـ معًا

---

١٠٠ إذا كانت د (س) = $\begin{cases} ٢ س^٢ + ٩ & ، س \neq ١ \\ ٤ ٢ & ، س = ١ \end{cases}$

متصلة عند س = ١ فإن : ٢ = ... (بورسعيد - بورسعيد)

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٣٦

١٠١ إذا كانت الدالة : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٤ - ٨١}{س^٢ - ٩} &، س < ٣ \\ س^٢ + س + ك &، س \geq ٣ \end{cases}$

متصلة عند س = ٣ فإن : ك = ... (مصر القديمة - القاهرة)

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٤

---

١٠٢ الدالة د (س) = س + $\frac{١}{س}$ متصلة عند س ∈ .... (القنطرة غرب - الإسماعلية)

(أ) ح (ب) ح$^+$ (جـ) ح − {٠} (د) ح − {١}

---

١٠٣ الدالة د (س) = $\frac{٢}{س^٢ - ٦ س + ك}$ متصلة على ح فإن : .... (أبو حماد - الشرقية)

(أ) ك ≥ ٩ (ب) ك ≤ ٩ (جـ) ك > ٩ (د) ك < ٩

---

١٠٤ د (س) = $\frac{س - ٢}{س^٢ + ك س + ٩}$ متصلة فى ح فإن : ك ∈ .... (برج العرب - اسكندرية)

(أ) {−٦ ، ٦} (ب)]−٦ ، ٦[(جـ) [−٦ ، ∞[(د)]٦ ، ∞[

---

١٠٥ إذا كانت : د (س) = $\frac{س + ٤}{س^٢ + ك}$ متصلة على ح

فإن : ك يمكن أن تساوى .... (القوصية - أسيوط)

(أ) −٩ (ب) صفر (جـ) −٤ (د) ٩

---

١٠٦ الدالة د : د (س) = $\frac{س + ٢}{\sqrt{س} - ٢}$ متصلة لكل س ∈ .... (المحمودية - البحيرة)

(أ) [٤ ، ∞[(ب) [٠ ، ∞[(جـ) [٠ ، ∞[− {٤} (د) −١

---

١٠٧ الدالة د : د (س) = $\sqrt{٣ - |س|}$ تكون متصلة على الفترة .... (نجع حمادى - قنا)

(أ) ح (ب) ح − [−٣ ، ٣] (جـ)]−٣ ، ٣[(د) [−٣ ، ٣]

---

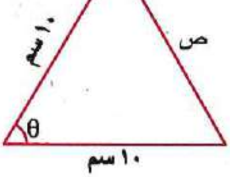
١٠٨ فى الشكل المقابل : (الأقصر - الأقصر)

عندما θ ⟵ $\frac{\pi}{٢}$

فإن ص ⟵ .... سم

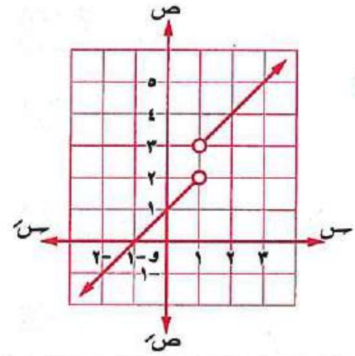
(أ) صفر (ب) ٥

(جـ) ١٠ (د) ١٠ $\sqrt{٢}$



١٠٩ الشكل المقابل هو التمثيل البيانى للدالة د

فإن : نهـــــا د (س) .... **(بلطيم - كفر الشيخ)**
س ← ١



(أ) ٢

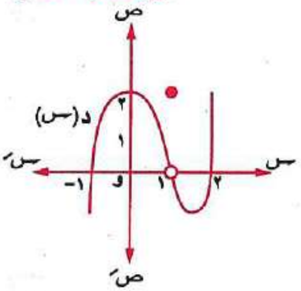
(ب) ٣

(جـ) ١

(د) غير موجودة

---

١١٠ فى الشكل المقابل : **(عين شمس - القاهرة)**



جميع العبارات التالية صحيحة ماعدا ....

(أ) نهــــا د (س) = ٠ عندما س ← ١

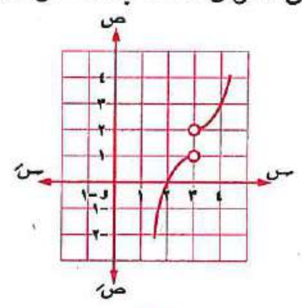
(ب) الدالة ليست متصلة عند س = ١

(جـ) د (١) = ٢

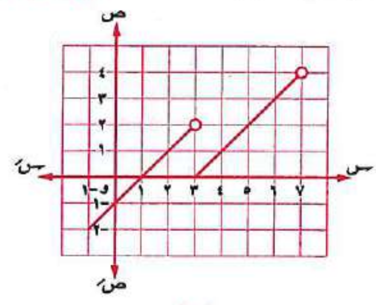
(د) لا يمكن إعادة تعريف الدالة لكى تصبح متصلة.

---

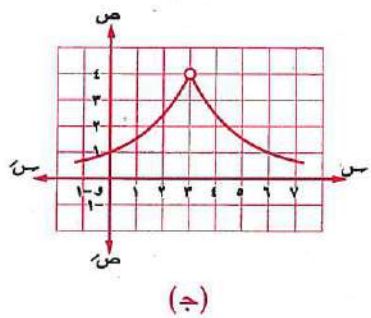
١١١ أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية لها نهاية عند س = ٣ ؟ **(عين شمس - القاهرة)**



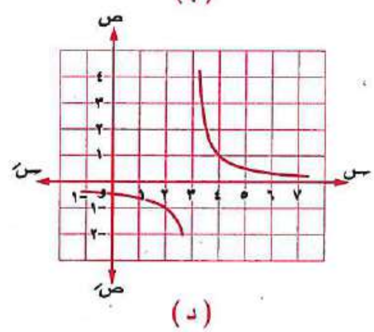
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ١٥}{\text{س} - ٣}$ (الإسماعيلية - الإسماعيلية)

---

٢ ابحث وجود : $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \frac{\text{س} + ١}{\sqrt{\text{س} + ٥} - ٢}$ (أسوان - أسوان)

---

٣ أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٨} - ٣}$ (القوصية - أسيوط)

---

٤ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \left(\frac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٥ - ٣٢} + \frac{\text{س}^٤ - ١٦}{\text{س}^٧ - ١٢٨} \right)$ (بلطيم - كفر الشيخ)

---

٥ ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ← ٣ حيث د (س) = $\sqrt{٣ - \text{س}}$

ثم استنتج قيمة النهاية إن وجدت. (إهناسيا - بنى سويف)

---

٦ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} > ٣ \\ ٢\text{س} - ٧ & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$

، ابحث وجود $\lim\limits_{\text{س} \to ٣}$ د (س) (إدفو - أسوان)

---

٧ أوجد قيمة م ، ك إذا كانت :

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢}$ د (س) = ٧ ، د (س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ + ٣\text{م} & ، \text{س} < ٢ \\ ٥\text{س} + \text{ك} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$ (البنجر - مطروح)

---

٨ أوجد قيمتى أ ، ب إذاكانت : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١}{(\text{أ} + ١)\text{س}^٤ + (٧ - \text{ب})\text{س}^٣ + \text{س}^٢} = \infty$

(قلين - كفر الشيخ)

---

٩ ابحث اتصال الدالة د (س) = $|\text{س} - ١| - ٢$ عند س = ١ (برج العرب - الإسكندرية)

---

١٠ ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ + ١ & ، \text{س} \leq ١ \\ ٢\text{س} & ، \text{س} > ١ \end{cases}$ عند س = ١

(المعادى - القاهرة)

١١ ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^٣ + ١ & ، س \geq ٠ \\ \frac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{س} & ، س < ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(شرق المنصورة - دقهلية)

---

١٢ إذا كانت د متصلة حيث د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٧ - ١٢٨}{س^٣ - ٨} & ، س \neq ٢ \\ ك & ، س = ٢ \end{cases}$ أوجد قيمة : ك

(العامرية - الإسكندرية)

---

١٣ أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د متصلة عند س = أ

حيث د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ٩ & ، س \geq أ \\ ٦ س & ، س < أ \end{cases}$

(القنطرة غرب - الإسماعيلية)

---

١٤ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ك س - ٢ & ، س > ٢ \\ ٤ & ، س = ٢ \\ ٥ ك + م س & ، س < ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢ أوجد قيمة : ك ، م

(ميت غمر - الدقهلية)

---

١٥ أعد تعريف الدالة د (س) = $\begin{cases} \frac{س - ٣}{\sqrt{س + ١} - ٢} & ، س > ٣ \\ ٣ س - ٥ & ، س < ٣ \end{cases}$

بحيث تصبح متصلة إن أمكن

(سرس الليان - المنوفية)

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

١ فى أى مثلث س ص ع يكون س ص : ص ع = ... (أسوان - أسوان)

(أ) جا س : جا ص (ب) جا س : جا ع

(جـ) جا ع : جا س (د) جا ع : جا ص

---

٢ فى المثلث أ ب جـ إذا كان : ق(∠أ) = ٣٠° ، أ = ٦ سم

فإن : $\frac{ب}{جا ب}$ = ... (المعادى - القاهرة)

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) ١٢

---

٣ فى المثلث أ ب جـ أى من العبارات التالية صحيحة ؟ (الخارجة - الوادى الجديد)

(أ) أ = ب جا جـ (ب) $\frac{أ}{جا أ} = \frac{جا ب}{ب}$

(جـ) جا أ + جا ب = أ + ب (د) أ جا ب = ب جا أ

---

٤ فى Δ س ص ع إذا كان : ق(∠س) = ٦٠° ، ق(∠ص) = ٣٠° ، س = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

فإن : ع = ... سم (طامية - الفيوم)

(أ) ٦ (ب) ٤ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٨ (د) ٨ $\sqrt{٣}$

---

٥ أ ب جـ Δ فيه : أ = ٢٧ سم ، ق(∠ب) = ٨٢° ، ق(∠جـ) = ٥٦°

فإن مساحة سطحه = ... سم² تقريبًا. (إدفو - أسوان)

(أ) ٥٤٠ (ب) ٤٤٧ (جـ) ٣٥٠ (د) ٤٠٠

---

٦ Δ أ ب جـ حيث : ق(∠أ) = ٤٥° ، ق(∠جـ) = ٦٠° ، وطول نصف قطر الدائرة المارة

برؤوس المثلث = ٢٠ سم فإن مساحة المثلث ≈ .... سم². (برج العرب - الإسكندرية)

(أ) ٤٦٢ (ب) ٤٧٣ (جـ) ٤٥٢ (د) ٤٩٣

٧ Δ أ ب ح فيه : جتا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، طا ب = $\frac{٥}{١٢}$ ، أ = ٥٢ سم

فإن : ب = ... سم. (الأقصر - الأقصر)

(أ) ٢٥ (ب) ٥٠ (جـ) ١٢,٥ (د) ٢٦

---

٨ مثلث أ ب حـ فيه : أ = ١٢ سم ، ق (∠ أ) = ٣٠° فإن طول نصف قطر الدائرة الخارجة

= .... سم. (دمنهور - البحيرة)

(أ) ٦ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢ (د) ٦ $\sqrt{٣}$

---

٩ دائرة طول قطرها ٢٠ سم تمر برؤوس Δ أ ب حـ ، أ = ١٠ سم

فإن : ق (∠ أ) يمكن أن تكون ....° (قليوب - القليوبية)

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٤٥ (د) ٩٠

---

١٠ إذا كان نق نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث س ص ع

فإن : $\frac{\text{ص}}{\text{٢ جا ص}}$ = ... (البنجر - مطروح)

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\frac{١}{٢}$ نق (د) ٤ نق

---

١١ فى Δ س ص ع إذا كان : $\frac{\text{٢ س}}{\text{جا س}}$ = ١٠ فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه

تساوى .... وحدة طول. (القنطرة غرب - الإسماعيلية)

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

---

١٢ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٦ سم وكانت مساحة الدائرة المارة برؤوسه

تساوى ل π سم^٢ فإن : ل = ... (عين شمس - القاهرة)

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ٨ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

---

١٣ مثلث متساوى الأضلاع طول قطر الدائرة المارة برؤوسه ٤ $\sqrt{٣}$ سم

فإن مساحته = ... سم^٢. (سوهاج - سوهاج)

(أ) ١٨ (ب) ٣٦ (جـ) ١٨ $\sqrt{٣}$ (د) ٩ $\sqrt{٣}$

١٤ Δ أ ب حـ فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ق (∠ ب) = ٣٠°

فإن مساحة سطحه = ... سم^٢ (بورسعيد - بورسعيد)

(أ) ٩ (ب) ١٨ (جـ) ٣٦ (د) ٧٢

---

١٥ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ فيه : أ ب = (لو$_٤$ ٣) سم ، أ حـ = (لو$_٣$ ٦٤) سم

فإن مساحة Δ أ ب حـ = ... سم^٢ (عين شمس - القاهرة)

(أ) ١,٥ (ب) ٣ (جـ) لو ١٦ (د) لو$_٣$ ١٦

---

١٦ Δ أ ب حـ مساحة سطحه ٢١ $\sqrt{٣}$ سم^٢ ، أ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٦٠°

فإن : حـَ = ... سم (غرب طنطا - غربية)

(أ) ١٤ (ب) ٧ (جـ) ٧ $\sqrt{٣}$ (د) ١٤ $\sqrt{٣}$

---

١٧ أ ب حـ مثلث متساوي الساقين فيه : ق (∠ ب) = ١٢٠° وطول قطر الدائرة المارة

برؤوسه = ٨ سم فإن مساحته = ... سم^٢ (إهناسيا - بني سويف)

(أ) ٨ $\sqrt{٣}$ (ب) ٤ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٤ (د) ٨

---

١٨ Δ أ ب حـ فيه : أَ + ٣ بَ = ١٢ سم ، ق (∠ أ) = ٧٠° ، ق (∠ حـ) = ٦٠°

فإن : حـَ = ... سم (سرس الليان - المنوفية)

(أ) ٢,٨ (ب) ٣ (جـ) ٣,٢ (د) ٣,٤

---

١٩ أ ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : $\sqrt{٢}$ بَ = $\frac{\text{حـَ}}{\text{جا حـ}}$ فإن : ق (∠ ب) = ...°

(القنطرة غرب - الإسماعيلية)

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ٧٥

---

٢٠ في المثلث أ ب حـ إذا كان : حـَ = ٦ جا حـ فإن : $\frac{\text{أَ} - \text{بَ}}{\text{جا أ} - \text{جا ب}}$ = ... سم

(أبوقرقاص - المنيا)

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) صفر

٢١ إذا كان : أ ب حـ مثلث فيه : أَ − بَ = ٤ سم ، حا أ = $\frac{٣}{٢}$ حا ب

فإن : أَ = ... (أوسيم - الجيزة)

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٨

---

٢٢ فى أى مثلث أ ب حـ يكون $\frac{\text{حا (أ + ب)}}{\text{حا أ + حا ب}}$ = ... (غرب طنطا - الغربية)

(أ) $\frac{\text{حَ}}{\text{أَ + بَ}}$ (ب) $\frac{\text{أَ}}{\text{بَ + حَ}}$ (جـ) $\frac{\text{بَ}}{\text{أَ + حَ}}$ (د) ١

---

٢٣ إذا كان : حا أ : حا ب : حا حـ = ٣ : ٤ : ٥ فإن : $\frac{\text{بَ + حَ}}{\text{أَ}}$ = ... (القوصية - أسيوط)

(أ) ٩ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{٩}{٤}$

---

٢٤ أ ب حـ مثلث فيه : حا ب + حا حـ = ٤ حا أ وكان : بَ + حَ = ٢ أَ + ١٠

فإن : أَ = ... سم (دمنهور - البحيرة)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

٢٥ المثلث أ ب حـ محيطه = ٣٣ سم فيه : حا أ + حا حـ = $\frac{٢}{٣}$ ، حا ب = $\frac{١}{٤}$

فإن : أ حـ = ... سم (دمنهور - البحيرة)

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٩ (د) ١٥

---

٢٦ إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ = ٣ سم وكان :

حا أ + حا ب + حا حـ = ٢ فإن محيط Δ أ ب حـ = ... سم. (غرب طنطا - الغربية)

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

---

٢٧ إذا كان نق = طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ

فإن : $\frac{\text{أَ + بَ + حَ}}{\text{حا أ + حا ب + حا حـ}}$ = ... (الخارجة - الوادى الجديد)

(أ) ٤ نق (ب) ٢ نق (جـ) ٣ نق (د) ٦ نق

---

٢٨ فى Δ س ص ع إذا كان : ق (∠ س) : ق (∠ ص) : ق (∠ ع) = ٢ : ٣ : ١

فإن : سَ : صَ : عَ = ... (بلطيم - كفر الشيخ)

(أ) ٣ : $\sqrt{٢}$: ١ (ب) $\sqrt{٣}$: ٢ : ١ (جـ) $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$: ١ (د) ٢ : ٣ : ١

٢٩ إذا كان : Δ أ ب جـ فيه : ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠جـ) = ٩ : ٥ : ٤ ، أ = ٨ سم

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ………… سم **(سوهاج - سوهاج)**

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ١٢

---

٣٠ إذا كان : ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٢ جا جـ فإن : أ : ب : جـ = …………

(العمرانية - الجيزة)

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٤ : ٢ : ٣ (جـ) ٦ : ٤ : ٣ (د) ٣ : ٤ : ٦

---

٣١ Δ أ ب جـ محيطه ٢٤ سم ، $\frac{\text{جا أ}}{٣} = \frac{\text{جا ب}}{٤} = \frac{\text{جا جـ}}{٥}$ تكون مساحته = ………… سم^{٢}

(قليوب - القليوبية)

(أ) ٤٨ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢ (د) ٣٠

---

٣٢ أ ب جـ مثلث فيه : ب = ١٢ سم ، نق هو طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث

فإن مساحة المثلث = ………… سم^{٢} **(أسوان - أسوان)**

(أ) $\frac{\text{٢ أ جـ}}{\text{نق}}$ (ب) $\frac{\text{٣ أ جـ}}{\text{نق}}$ (جـ) $\frac{\text{٤ أ جـ}}{\text{نق}}$ (د) $\frac{\text{٦ أ جـ}}{\text{نق}}$

---

٣٣ إذا كان مساحة المثلث أ ب جـ = ٢٤ سم^{٢} ، نق = ٥ سم

فإن : جا أ جا ب جا (أ + ب) = ………… **(مغاغة - المنيا)**

(أ) ١٢٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٠,٤٨ (د) −٠,٤٨

---

٣٤ فى Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب وكان : ب = ٦ سم

فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} \times \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}}$ = ………… وحدة طول. **(القنطرة غرب - الإسماعيلية)**

(أ) ٣٦ (ب) ١٨ (جـ) ١٢ (د) ٦

---

٣٥ Δ س ص ع فيه : ص ع = ٥ سم ، س ع = ٣ سم ، جتا ع = $-\frac{١}{٢}$

فإن : س ص = ………… سم **(نجع حمادى - قنا)**

(أ) ٧ (ب) ٤٩ (جـ) $\sqrt{٧}$ (د) $\sqrt{٨}$

٣٦ ا ب حـ مثلث فيه : بَ = ٢ سم ، حَ = ٢,٥ سم ، جا ا = $\frac{٢}{٥}$

فإن : Δ ا ب حـ يكون .... (أسوان - أسوان)

(أ) قائم الزاوية. (ب) متساوى الساقين.

(جـ) متساوى الأضلاع. (د) مختلف الأضلاع.

---

٣٧ Δ ا ب حـ فيه : اَ = بَ = ٨ سم ، ق(∠حـ) = ١٢٠ فإن : حَ = ... سم.

(بورسعيد - بورسعيد)

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٨ $\sqrt{٣}$ (د) ٤

---

٣٨ ا ب حـ مثلث محيطه = ٧٠ سم ، بَ = ٣٠ سم ، حَ = ١٤ سم

فإن : ق(∠ا) = ...° (العمرانية - الجيزة)

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٥٠

---

٣٩ فى Δ ا ب حـ : إذا كان : ق(∠ا) + ق(∠ب) = ١٢٠° ، اَ = ٢ سم ، بَ = ٣ سم

فإن : حَ = ... سم. (عين شمس - القاهرة)

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $\sqrt{٧}$ (د) $\sqrt{٥}$

---

٤٠ قياس أكبر زاوية فى Δ ا ب حـ الذى أطوال أضلاعه : ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم

يساوى ....° (شمال - السويس)

(أ) ١١٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

---

٤١ فى Δ س ص ع إذا كان : سَ = ١٣ سم ، صَ = ١٤ سم ، عَ = ١٥ سم

فإن : جا س = ... (القنطرة غرب - الإسماعيلية)

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{١}{٥}$

---

٤٢ Δ ا ب حـ الذى فيه : حَ = ١٠ سم ، اَ = ١٦ سم ، ق(∠ب) = ٦٠ فإن طول العمود

الساقط من ب على $\overline{اح}$ = ... سم. (الأقصر - الأقصر)

(أ) $\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٧}$ (ب) $\frac{٤٠\sqrt{٣}}{٧}$ (جـ) $\frac{٤٠}{٧}$ (د) $\frac{٢٠}{٧}$

---

٤٣ فى المثلث ا ب حـ إذا كان : اَ = بَ فإن : جتا ب = ... (طامية - الفيوم)

(أ) $\frac{حَ}{٢ اَ}$ (ب) $\frac{اَ}{٢ حَ}$ (جـ) $\frac{بَ}{٢ حَ}$ (د) $\frac{اَ}{٢ بَ}$

٤٤ في Δ أ ب جـ إذا كان : $\frac{\text{جا أ}}{\text{جا جـ}} = ٢$ جتا ب فإن : .... (برج العرب - الإسكندرية)

(أ) ب = أ (ب) ب = جـ (جـ) جـ = أ (د) أ = ب = جـ

---

٤٥ Δ أ ب جـ الذي فيه : ب = جـ ، $\frac{\text{أ}^٢ - ٢\,\text{ب}^٢}{\text{ب}^٢} = ١$ فإن : ق(∠ أ) = ... (القوصية - أسيوط)

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

---

٤٦ في Δ أ ب جـ يكون $\frac{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ - \text{جـ}^٢}{\text{أ جـ}} \in$ .... (طامية - الفيوم)

(أ) $[-٢ ، ٢]$ (ب) $]-\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}[$ (جـ) $]-٢ ، ٢[$ (د) $[-١ ، ١]$

---

٤٧ في Δ أ ب جـ يكون $\frac{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ - \text{جـ}^٢}{٢\,\text{أ ب}} =$ .... (قليوب - القليوبية)

(أ) جتا أ (ب) جتا ب (جـ) جا (٩٠° - جـ) (د) جتا (٩٠° - جـ)

---

٤٨ أ ب جـ مثلث إذا كان : $\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ - \text{جـ}^٢ + \sqrt{٣}\,\text{أ ب} = ٠$

فإن : ق(∠ جـ) = ...° (بلطيم - كفر الشيخ)

(أ) ٣٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٠

---

٤٩ Δ أ ب جـ إذا كان : (أ + ب - جـ) (أ + ب + جـ) = ٣ أ ب

فإن : ق(∠ جـ) = ...° (المعادى - القاهرة)

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٥٠

---

٥٠ Δ أ ب جـ إذا كان : $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{ب} + \text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ} + \text{ب}}$ فإن : ق(∠ أ) = ...° (العامرية - الإسكندرية)

(أ) ٦٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٥ (د) ١٢٠

---

٥١ في Δ أ ب جـ إذا كان : $\text{أ}^٢ = \text{ب}^٢ + \text{جـ}^٢ - \text{ب جـ}$ ظتا أ فإن : ق(∠ أ) ∈ .... (سوهاج - سوهاج)

(أ) {٣٠ ، ٦٠} (ب) {٣٠ ، ١٥٠ ، ٩٠}

(جـ) {٦٠ ، ١٥٠} (د) {٦٠ ، ١٢٠}

٥٢ فى Δ أ ب حـ إذا كان : أَ : بَ : حَ = ٣ : ٢ : ٢ فإن : حتا أ = ...

(بنى سويف - بنى سويف)

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{-١}{٨}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

---

٥٣ إذا كان Δ أ ب حـ فيه : ٦ أَ = ٤ بَ = ٣ حَ فإن قياس أصغر زوايا المثلث لأقرب دقيقة ≃ ....

(العامرية - الإسكندرية)

(أ) °٥٧ ٢٨َ (ب) °٤١ ١٢َ (جـ) °٢٨ ٥٧َ (د) °٣٦ ٥٢َ

---

٥٤ أ ب حـ مثلث فيه : ٥ حا أ = ٦ حا ب = ١٠ حا حـ

فإن قياس أكبر زواياه ≃ ....° تقريبًا.

(سرس الليان - المنوفية)

(أ) ٨٥ (ب) ٩٤ (جـ) ١١٢ (د) ١٢٠

---

٥٥ فى المثلث أ ب حـ إذا كان : حا أ : حا ب : حا حـ = ٢ : ٣ : ٤

فإن : حتا حـ = ...

(أبوقرقاص - المنيا)

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $-\frac{١}{٤}$ (د) $-\frac{٣}{٤}$

---

٥٦ إذا كان : أ ب حـ مثلث فيه : ٥ حا أ حا ب = ٦ حا ب حا حـ = ٩ حا حـ حا أ

فإن : ق (∠ حـ) ≃ ....°

(إدفو - أسوان)

(أ) ٢٨ (ب) ٣٢ (جـ) ٣٦ (د) ٤٢

---

٥٧ إذا كان : أ ب حـ ء رباعى دائرى فإن : حتا أ + حتا حـ = ... (شمال - السويس)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) –١

---

٥٨ إذا كان : أ ب حـ ء متوازى أضلاع فإن : حتا أ + حتا ب = ... (ميت غمر - الدقهلية)

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) –١ (د) ١

---

٥٩ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١١ سم ، ب ء = ٩ سم

فإن طول : أ حـ ≃ .... سم.

(المحمودية - البحيرة)

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٧

٦٠ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٢٧ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، حـ ء = ٨ سم
، ء أ = ١٢ سم ، أ حـ = ١٨ سم مساحة الشكل أ ب حـ ء ≃ .... سم^2 (قليوب - القليوبية)

(أ) ٣٨ (ب) ٨٦ (جـ) ٤٨ (د) ١٢٤

---

٦١ إذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ = ٥ سم^2
، فإن قيمة : (أ^2 + ب^2 − حـ^2) ظا حـ = ... سم^2 (أبشواى - الفيوم)

(أ) ١٥ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

---

٦٢ عدد حلول المثلث س ص ع الذى فيه : س = ٦ سم ، ص = ٨ سم
، ق (س) = ٨٠° .... (أبشواى - الفيوم)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

---

٦٣ Δ س ص ع فيه : ق (∠ س) = ١٠٠° ، س = ٣ سم ، ص = ٤ سم
هذه الشروط .... (عين شمس - القاهرة)

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.

(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أى مثلث.

---

٦٤ مثلث أ ب حـ فيه : أ = ٧ سم ، ب = ٥ سم ، ق (∠ أ) = ٦٥° فإن عدد المثلثات التى تحقق
ذلك هو .... (أبوقرقاص - المنيا)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

---

٦٥ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) = ١٢٠° ، أ = ١٥ سم ، ب = ١٠ سم
فإن الشروط المعطاة .... (بنى سويف - بنى سويف)

(أ) تعين مثلثين. (ب) تعين ثلاث مثلثات.

(جـ) لا تعين مثلث. (د) تعين مثلث واحد.

---

٦٦ Δ أ ب حـ فيه : أ = ٤ سم ، ب = ٨ سم ، ق (∠ أ) = ٣٠°
فإن عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ تساوى .... (نجع حمادى - قنا)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٦٧ إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ب) = ٥٠° ، أَ = ١٠ سم وله حلان

فإن : بَ لا يمكن أن تكون .... (الأقصر - الأقصر)

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ٨,٦٦

---

٦٨ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{\text{أَ بَ حَ}}{\text{ل نق}}$ فإن : ل = ... (برج العرب - الإسكندرية)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

٦٩ إذا كان : $\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}}$ = نق^{٢} حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن Δ أ ب حـ

فإن محيط الدائرة = ... (برج العرب - الإسكندرية)

(أ) ٢ π (ب) ٤ π (جـ) ٦ π (د) ٨ π

---

٧٠ فى المثلث س ص ع يكون : سَ صَ عَ : حا س حا ص حا ع = ... (أوسيم - الجيزة)

(أ) ٢ نق (ب) ٨ نق (جـ) ٨ نق^{٢} (د) ٨ نق^{٣}

---

٧١ Δ س ص ع فيه $\frac{\text{سَ}}{\text{حا س}} + \frac{\text{صَ}}{\text{حا ص}} + \frac{\text{عَ}}{\text{حا ع}}$ = ١٢ فإن طول نصف قطر الدائرة المارة

برؤوس Δ س ص ع = ... سم. (نجع حمادى - قنا)

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٤

---

٧٢ فى Δ أ ب حـ إذا كان : $\frac{\text{أَ بَ حَ}}{\text{حا أ حا ب حا حـ}}$ = ٦٤

فإن مساحة الدائرة الخارجة للمثلث = ... (قلين - كفر الشيخ)

(أ) ٢ π (ب) ٤ π (جـ) ٨ π (د) ١٦ π

---

٧٣ إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ يساوى ٢ سم فإن :

$\frac{\text{أَ بَ حَ}}{\text{حا أ حا ب حا حـ}} - \left[\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} + \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} + \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}} + \frac{\text{أَ + بَ + حَ}}{\text{حا أ + حا ب + حا حـ}}\right]$ = ...

(سوهاج - سوهاج)

(أ) ٦٤ (ب) ١٦ (جـ) صفر (د) ٤٨

٧٤ في Δ س ص ع الذى مساحته = Δ ، ونصف محيطه = ح يكون المقدار : ....

$\frac{٤}{\text{ع جا س}} + \frac{٤}{\text{س جا ص}} + \frac{٤}{\text{ص جا ع}}$ = ... (نجع حمادى - قنا)

(أ) $\frac{ح}{\Delta}$ (ب) $\frac{٢ح}{\Delta}$ (جـ) $\frac{٣ح}{\Delta}$ (د) $\frac{٤ح}{\Delta}$

---

٧٥ في Δ أ ب حـ إذا كان : أ قتا أ + ب قتا ب = ١٢ فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث = ... وحدة طول. (القنطرة غرب - الإسماعيلية)

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

---

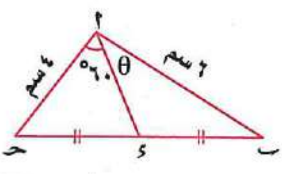
٧٦ إذا كان محيط الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ = ٢ π سم

فإن : أ قتا أ + ب قتا ب + حـ قتا حـ = ... سم (بلطيم - كفر الشيخ)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

---

٧٧ في الشكل : جا θ = ... حيث $\overline{\text{أء}}$ متوسط. (أبوحماد - الشرقية)

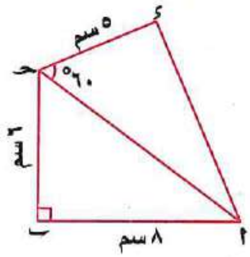


(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ (ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٣}$

---

٧٨ في الشكل المقابل : (أوسيم - الجيزة)



أ ب حـ ء شكل رباعي فيه :

أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، ق(∠ب) = ٩٠°

، ء حـ = ٥ سم ، ق(∠أ حـ ء) = ٦٠°

فإن مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ ء حـ = ... سم²

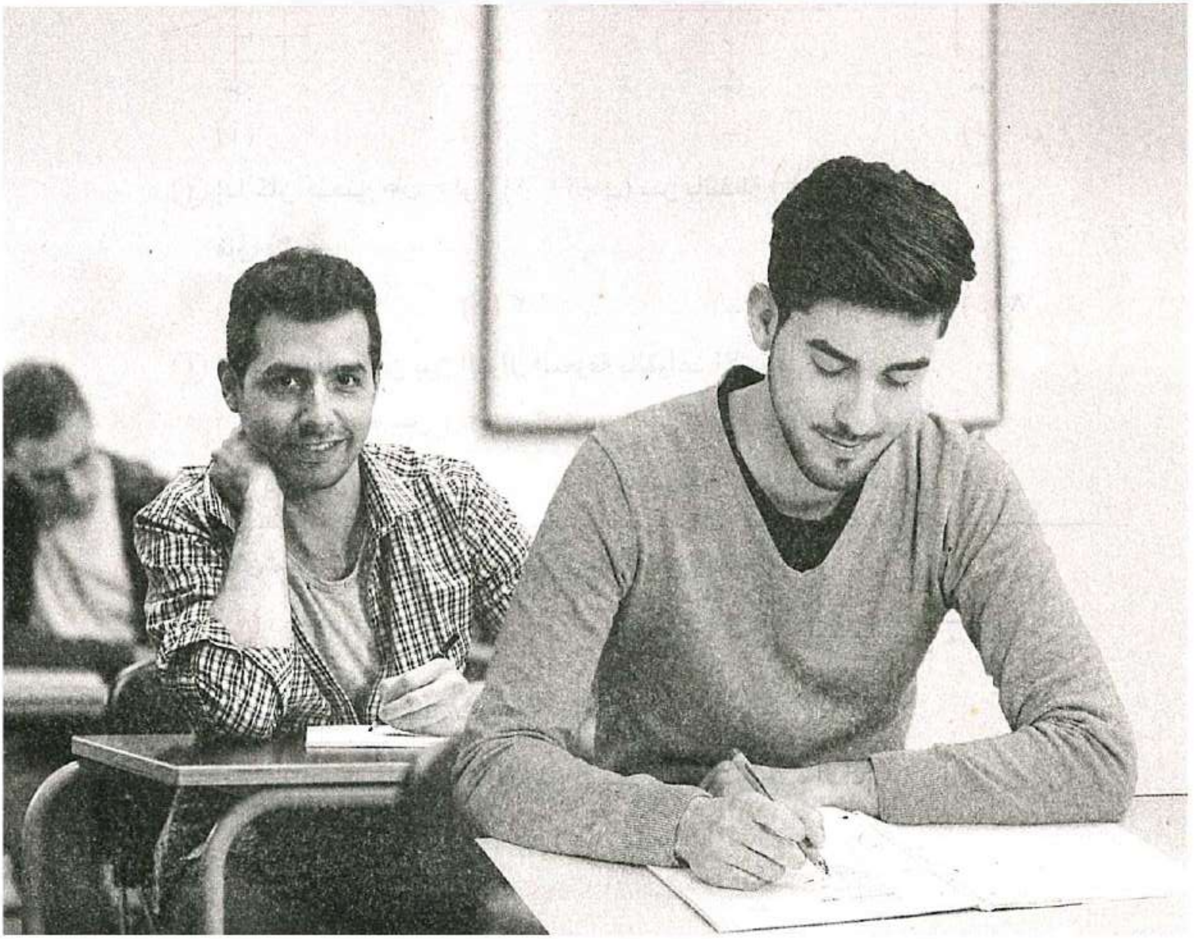
(أ) ٩ π (ب) ١٦ π

(جـ) ٢٥ π (د) ٤٩ π

امتحانات الكتاب المدرسى

أولًا : نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى الجبر.

ثانيًا : نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل وحساب المثلثات.



أولاً نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى الجبر

الاختبار الأول

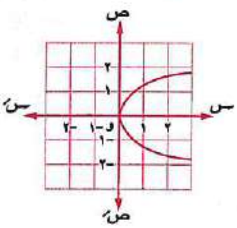
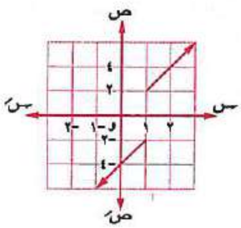
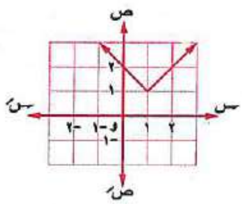
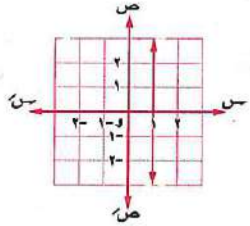
أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $٥^{س} = ٢$ فإن : $٢٥^{س} = $ ....

(أ) ١٠ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٤

② الشكل الذى يمثل دالة فى س من بين الأشكال الآتية هو ....

(أ) (ب) (جـ) (د)

③ إذا كان منجنى ص = $لو_{٤}$ (١ − أ س) يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢}\right)$

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

④ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) $د_{١}$ (س) = س + ٢ (ب) $د_{٢}$ (س) = $س^{٢}$

(جـ) $د_{٣}$ (س) = |س| (د) $د_{٤}$ (س) = ٥

---

٢ (أ) عين مجال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين :

① د (س) = $\frac{س}{\sqrt{١ - س}}$ ② ر (س) = $\frac{س - ١}{س^{٢} - ١} + \frac{١}{س + ١}$

(ب) إذا كانت د دالة حيث د (س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س > ٠ \\ -٢س & ، س < ٠ \end{cases}$

فارسم الشكل البيانى للدالة ومن الرسم أوجد مدى هذه الدالة.

٣ **(أ)** إذا كانت $د_{١}$: ح ⟵ ح حيث $د_{١}$ (س) = ٣ س − ١

، $د_{٢}$: [−٢ ، ٣] ⟵ ح حيث $د_{٢}$ (س) = ٣ − ٢ س

فارسم الدالة ($د_{١}$ + $د_{٢}$) محددًا مجالها ثم ابحث اطراد الدالة.

(ب) أوجد الدالة العكسية للدالة : ص = س + ١ ومثلهما فى شكل واحد.

---

٤ **(أ)** أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

① $لو_{٤}$ س = ١ − $لو_{٤}$ (س − ٣) ② | س + ٢ | = | س − ٣ |

(ب) استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^{٢}$ فى رسم كل من :

① $د_{١}$ (س) = د (س + ٢) ② $د_{٢}$ (س) = $س^{٢}$ + ٣

---

٥ **(أ)** أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : | ٣ س − ٢ | ≤ ٧

(ب) أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{٤}{٣}}$ − ١٠ $س^{\frac{٢}{٣}}$ + ٩ = صفر

الاختبار الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : $٣^{س - ٢}$ = $٢^{س - ٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) ٢

② إذا كانت : ص = $\sqrt[٣]{س}$ لكل س ≥ ٠ فإن الدالة العكسية لها هى ص = ...

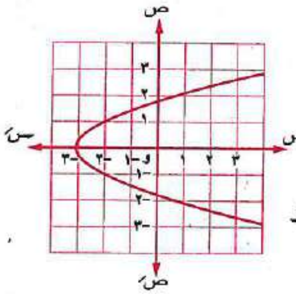
(أ) $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}$ (ب) $س^{٣}$ (جـ) $س^{٣}$ − ١ (د) $س^{-\frac{١}{٣}}$

③ إذا كانت : د دالة فردية على [− س ، س]

فإن : د (− س) + د (س) = ...

(أ) ٢ س (ب) غير معرفة. (جـ) −٢ س (د) صفر

④ المنحنى الموضح بالشكل المقابل



متماثل حول المستقيم الذى

معادلته ....

(أ) س = صفر (ب) ص = صفر

(جـ) ص = −٢ (د) س = ٢

---

٢ **(أ)** إذا كانت : د (س) = $أ^{س}$ **فأثبت أن المقدار :** $\frac{١}{د(س) + ١} + \frac{١}{د(-س) + ١}$ **له** قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س

(ب) اختصر لأبسط صورة : $لو_{ب}\ أ^{٢} \times لو_{جـ}\ ب^{٣} \times لو_{أ}\ جـ$

---

٣ **(أ) استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = | س | لتمثيل كل مما يأتى :**

① $د_{١}$ (س) = | س | + ١ ② $د_{٢}$ (س) = ٢ − | س |

(ب) ارسم منحنى كلٍّ من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين وحدد مداها ثم ابحث اطرادها :

① د (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤ س + ٤}$

② د (س) = | $س^{٢}$ − ٤ س + ١ | حيث س ∈ [٠ ، ٤]

---

٤ **(أ) ابحث نوع كلٍّ من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :**

① $د_{١}$ (س) = س جتا س ② $د_{٢}$ (س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س \geq ٠ \\ |س| & ، س < ٠ \end{cases}$

③ $د_{٣}$ (س) = $س^{٢}$ | س | − ١

(ب) أوجد فى ح مجموعة الحل لكل مما يأتى :

① | س | + س = ٠ ② | ٢ س − ٣ | − | ٦ − ٤ س | > ٠

---

٥ **(أ)** إذا كانت : د (س) = $س^{٢}$ − ١ ، ر (س) = س + ١ **فارسم منحنى الدالة** $\frac{د}{ر}$ (س) مبينًا مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها.

(ب) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة : لو ٢٥ + $\frac{لو ٨ \times لو ١٦}{لو ٦٤}$

ثانيًا

نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل وحساب المثلثات

الاختبار الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٥}{\text{س}(٢\text{س}^{٢} + ٣)} = \text{.............}$

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

② فى Δ أ ب جـ إذا كان : ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا جـ فإن : ق (∠ جـ) ≃ ....

(أ) °٨٩ (ب) °٢٩ (جـ) °٥٧ (د) °٨٢

③ إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١} & ، \text{س} \neq ١ \\ ٢\text{أ} & ، \text{س} = ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ١

④ فى Δ س ص ع يكون : $\dfrac{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - \text{ع}^{٢}}{٢ \text{ س ص}} = \text{.............}$

(أ) جتا س (ب) جتا ص (جـ) جتا ع (د) جا ع

---

٢ (أ) أوجد : ① $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٥} - ٣٢}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١٠}$ ② $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } ٢\text{س} + ٥ \text{ جا } ٣\text{س}}{\text{س}}$

(ب) حل المثلث أ ب جـ الحاد الزوايا الذى فيه : أ = ٢١ سم ، ب = ٢٥ سم

وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه ٢٨ سم.

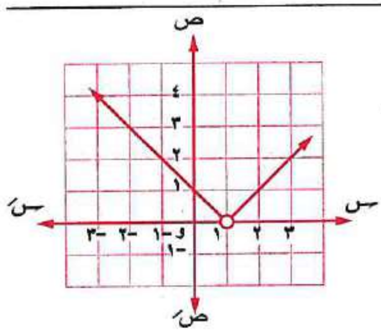
---

٣ (أ) من الرسم البيانى المقابل أوجد :

① $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}$ د (س)

② $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س)

③ د (١)



(ب) أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٧٠°

، ب ء = ٨ سم أوجد محيط متوازى الأضلاع.

---

٤ **(أ)** أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠°

أوجد : ق (∠ ب)

(ب) أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د متصلة عند س = ٢ حيث :

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & ، \quad س \geq ٢ \\ س - ٢أ & ، \quad س < ٢ \end{cases}$$

---

٥ **(أ)** ابحث وجود نهاية للدالة د حيث :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{طا ٢س}{حا س} & عندما \quad س > ٠ \\ \frac{٥س + ٦}{س + ٣} & عندما \quad س < ٠ \end{cases}$$ عندما س ← ٠

(ب) أوجد : $\lim\limits_{س \to ١} \frac{٤ - \sqrt{س + ١٥}}{١ - س^{٢}}$

الاختبار الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٩}$ = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٩}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٦}$

② فى △ أ ب حـ يكون : حتا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{أ^{٢} + ب^{٢} - حـ^{٢}}{٢ أ ب}$ (ب) $\frac{أ^{٢} + حـ^{٢} - ب^{٢}}{٢ أ ب}$

(جـ) $\frac{ب^{٢} + حـ^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب حـ}$ (د) $\frac{حـ^{٢} - أ^{٢} - ب^{٢}}{٢ أ ب}$

③ أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{\text{حا أ}}{3} = \frac{2\,\text{حا ب}}{5} = \frac{\text{حا حـ}}{4}$ فإن : أَ : بَ : حـَ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٧ : ٢ : ٤ (د) ٣ : ٥ : ٦

④ $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{\text{س}^2 + 3}}{2\,\text{س} + 1} = $ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{3}{2}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) ٣

---

٢ (أ) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}^2 + 2\,\text{س} - 3}{\text{س} + 3} & ، \text{س} \neq -3 \\ \text{س} + \text{أ} & ، \text{س} = -3 \end{cases}$

متصلة عند س = −٣ **فأوجد : قيمة أ**

(ب) أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{1}{3}$ حا أ = $\frac{1}{4}$ حا ب = $\frac{1}{5}$ حا حـ

أوجد : ق (∠ حـ) وإذا كان محيط المثلث = ٢٤ سم أوجد مساحته.

---

٣ (أ) **أوجد :** $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{حتا س} + \text{حا } 3\,\text{س}}{1 - \text{حتا س} + \text{ظا } 2\,\text{س}}$

(ب) حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أَ = ٩ سم ، بَ = ١٥ سم ، ق (∠ حـ) = ١٠٦°

---

٤ (أ) **أوجد :** $\lim_{\text{س} \to -2} \frac{(\text{س} + 3)^5 - 1}{\text{س}^2 - 4}$

(ب) أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٢٧ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، حـ ء = ٨ سم

، ء أ = ١٢ سم ، أ حـ = ١٨ سم **أثبت أن :** $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ **ينصف** ∠ ب أ ء

ثم أوجد مساحة الشكل أ ب حـ ء

---

٥ (أ) **أوجد قيمة :**

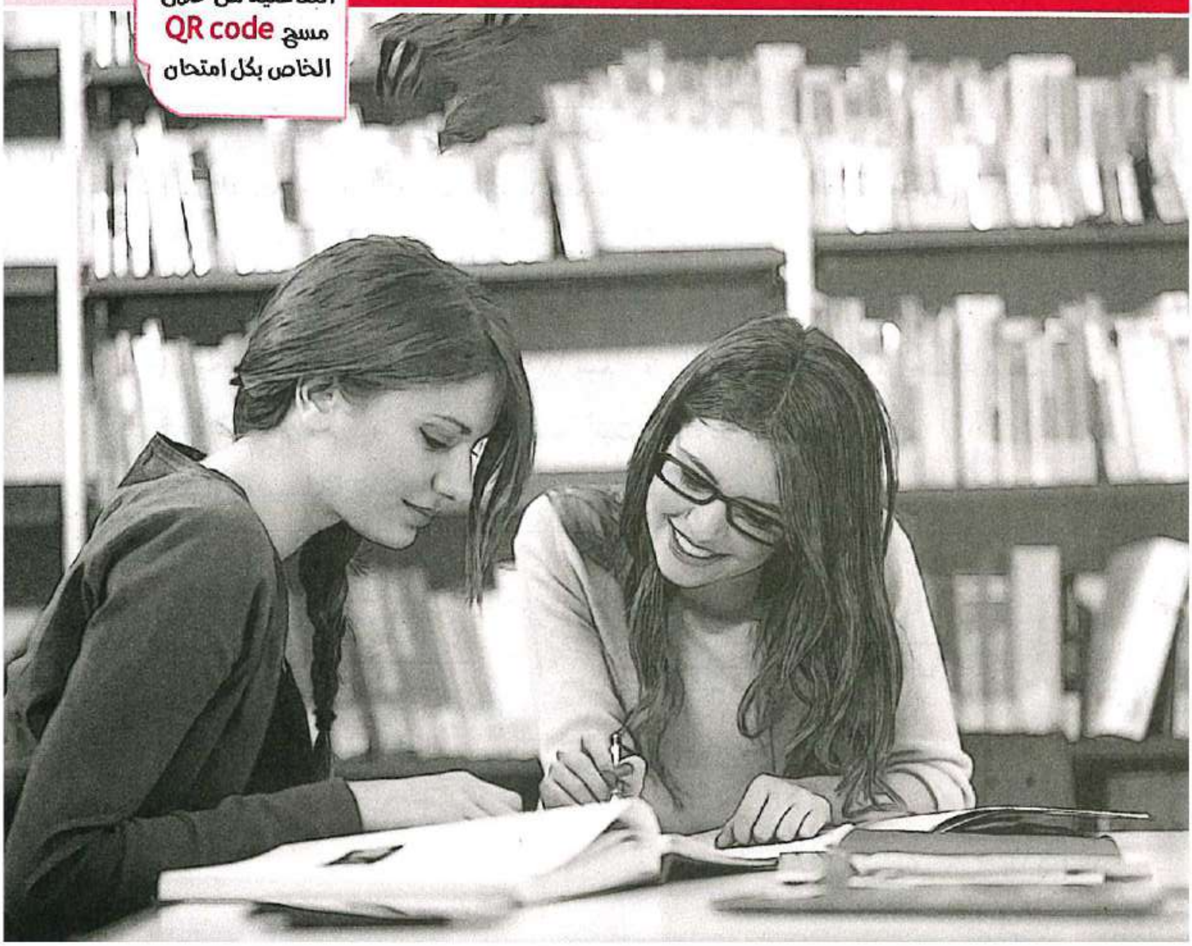
① $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\sqrt{\text{س} + 4} - 2}{\text{س}^2 + \text{س}}$ ② $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{1}{\text{س}} \sqrt{3 + 4\,\text{س}^2}$

(ب) شكل خماسى منتظم محيطه ٣٠ سم. أوجد مساحة سطحه.

الامتحانات النهائية

امتحانات بعض مدارس المحافظات

يمكنك حل الامتحانات التفاعلية من خلال مسح **QR code** الخاص بكل امتحان



١ محافظة القاهرة

إدارة عين شمس
توجيه الرياضيات

اختبار تفاعلى ①

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س^٢ - ١٠ س + ك}$ هو ح − {٥}

فإن : ك = ...

(أ) ٥ (ب) ٢٥ (جـ) ± ٥ (د) ٥٠

② إذا كان د (س) = $\sqrt{س + ٥}$ ، ر (س) = س^٢ فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ٩

③ إذا كان د دالة فردية ، أ ∈ مجال د فإن : د (أ) + د (− أ) = ...

(أ) ٢ د (أ) (ب) ٢ أ (جـ) د (أ) (د) صفر

④ الدالة د : د (س) = { ٢ ، س > صفر ؛ −٢ ، س < صفر } تكون متماثلة حول النقطة ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (−٢ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٢ ، −٢)

⑤ نقطة رأس المنحنى للدالة د : د (س) = (٢ − س)^٢ + ٣ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، −٣) (جـ) (−٢ ، ٣) (د) (−٢ ، −٣)

⑥ مجموعة الحل فى ح للمتباينة : $\frac{١}{|س - ٢|} \geq \frac{١}{٢}$ هى ....

(أ)]٠ ، ٤[− {٢} (ب) [٠ ، ٤] − {٢}

(جـ) [٠ ، ٤] (د)]٠ ، ٤[

⑦ إذا كان : $\left(\frac{١}{٢}\right)^{أ^٢ - أ - ٢}$ = ١ حيث أ > ٠ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) ٣

⑧ إذا كانت : $س^{\frac{٥}{٣}}$ = ٢ $ص^{\frac{٤}{٣}}$ = ٣٢ فإن : س + ص = ...

(أ) ١٦ (ب) صفر (جـ) ١٦ ، −١٦ (د) صفر ، ١٦

(٩) إذا كان : د (س) = $٣^{س}$ فإن قيمة س التي تحقق المعادلة :
د (س + ١) − د (س − ١) = ٢٤ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) صفر

(١٠) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\sqrt[٣]{س}$ فإن : $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}$ (ب) $س^{٣}$ (جـ) $س^{٣}$ − ١ (د) ٣ $س^{٣}$

(١١) إذا كان : لو (س + ١١) = ٢ فإن : س = ...

(أ) −٩ (ب) ٢٢ (جـ) ٨٩ (د) ٩١

(١٢) مجال الدالة د : د (س) = $لو_{١ - س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١ (جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

(١٣) المقدار $\frac{٣ \text{ لو } ٢}{\text{لو } ٤ + \text{لو } ٣}$ يكافئ المقدار ....

(أ) $لو_{٣}$ ٢ (ب) $لو_{٧}$ ٢ (جـ) $لو_{٧}$ ٨ (د) $لو_{١٢}$ ٨

(١٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - س - ٦}{س^{٢} + س - ١٢}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (جـ) −١ (د) −٥

(١٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٣} - ٨}$ = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) صفر (د) $\frac{٢٠}{٣}$

(١٦) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٣} + ٥}{س (٢ س^{٢} + ٣)}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

(١٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا^{٢} ٢ س}{س جا ٣ س}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

(١٨) إذا كان د : د (س) = $\begin{cases} \frac{جا (س - ١)}{(س - ١)} & ، \quad س < ١ \\ ظا \frac{\pi س}{٤} & ، \quad ١ < س < ٢ \end{cases}$

فإن : $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) غير موجودة.

(١٩) إذا كانت د : د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س - ١} & ، \; س \neq ١ \\ أ & ، \; س = ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن أ = ...

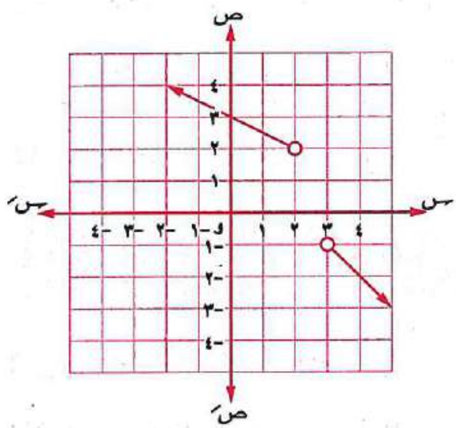
(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ١٢

(٢٠) إذا كانت الدالة د لها نهاية عندما س ← −٣ حيث :

د(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س + ٣} & ، \; س < -٣ \\ س + أ & ، \; س > -٣ \end{cases}$ فإن : أ = ...

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢١) في الشكل المقابل :



$\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ...

(أ) −٣

(ب) ٢

(جـ) −١

(د) غير موجودة.

(٢٢) في Δ أبحـ إذا كان ٣ جا أ = ٤ جا ب = ٢ جا حـ فإن أَ : بَ : حَ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٦ : ٤ : ٣ (جـ) ٤ : ٣ : ٦ (د) ٤ : ٦ : ٣

(٢٣) في Δ أبحـ : ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠حـ) = ٣ : ٥ : ٤

فإن : $حَ^{٢}$: $أَ^{٢}$ = ...

(أ) ٣ : ٢ (ب) ٢ : ٣ (جـ) $\sqrt{٦}$: ٢ (د) ٤ : ٣

(٢٤) إذا كان : أبحـء شكل رباعي دائري فإن : جتا أ + جتا حـ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) −١

(٢٥) في Δ أبحـ : أَ = ٥ سم ، بَ = ٧ سم ، ق(∠حـ) = ٦٠°

فإن : حَ ≈ .... لأقرب رقم عشري واحد.

(أ) ٦٫٢ (ب) ٥ (جـ) ٤٫٣ (د) ٣٫٥

(٢٦) Δ أ ب جـ فيه : أ^{٢} + ب^{٢} − جـ^{٢} + $\sqrt{٣}$ أ ب = صفر فإن : ق (∠ جـ) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٥٠

(٢٧) Δ أ ب جـ فيه : أ = ٤ سم ، ب = ٧ سم ، ق (∠ جـ) = ١٢٠°
فإن : مساحة Δ أ ب جـ = ... سم^{٢}

(أ) ٧ (ب) ١٤ (جـ) ٧ $\sqrt{٣}$ (د) ١٤ $\sqrt{٣}$

ثانيًا | الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) مثل بيانيًا منحنى الدالة د : د (س) = { |س| ، س ≥ صفر ؛ س^{٢} ، س < صفر }
ومن الرسم أوجد مدى الدالة وابحث اطرادها.

(٢) إذا كانت : د (س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٢\sqrt{\text{س}^{٢}}}{\text{س}}$ ابحث وجود نهاية للدالة د عند س = صفر

٢ محافظة الجيزة

إدارة العمرانية
توجيه الرياضيات

أولًا | أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلى (٢)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجال الدالة د (س) = $\frac{\text{٣ س}}{\sqrt[٣]{\text{س} - ٨}}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٨} (جـ) ح − {٢} (د)]٨ ، ∞[

(٢) الدالة الأحادية من بين الدوال الآتية هى ....

(أ) س^{٣} (ب) س^{٢} − ١ (جـ) |س| (د) $\frac{\text{س}}{\text{جا س}}$

(٣) إذا كانت : (د ∘ ر) (س) = س وكان : ر (٥) = ٧ فإن : د (٧) = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٣٥

(٤) نهـا$_{\text{س} \leftarrow ٥}$ $\frac{\sqrt{\text{س} - ١} - ٢}{\text{س} - ٥}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٤

(٥) إذا كان : $\lim_{س \to صفر} \frac{(٢ - ٣س)^{٥} - ٣٢}{٥س} = ٤ك - ٨$ فإن : ك = ...

(أ) ١٠ (ب) -١٠ (جـ) ١٤ (د) -١٤

(٦) $\lim_{س \to -٤} \frac{س^{٤} - ٢٥٦}{س + ٤} =$ ....

(أ) ٢٥٦ (ب) ١٢٨ (جـ) -٢٥٦ (د) ٥١٢

(٧) مجموعة الحل للمعادلة : $|س - ١| = س - ١$ فى ح هى ....

(أ) ح (ب) ح - {١} (جـ) [١ ، ∞[(د)]-∞ ، ١]

(٨) إذا كانت : $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س + ٢} = \frac{٢٧}{٨}$ فإن : س = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) ٣ (جـ) -٥ (د) -٣

(٩) إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٤ = ص فإن : لو ١٢ = ...

(أ) س ص (ب) س + ص (جـ) س - ص (د) لو س + لو ص

(١٠) مجموعة الحل للمعادلة : $\sqrt{س^{٣}} = ٨$ فى ح هى ....

(أ) ∅ (ب) {٢} (جـ) {٤} (د) {± ٤}

(١١) إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق :

د (س + ١) + د (س - ١) = ٣٠ هى ....

(أ) -٢ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ٢

(١٢) أ ب حـ مثلث فيه : ب = ٦ سم ، أ = ١٢ سم ، ق(∠ب) = ٣٠°

فإن عدد المثلثات الممكنة = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٣) فى المثلث أ ب حـ يكون : $حـ^{٢} + ٢$ أ ب جتا حـ = ...

(أ) $أ^{٢} + ب^{٢}$ (ب) $أ^{٢} + حـ^{٢}$ (جـ) $ب^{٢} + حـ^{٢}$ (د) $أ^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢}$

(١٤) إذا كان : ٣س + ١ = $لو_{٥}$ ٢٥ - $لو_{٢}$ ١٦ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) -١

(١٥) إذا كان : $٣^{س} = ٧^{ص}$ فإن : $٧^{\frac{ص}{س}}$ .... $٣^{\frac{س}{ص}}$

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ≤

(١٦) إذا كان : $لو_{٢}$ أ + $لو_{٢}$ ب - $لو_{٢}$ $حـ^{-١}$ = ٢ فإن : أ ب حـ = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ٥

(١٧) $\lim\limits_{\text{س} \to -2} \frac{3}{|\text{س}|}$ = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) -٣

(١٨) $\lim\limits_{\text{س} \to -1} \frac{\text{س}^2 + \text{س}}{\text{س} + 1}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) صفر (د) -١

(١٩) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^2 - \text{ك}}{\text{س} - 2} = 4$ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٠) مجموعة الحل للمتباينة : $|\text{س}| - 2 > \text{صفر}$ فى ح هى ....

(أ) ح − $[-2 ، 2]$ (ب) $]-2 ، 2[$ (جـ) ح − $]-2 ، 2[$ (د) $[-2 ، 2]$

(٢١) نقطة تماثل الدالة د (س) = $\frac{5}{\text{س} - 1} - 2$ هى ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (-١ ، ٢) (جـ) (٢ ، ١) (د) (١ ، -٢)

(٢٢) إذا كان : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{(\text{أ} - 3)\text{س}^2 + 4\text{س} + 7}{\text{ب س} + 5} = 2$ فإن : أ × ب = ...

(أ) ٣ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ١٢

(٢٣) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{3\text{س} - 5 \text{ ظا } 2\text{س}}{4\text{س} + \text{جا } 3\text{س}}$ = ...

(أ) -٢ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٢

(٢٤) فى المثلث أ ب جـ يكون $\frac{2 \text{ جـ}}{\text{جا جـ}}$ = ... نق

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) $\frac{1}{2}$

(٢٥) إذا كان : ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٢ جا جـ فإن : أ : ب : جـ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٤ : ٢ : ٣ (جـ) ٦ : ٤ : ٣ (د) ٣ : ٤ : ٦

(٢٦) أ ب جـ مثلث محيطه = ٧٠ سم ، ب = ٣٠ سم ، جـ = ١٤ سم
فإن : ق (∠ أ) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٥٠

(٢٧) فى المثلث س ص ع يكون $\frac{\text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{ع}^2}{2 \text{ س ص}} \in$ ....

(أ) $[-1 ، 1]$ (ب) $[-1 ، 1[$ (جـ) $]-1 ، 1[$ (د) $]0 ، 1]$

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) ارسم منحنى الدالة د (س) = (س − ٢)^٢ + ١ ثم أوجد المدى وابحث الاطراد

(٢) إذا كانت د (س) =
- ٣ س^٢ + حـ س − ٢ عندما س > ٢
- ١٦ عندما س = ٢
- ٢ س − هـ عندما س < ٢

متصلة عند س = ٢

أوجد : قيمة ٤ حـ + هـ

٣ محافظة الإسكندرية

إدارة العامرية
توجيه الرياضيات

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلي (٣)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) نهـا (س ← ∞) [(أ − ٢) س^٢ + ٦ س + ١٢] ÷ [٤ − ٢ س] = ب فإن : أ + ب = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٥ (د) −٥

(٢) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ الذى فيه :

ق (∠ أ) = ٣٠° ، ب = ٩ سم ، أ = ٦ سم هو ....

(أ) واحد. (ب) اثنان. (جـ) لايوجد. (د) عدد لانهائى.

(٣) إذا كانت الدالة د : د (س) = ٤^س فإن قيمة س التى تحقق أن :

د (س + ١) + د (س − ١) = ٦٨ هى ....

(أ) ١٦ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) ٤

(٤) مجال الدالة د (س) = √(٦ − س) هو ....

(أ) [٦ ، ∞[(ب)]٦ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٦[(د)]−∞ ، ٦]

(٥) إذا كان د دالة فردية فإن : [٢ د (س) + ٨ د (−س)] ÷ [٣ د (س)] = ...

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) −٤ (د) ٤

⑥ نهـا س ← ٣ (٥ س^٢ − ٤٥) / (√(٥ س + ١) − ٤) = ...

(أ) ٥ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٤٨

⑦ إذا كان Δ أ ب حـ فيه : ٦ أَ = ٤ بَ = ٣ حـَ فإن قياس أصغر زوايا المثلث لأقرب دقيقة = ...

(أ) ٢٨َ ٥٧° (ب) ١٢َ ٤١° (جـ) ٥٧َ ٢٨° (د) ٥٢َ ٣٦°

⑧ منحنى الدالة د (س) = س^٢ + ٤ هو نفس منحنى الدالة ر (س) = س^٢ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) ←و س (ب) ←و سَ (جـ) ←و ص (د) ←و صَ

⑨ مدى الدالة د (س) = ٢ / (س − ٣) − ١ هو ....

(أ) ح − {٣} (ب) ح − {−١} (جـ) ح − {١} (د) ح − {−٣}

⑩ مجموعة حل المتباينة : √(س^٢ − ٦ س + ٩) ≥ ٣ فى ح هو ....

(أ)]٠ ، ٦[(ب) [٠ ، ٦] (جـ) ح −]٠ ، ٦[(د) ح − [٠ ، ٦]

⑪ إذا كانت : د (س) = لو٢ (س + ك) وكان : د^{−١} (٣) = ١ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

⑫ إذا كانت : د (س) = √س ، ر (س) = س^٢ − ١
فإن : (د ∘ ر) (−٣) = ...

(أ) ٢ (ب) −٤ (جـ) ٢ √٢ (د) غير معرفة

⑬ الدالة الأحادية من الدوال الآتية هى ....

(أ) س + ٢ (ب) ٣ س^٢ (جـ) |س + ٣| (د) ٤

⑭ فى أى مثلث أ ب حـ يكون (أَ / بَ) × (جا ب / جا أ) = ...

(أ) حـَ / جا حـ (ب) جا حـ / حـَ (جـ) ٤ نق^٢ (د) ١

⑮ نهـا س ← −١ (س^٢ − ٣ س − ٤) / (س^٣ + ١) = ...

(أ) ٥/٣ (ب) −٥/٣ (جـ) ١٠/٣ (د) ٢/٣

(١٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا} \frac{س}{٥}}{\text{ظا} \frac{٢س}{٣}} = $ ....

(أ) $\frac{٣}{١٠}$ (ب) $\frac{١٠}{٣}$ (جـ) $\frac{١٥}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٦}$

(١٧) لو $\left(\frac{أ^٢}{ب حـ}\right) = $ .... حيث أ ، ب ، حـ $\in ح^+$

(أ) ٢ لو أ + لو ب + لو حـ (ب) ٢ لو أ − لو ب + لو حـ

(جـ) ٢ لو أ − لو ب − لو حـ (د) ٢ (لو أ − لو ب − لو حـ)

(١٨) Δ أ ب حـ فيه : $\frac{أَ - بَ}{بَ + حَ} = \frac{حَ}{أَ + بَ}$ فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٢٠°

(١٩) إذا كان طول قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ = ٣ سم

فإن : $\frac{أَ بَ حَ}{\text{جا أ جا ب جا حـ}} = $ ....

(أ) ٢١٦ (ب) ٨ (جـ) $\frac{٢٧}{٨}$ (د) ٢٧

(٢٠) في المثلث أ ب حـ إذا كان : أَ = ٤ سم ، بَ = ٥ سم ، جتا حـ = ٠,٤

فإن : حَ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٢١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٣س - ك}{س^٢ - ١} = \frac{٥}{٢}$ فإن : ك = ...

(أ) −٢ (ب) ٤ (جـ) −١ (د) −٣

(٢٢) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{ظا} ٣س}{س} & ، س < \text{صفر} \\ ٢ + \text{جتا} س & ، س \geq \text{صفر} \end{cases}$

فإن : $\lim_{س \to \text{صفر}}$ د (س) = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٢٣) $\lim_{س \to \text{صفر}} \frac{\text{ظا}^٢ ٢س \text{ جتا } ٥س}{\text{جا } ٣س^٢} = $ ....

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٢ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٢٤) $\lim_{س \to \pi}$ س جتا س = ...

(أ) صفر (ب) $-\pi$ (جـ) π (د) غير موجودة

(٢٥) لو ــس + لو ص − لو $ع^{-١}$ = ٢ فإن : ــس ص ع = ...

(أ) ٢ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ١٠٠

(٢٦) إذا كان : $٣^{لو_٧ ــس} \times ٥^{لو_٧ ــس} = ٢٢٥$ فإن : ــس = ...

(أ) ٤٩ (ب) ٢٥ (جـ) ٣٦ (د) ١٥

(٢٧) إذا كان : $٣^{ــس} = ٥$ فإن : $٣^{ــس + ٢}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٤٥ (د) ٩٠

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) إذا كانت الدالة د متصلة فى ح حيث د (ــس) = $\begin{cases} \frac{ــس^{٧} - ١٢٨}{ــس^{٣} - ٨} & ، ــس \neq ٢ \\ ك & ، ــس = ٢ \end{cases}$

أوجد قيمة : ك

---

(٢) ارسم منحنى الدالة د (ــس) = $(٢ - ــس)^{٣} + ٣$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

٤ محافظة القليوبية إدارة بنها

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختبـــار تفاعلى (٤)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جميع الدوال الآتية أحادية على مجالها ما عدا الدالة د (ــس) = ...

(أ) $ــس^{٢}$ (ب) ٥ ــس (جـ) $\frac{١}{ــس}$ (د) ٧

(٢) مجال الدالة د (ــس) = $\frac{\sqrt{ــس - ٣}}{ــس - ٥}$ هو ....

(أ) [٣ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٣]

(جـ) [٣ ، ∞[− {٥} (د)]−∞ ، ٣] − {٥}

(٣) مدى الدالة د (ــس) = $ــس^{٢} - ٣$ هو ....

(أ) [−٣ ، ∞[(ب) [٣ ، ∞[(جـ) [٠ ، ∞[(د)]−∞ ، ٣]

(٤) إذا كانت : د (ــس) = ــس + ١ ، ر (ــس) = $ــس^{٢}$ فإن : (د ∘ ر) (٥) = ...

(أ) ٦ (ب) ٢٦ (جـ) ٥ (د) ٣٠

(٥) إذا كانت د : دالة فردية مجالها ح وكان : د (٣) = ٥
فإن : د (٣) + د (–٣) = ...

(أ) –١٠ (ب) صفر (جـ) ١٠ (د) ١٥

(٦) منحنى الدالة د (س) = س^{٢} – ٣ هو نفس منحنى الدالة ر (س) = س^{٢} بإزاحة مقدارها ثلاث وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overrightarrow{\text{وس}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{وس}'}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{وص}}$ (د) $\overrightarrow{\text{وص}'}$

(٧) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\left(\frac{٣}{أ}\right)^{س}$ دالة أسية تزايدية فإن : ....

(أ) ٠ < أ < ٣ (ب) أ ≥ ٣ (جـ) ٣ < أ < ٥ (د) أ > ٣

(٨) إذا كان : ٣$^{–س}$ = ٢ فإن : ٩^{س} + ١ = ...

(أ) ٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٢٧

(٩) إذا كانت : θ زاوية حادة فإن : قيمة المقدار لو (ظا θ) + لو (ظتا θ) = ...

(أ) –١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(١٠) إذا تقاطع منحنى الدالتين د (س) ، د$^{–١}$ (س) فى النقطة (ك ، ٢ ك – ٣)
فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١١) إذا كان : د (س) = ٢^{س} فإن : $\frac{\text{د (س + ١) + د (س)}}{\text{د (س – ١)}}$ = ...

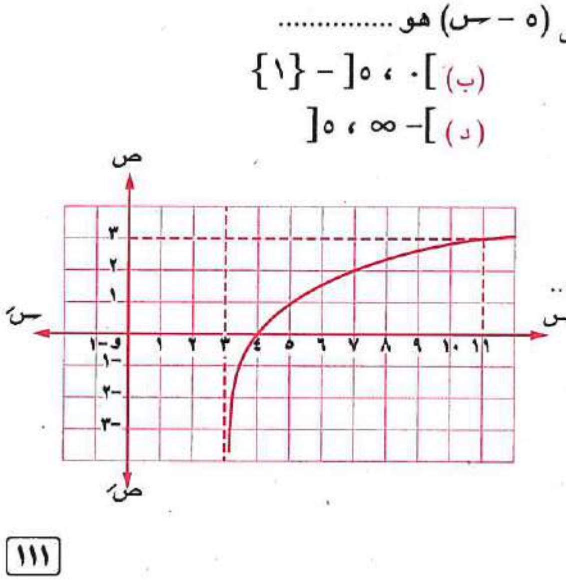
(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٤

(١٢) مجال الدالة د حيث د (س) = لو$_{س}$ (٥ – س) هو ....

(أ) [٠ ، ٥] (ب)]٠ ، ٥[– {١}
(جـ)]٠ ، ٥[(د)]–∞ ، ٥[

(١٣) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة
د (س) = لو$_{م}$ (س + ب)
فإن : د (٧) + د$^{–١}$ (٢) = ...

(أ) ٩ (ب) ٨
(جـ) ٧ (د) ٦



(١٤) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٩} = \text{..............}$

(أ) ٣　　(ب) ٦　　(جـ) $\frac{١}{٣}$　　(د) $\frac{١}{٦}$

(١٥) إذا كانت : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{أ س^{٢} + ٥}{٣ س^{٢} - ٧} = ٣$ فإن : أ = ...

(أ) ٦　　(ب) ٥　　(جـ) ٧　　(د) ٩

(١٦) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{س - ٢}{\sqrt{س + ٧} - ٣} & ، س \neq ٢ \\ ٥ & ، س = ٢ \end{cases}$

فإن : $\lim\limits_{س \to ٢} د(س) = \text{..............}$

(أ) صفر　　(ب) ٥　　(جـ) ٦　　(د) ليس لها وجود.

(١٧) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٣ س^{٢} + ظا\ ٥ س^{٢}}{جا^{٢}\ ٤ س\ جتا\ ٢ س} = \text{..............}$

(أ) $\frac{١}{٢}$　　(ب) ٢　　(جـ) ٨　　(د) $\frac{١٥}{٨}$

(١٨) $\lim\limits_{س \to ٣} \sqrt{٣ - س} = \text{..............}$

(أ) صفر　　(ب) ٢　　(جـ) ٣　　(د) غير موجودة.

(١٩) إذا كانت الدالة د : $د(س) = \begin{cases} ٣ س + أ & ، س < ٢ \\ س^{٢} - س + ١ & ، س \geq ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢

فإن : أ = ...

(أ) −١　　(ب) −٢　　(جـ) −٣　　(د) ٣

(٢٠) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٢} + ٣ س - ١٠} = \text{..............}$

(أ) ٨٠　　(ب) $\frac{٨٠}{٧}$　　(جـ) $\frac{٧}{٨٠}$　　(د) $\frac{١}{٨٠}$

(٢١) $\lim\limits_{هـ \to \text{صفر}} \frac{(٢ - ٣ هـ)^{٧} - ١٢٨}{٤ هـ} = \text{..............}$

(أ) ٣٣٦　　(ب) −٣٣٦　　(جـ) ٤٤٨　　(د) −٤٤٨

(٢٢) إذا كان : $\frac{\text{حا} أ}{٥} = \frac{٢ \text{حا} ب}{٤} = \frac{\text{حا} حـ}{٣}$ فإن : أ : ب : حـ = ...

(أ) ٥ : ٤ : ٣ (ب) ١٠ : ٨ : ٦ (جـ) ٥ : ٨ : ٣ (د) ١٠ : ٤ : ٦

(٢٣) فى Δ س ص ع تكون العلاقة : $\frac{س^٢ + ص^٢ - ع^٢}{س ص} \in$ ....

(أ)]−١ ، ١[(ب) [−١ ، ١] (جـ)]−٢ ، ٢[(د)]$-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$[

(٢٤) س ص ع مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى .... سم

(أ) ١٠ (ب) ١٥ (جـ) ٢٠ (د) ٣٠

(٢٥) عدد الحلول الممكنة للمثلث س ص ع الذى فيه :

ق (∠ س) = ٣٠° ، ص = ٩ سم ، س = ٦ سم هو ....

(أ) واحد. (ب) حلان. (جـ) لايوجد حل. (د) عدد لانهائى.

(٢٦) فى Δ أ ب حـ يكون $\frac{٣ ب}{\text{حا} ب}$ = ... نق.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٢٧) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم تساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ لتمثيل الدالة ر (س) = $\frac{٢ - س}{س + ١}$ ومن ثم عين مجالها ومداها.

---

٢ إذا كانت الدالة د (س) = $\begin{cases} م س + ل & ، س < ١ \\ ل س^٢ - س + ٧ & ، س \geq ١ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ١ وقيمتها تساوى ٥ أوجد قيمة : ل ، م

٥ محافظة الشرقية

إدارة العاشر من رمضان
توجيه الرياضيات

اختبـــار تفاعلى ⑤

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المعادلة : لو$_{٥}$ س + ٦ لو$_{س}$ ٥ = ٥ هى ....

(أ) {٢ ، ٣}　　(ب) {١٢٥ ، ٢٥}　　(جـ) {١٢٥}　　(د) {٢٥}

(٢) نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{س} + \text{جا } ٣\text{س}}{٥\text{س}}$ = ...

(أ) ٣　　(ب) $\frac{٩}{٥}$　　(جـ) $\frac{٤}{٥}$　　(د) ٤

(٣) س ، ص زاويتان متكاملتان　فإن : قتا س + $\frac{١}{\text{جا ص}}$ = ...

(أ) ١　　(ب) -١　　(جـ) صفر　　(د) خلاف ذلك.

(٤) مجال الدالة د (س) = $\sqrt{١ - \text{س}}$ هو ....

(أ)]١ ، ∞-[　　(ب)]١- ، ∞-[　　(جـ) [١ ، ∞-[　　(د) [١- ، ∞-[

(٥) إذا كانت : نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{\text{س}^{ك} - ٦٤}{\text{س}^{٣} - ٨}$ = ١٦　فإن : ك = ...

(أ) ٣　　(ب) ٦　　(جـ) ٤　　(د) ٢

(٦) إذا كان : د (س) = س^{٣} ، ر (س) = س + ٣

فإن : (د ∘ ر) (س) تكون دالة ....

(أ) أحادية.　　(ب) فردية.　　(جـ) زوجية.　　(د) خطية.

(٧) Δ س ص ع فيه : صَ^{٢} = (عَ - سَ)^{٢} + سَ عَ　فإن : ق (∠ ص) = ...

(أ) ١٢٠°　　(ب) ٩٠°　　(جـ) ٣٠°　　(د) ٦٠°

(٨) إذا كانت : (٣ ، ٣) هى نقطة تماثل منحنى الدالة د (س) = $\frac{\text{أ}}{\text{ب} - \text{س}}$ - حـ

حيث أ ∈ ح* ، ب ، حـ ∈ ح　فإن : أ$^{ب + حـ}$ = ...

(أ) ١　　(ب) -١　　(جـ) أ^{٩}　　(د) أ^{٦}

(٩) نهـا$_{س \leftarrow \infty}$ $\left(\frac{٧ - ٢\text{س}^{-١} - ٣\text{س}^{-٢}}{٥\text{س}^{-٣} + ١} - ٥^{\frac{١}{\text{س}}}\right)$ = ...

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(جـ) ١　　(د) ٦

(١٠) إذا كان : $٣^{س+٢}$ = لو ١٠٠٠ فإن : $س^{-١}$ = ...

(أ) صفر (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) ‎-٦ (د) ٦

(١١) إذا كان : لو س = $\frac{(لو ٣)^٢ - لو ٢٧}{لو ٠,٠٠٣}$ فإن : س = ...

(أ) ± ٣ (ب) ‎-٣ (جـ) ٣ (د) صفر

(١٢) عدد حلول المثلث ل م ن الذى فيه : م ن = ٩ سم ، ل ن = ٦ سم ، ق(∠ ل) = ٧٠° هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(١٣) نقطة تماثل منحنى الدالة د (س) = ١ - $(س + ٢)^٣$ هى ....

(أ) (٢ ، -١) (ب) (-١ ، ٢) (جـ) (١ ، -٢) (د) (-٢ ، ١)

(١٤) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{٢ س - ٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ‎-١ (د) $\frac{-١}{٨}$

(١٥) إذا كانت : د (س) = س + ٥ فإن : $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) س + ٥ (ب) س - ٥ (جـ) - س + ٥ (د) $\frac{س}{٥}$

(١٦) مساحة المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٤ $\sqrt{٣}$ سم هى .... $سم^٢$

(أ) ١٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٨ $\sqrt{٣}$ (د) ٤ $\sqrt{٣}$

(١٧) $لو_٣$ ١٢ - $لو_٣$ ٤ = ...

(أ) لو ٠,٠٠١ (ب) لو ١٠ (جـ) لو ٠,١ (د) لو ١٠٠

(١٨) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\frac{\pi}{٢} - س}{جتا س}$ = ...

(أ) ١ (ب) ‎-١ (جـ) صفر (د) π

(١٩) مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^٢ - ٦ س + ٩} < ١$ فى ح هى ح - ....

(أ) [١ ، ٣] (ب)]-٢ ، ٤[(جـ)]٢ ، ٤[(د) [٢ ، ٤]

(٢٠) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ + س^٢ - ٤٠}{س - ٢}$ = ...

(أ) ٦٠ (ب) ٨٠ (جـ) ٩٢ (د) ١٦

(٢١) فى Δ أ ب حـ إذا كان : حا أ : حا ب : حا حـ = ٣ : ٥ : ٧ فإن قياس أصغر زواياه لأقرب درجة هى ....°

(أ) ٢٢ (ب) ٢٣ (جـ) ٢٤ (د) ٢٥

(٢٢) إذا كانت : د (س) = ٥^س فإن قيمة س التى تحقق العلاقة :

د (س + ١) + د (س − ١) = ٢٦ هى ....

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ١

(٢٣) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{٣ س^٣ + ٢ س^٢ - ٥}{س - ١} =$ ....

(أ) ١٣ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) −١٣

(٢٤) إذا كانت : د دالة فردية فإن : $\frac{٢ \text{ د } (٣) + ٧ \text{ د } (-٣)}{١٠ \text{ د } (-٣)} =$ ....

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) −٣ (د) $-\frac{١}{٢}$

(٢٥) إذا كان : $س^{\frac{٣}{٢}} = ٨$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) خلاف ذلك.

(٢٦) Δ س ص ع محيطه = ٣٣ سم ، ٣ حا س + ٣ حا ع = ٢ ، ٤ حا ص = ١

فإن : س ع = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٢٧) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٢ - س^٢ & ، س \leq ١ \\ س & ، س > ١ \end{cases}$ فإن : $\lim\limits_{س \to ١}$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ليس لها وجود.

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ ارسم الشكل البيانى للدالة د (س) = $\frac{٨}{|س| + ١}$ ومن الرسم استنتج نوع الدالة ومداها.

---

٢ أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢ - س^٢ & ، س \leq أ \\ س & ، س > أ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

٦ محافظة المنوفية

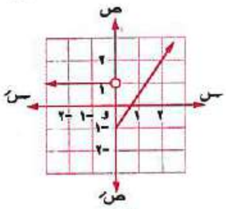
إدارة الباجور
توجيه الرياضيات

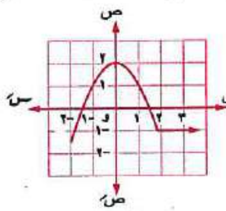
أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

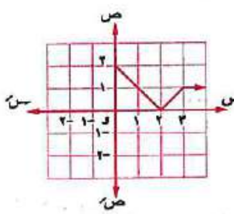
اختبار تفاعلى ⑥

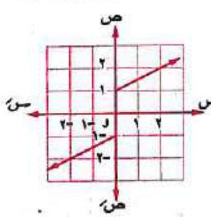
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى من الأشكال البيانية الآتية لا تمثل دالة فى س : ....


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

(٢) مجال الدالة د (س) = $\sqrt{س - ٤} - \sqrt{٤ + س}$ هو ....

(أ) $[-٤ ، ٤]$ (ب) $]-\infty ، ٤[$ (جـ) $]-٤ ، ٤[$ (د) $[٤ ، \infty[$

(٣) إذا كانت د (٢ س) = ٣ س − ١ ، ر (س + ٣) = $س^{٢}$ − ١

فإن : (د ∘ ر) (٦) = ...

(أ) ٦ (ب) ١٣ (جـ) ٨ (د) ١١

(٤) مجموعة حل المتباينة : | ٢ س − ٦ | + | ٣ − س | < ١٢ هى ....

(أ) $[-١ ، ٧]$ (ب) ح − $]-٣ ، ٩[$ (جـ) ح − $]-١ ، ٧[$ (د) $[-٣ ، ٩]$

(٥) مجموعة الحل فى ح للمعادلة : | س − ٧ | = | ٢ س − ٢ | تساوى ....

(أ) {٣ ، −٥} (ب) {٣} (جـ) {٥} (د) ∅

(٦) إذا كانت : د (س) = $س^{٤}$ جا س فإنها تكون ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) زوجية وأحادية. (د) ليست زوجية وليست فردية.

(٧) إذا كان : $٤^{س} = ٥$ فإن : $٤^{س + ١}$ = ... حيث س ∈ ح

(أ) ٢٠ (ب) ٦٢٥ (جـ) ١٢٥ (د) ١٥

(٨) إذا كان : $٣^{١٠ - ٥س} = ٧^{٢س - ٤}$ فإن : $س^{٢} - ١ =$ ....

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٧

(٩) إذا كانت : $د(س) = ٢^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق المعادلة :
$د(س + ١) - د(س - ١) = ٣٨٤$ تساوى ....

(أ) ١٦ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٢

(١٠) إذا كانت : $د(س) = \sqrt[٥]{س}$ فإن : $د^{-١}(٢) =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٣٢ (د) ١

(١١) إذا كان : $لو_{٥}\, س = ٤$ فإن : قيمة $لو_{٥} \left(\frac{س}{٥}\right) =$ ....

(أ) ٣ (ب) ١٢٥ (جـ) ٢٥ (د) ٢

(١٢) إذا كان : $لو_{ص}\, ٣ = س - ١$ فإن : ص = ...

(أ) $٣\, ص^{س}$ (ب) $\frac{١}{٣}\, ص^{س}$ (جـ) $\frac{١}{٣}\, س^{ص}$ (د) $٣\, س^{ص}$

(١٣) إذا كان : $لو_{٢}\, س\, ص = ٨$
فإن : $٣\, لو_{٢}\, س + ٤\, لو_{٢}\, ص - لو_{٢}\, س\, ص^{٢} =$ ....

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

(١٤) $\underset{س \to ١}{نهـا} \frac{س^{٢} + ١}{س + ١} =$ ....

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) غير موجودة.

(١٥) $\underset{س \to -٢}{نهـا} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س - ٢} =$ ....

(أ) $\frac{٨٠}{٧}$ (ب) $\frac{١٦}{٧}$ (جـ) ٨٠ (د) ١٦

(١٦) $\underset{س \to ٥}{نهـا} \frac{س - ٥}{\sqrt{س + ٤} - ٣} =$ ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٣٠ (د) غير موجودة.

(١٧) إذا كان : $\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{س^{ن} - ٣٢}{س - ٢} = ل$ فإن : ن ، ل تساوى ....

(أ) ٦ ، ٣٢ (ب) ٦ ، ١٩٢ (جـ) ٥ ، ٨٠ (د) ٥ ، ١٦

(١٨) $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{س^{-١} + ٣ س^{-٢} + ٧}{٧ س^{-٢} - س^{-٣} + ١} =$ ....

(أ) ٥ (ب) $\frac{٣}{٧}$ (جـ) ٧ (د) غير موجودة.

(١٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{٣ س \,جا س + س \,طا ٥ س}{س^٢ - ٢ \,طا ٣ س^٢} =$ ....

(أ) $-\frac{٨}{٥}$ (ب) $-\frac{٥}{١٧}$ (جـ) $-\frac{٨}{١٧}$ (د) -١

(٢٠) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٣ س - ٢ & ، س \le -٢ \\ أ س + ب & ، -٢ < س < ٥ \\ س^٢ - ١٢ & ، س \ge ٥ \end{cases}$

متصلة عند س = −٢ ، س = ٥ فإن : أ + ب = ...

(أ) −٢ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٢

(٢١) الدالة د : د (س) = ٤ س^٣ + $\frac{س}{س^٢ - ٩}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب) ح − {٠}

(جـ) ح − {٣ ، −٣} (د) ح − {٣ ، −٣ ، ٠}

(٢٢) طول أصغر ضلع فى المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ أ) = ٥٤° ٣٣َ

، ق (∠ ب) = ٤٩° ٢٢َ ، أ = ١٢٤,٥ سم يساوى .... لأقرب سم.

(أ) ٥٥ (ب) ٨٤ (جـ) ١٤٨ (د) ١١٦

(٢٣) مثلث ل م ن فيه : لَ = ٨,٤ سم ، ق (∠ م) = ٧٥° ، ق (∠ ن) = ٥٠°

فإن مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن هو .... لأقرب سم^٢

(أ) ٨٣ (ب) ٧٠ (جـ) ٥٣ (د) ٣٥

(٢٤) إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ فإن : $\frac{بَ}{نق}$ ∈ ....

(أ)]٠ ، ٢[(ب)]−٢ ، ٠[(جـ)]−٢ ، ٢[(د) [−٢ ، ٢]

(٢٥) إذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ = ٢٤ سم^٢ فإن : (بَ^{٢} + حـَ^{٢} − أَ^{٢}) طا أ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٦

(٢٦) أ ب حـ مثلث فيه : جا أ = $\frac{٢}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٢}$ جا حـ فإن حـَ : أَ : بَ = ...

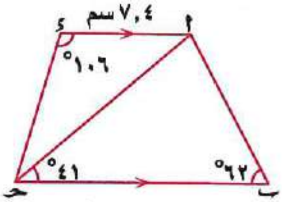
(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٤ : ٢ : ٣ (جـ) ٣ : ٢ : ١ (د) ٢ : ٣ : ١

(٢٧) أ ب جـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أء} // \overline{بجـ}$

، أء = ٧,٤ سم ، ق(∠ب) = ٦٢°

، ق(∠ء) = ١٠٦° ، ق(∠أجـب) = ٤١°

فإن مساحة المثلث أ ب جـ لأقرب سم^{2} = ...



(أ) ٣٩ (ب) ٩٣ (جـ) ٦٢ (د) ٧٥

ثانيًا **الأسئلة المقالية**

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) ارسم منحنى الدالة د : د(س) = |س^{2} − ٤| محددًا مداها وفترات اطرادها ونوعها من حيث زوجية أو فردية.

---

(٢) إذا كانت : $\lim_{س \to \infty}$ نهـا $\left(\sqrt{أس^{2} + ٣ب س + ٥} - ٢س\right)$ = ٣ فما قيمة كل من : أ ، ب

٧ محافظة الغربية

إدارة غرب طنطا (علمى)
توجيه الرياضيات

أولًا **أسئلة الاختيار من متعدد** (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

اختبار تفاعلى (٧)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د(س) = جا س (ب) ر(س) = س^{2}

(جـ) ق(س) = س^{3} (د) هـ(س) = س^{2} + س

(٢) نهـا$_{س \to ٢}$ (٢أ) = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٢أ (د) ١٢

(٣) Δ أ ب جـ مساحة سطحه ٢١$\sqrt{٣}$ سم^{2} ، أ = ٦ سم ، ق(∠ب) = ٦٠°

فإن : جـ = ... سم

(أ) ١٤ (ب) ٧ (جـ) ٧$\sqrt{٣}$ (د) ١٤$\sqrt{٣}$

(٤) مجموعة حل المتباينة : |٢ − س| ≥ ٤ هى ....

(أ) ح − [−٢ ، ٦] (ب) ح −]−٢ ، ٦[(جـ)]−٢ ، ٦[(د) [−٢ ، ٦]

(٥) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٧ + ١٢٨}{س^٤ - ١٦}$ = ...

(أ) ١٤　　(ب) ٩　　(جـ) −٩　　(د) −١٤

(٦) المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د (س) = |س − ٣| − ٤ ومحور السينات = ... وحدة مساحة.

(أ) ٨　　(ب) ٧　　(جـ) ١٤　　(د) ١٦

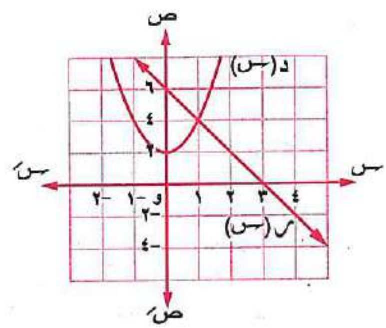
(٧) مجال الدالة د : د (س) = لو$_{(٣ - س)}$ س هو ....

(أ)]٠ ، ٣[　　(ب) [٠ ، ٣] − {٢}

(جـ)]٠ ، ٣[− {٢}　　(د) [٠ ، ٣]

(٨) الشكل المقابل يبين منحنى الدالتين د ، ر

فإن : (ر ∘ د) (١) = ...



(أ) ٦

(ب) ٥

(جـ) −٢

(د) ٤

(٩) $\lim_{س \to ٠}$ ٣ س قتا ٦ س = ...

(أ) ٦　　(ب) $\frac{١}{٢}$　　(جـ) ١٨　　(د) ٢

(١٠) عدد حلول Δ س ص ع الذى فيه : س َ = ٥ سم ، ص َ = ٦ سم ، ق(∠س) = ٧٠° يساوى ....

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) ٣

(١١) إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة د$^{-١}$ فى النقطة (ك ، ٢ ك − ٣) فإن : ك = ...

(أ) ١　　(ب) ٣　　(جـ) −٣　　(د) −١

(١٢) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س + ٣ &، س > أ \\ ٣ س - ٥ &، س < أ \end{cases}$ ، $\lim_{س \to أ}$ د (س) موجودة

فإن : أ = ...

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) ٤

(١٣) مجموعة حل المعادلة : $(٢س - ١)^{٤} = ٨١$ فى ح هى ....

(أ) {٢ ، -١} (ب) {-٢ ، -١} (ج) {٢ ، ١} (د) {-٢ ، ١}

(١٤) إذا كان : أ > ب > صفر فإن : $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{س^{أ}}{س^{ب}} =$ ....

(أ) أ - ب (ب) صفر (ج) ∞ (د) - ∞

(١٥) نقطة تماثل الدالة د $(س) = \frac{٢س + ١}{س + ١}$ هى ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (-٢ ، ١) (ج) (٢ ، -١) (د) (-١ ، ٢)

(١٦) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس △ أ ب ح = ٣ سم وكان :
حا أ + حا ب + حا ح = ٢ فإن محيط △ أ ب ح = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (ج) ١٢ (د) ٢٤

(١٧) إذا كانت : د $(٣س - ١) = ٣^{س}$ فإن : د (٥) = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (ج) ٢٧ (د) ٨١

(١٨) $\underset{س \to ٥}{نهـا} \frac{\sqrt{٢س - ١} - ٣}{س^{٢} - ٢٥} =$ ....

(أ) ٣٠ (ب) $\frac{١}{٣٠}$ (ج) $\frac{-١}{٣٠}$ (د) $\frac{١}{٥}$

(١٩) فى △ أ ب ح إذا كان : $ب^{٢} = أ^{٢} + ح^{٢} + أ ح$ فإن : ق (∠ب) = ...

(أ) ١٢٠° (ب) ٦٠° (ج) ١٥٠° (د) ٣٠°

(٢٠) إذا كانت : د $(س) = ٢^{س}$ فإن مجموعة حل المعادلة د (س + ١) + د (س - ١) = ٤٠
هى ....

(أ) {٢} (ب) {٤} (ج) {٨} (د) {١٦}

(٢١) أ ب ح مثلث فيه : ق (∠ح) = ١٢٠° ، أ = ٣ سم ، ب = ٥ سم
فإن : ح = ...

(أ) ٤ (ب) ٧ (ج) ٨ (د) ٩

(٢٢) إذا كان : د $(أ) = ٢^{أ}$ فإن : $لو_{٢}$ د (أ) = ...

(أ) ٢ (ب) د (أ) (ج) أ (د) $\frac{١}{٢أ}$

(٢٣) إذا كانت : $\lim_{س \to \infty} \frac{(أ - ١) س^٣ - ٤}{٥ س^٣ - ٤} = ١$ فإن : أ = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) −٦ (د) −٨

(٢٤) إذا كانت د دالة فردية وكانت س × د (− س) + س^٣ × د (س) = ٨

فإن : د (٣) = ...

(أ) $\frac{-١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٣ (د) −٣

(٢٥) مجموعة حل المعادلة : لو س + لو (س + ٩) = ١ في ح هي ....

(أ) {١٠ ، ١} (ب) {٩ ، ١} (جـ) {١} (د) {٩}

(٢٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٢ س + ٣)^٢ - ٢٧}{٢ س} = $ ....

(أ) ٢٧ (ب) ١٨ (جـ) ٩ (د) ٣

(٢٧) في أي مثلث أ ب حـ يكون : $\frac{جا (أ + ب)}{جا أ + جا ب} = $ ....

(أ) $\frac{حـ}{أ + ب}$ (ب) $\frac{أ}{ب + حـ}$ (جـ) $\frac{ب}{أ + حـ}$ (د) ١

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = $\begin{cases} |س| & ، س \leq ٠ \\ س^٢ & ، س > ٠ \end{cases}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة

وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك

---

٢ أوجد قيمة أ التي تجعل الدالة متصلة عند س = ٢

حيث د (س) = $\begin{cases} س^٢ - ١ & ، س \leq ٢ \\ س - ٢ أ & ، س > ٢ \end{cases}$

٨ محافظة الدقهلية

إدارة ميت غمر
توجيه الرياضيات

اختبــــار تفاعلى ⑧

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا تقاطع منحنى الدالتين د ، $د^{-1}$ فى النقطة ($ك^{٢}$ ، ١) فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ± ٢ (جـ) ± ١ (د) ± $\sqrt{٣}$

② مجموعة حل المعادلة : | ٢ س − ١ | + ٥ = ٠ فى ح هى ....

(أ) {−٢ ، ٣} (ب) {−٢} (جـ) {٣} (د) ∅

③ إذا كان : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ل}{س - ٣}$ = م فإن : (ل ، م) = ...

(أ) (٣ ، ٣) (ب) (−٩ ، ٠) (جـ) (٩ ، ٦) (د) (٠ ، ٠)

④ $\frac{١}{لو_{٥} ٣٠} + \frac{١}{لو_{٣} ٣٠} + \frac{١}{لو_{٢} ٣٠}$ = ...

(أ) ٣٠ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) −١

⑤ الدالة الأسية د (س) = $أ^{س}$ ، ٠ < أ < ١ تكون د (س) > ١ عندما س ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح_{-}$ (جـ) $ح_{+}$ (د) ص

⑥ فى Δ س ص ع إذا كان : ٦ جا س = ٤ جا ص = ٣ جا ع
فإن : سَ : صَ : عَ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٦ : ٤ : ٣ (جـ) ٣ : ٤ : ٦ (د) ٤ : ٣ : ٦

⑦ مدى الدالة د (س) = $\frac{س - ٣}{س}$ حيث س ≠ ٠ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٠} (جـ) ح − {١} (د) {٣}

⑧ عدد حلول المثلث أ ب جـ الذى فيه : ق(∠ أ) = ٣٠° ، أ = ٧ سم ، ب = ١٦ سم
يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(٩) $\lim_{س \to \infty} \left(٣ + \frac{٢}{س} \right)$ = ...

(أ) ∞ (ب) $-\infty$ (جـ) صفر (د) ٣

(١٠) جميع الدوال التالية أحادية على مجالها ماعدا د (س) = ...

(أ) س (ب) س + ٦ (جـ) $س^٣$ (د) $(س - ٢)^٢$

(١١) مجال الدالة حيث د (س) = $لو_{س - ٦}$ (٨ - س) هو ....

(أ)]٦ ، ٨[(ب) ح -]٦ ، ٨[(جـ)]٦ ، ٨[- {٧} (د) [٦ ، ٨]

(١٢) إذا كان : $(\sqrt{٣})^{|س - ١|} = ٩$ فإن : س ∈ ....

(أ) {-٣} (ب) {٥} (جـ) {-٣ ، ٥} (د) ∅

(١٣) مجموعة حل المتباينة : | ٢ س - ٤ | - | ٢ - س | < ٣ هى ....

(أ) ح - [-١ ، ٥] (ب) ح -]-١ ، ٥[(جـ) [-١ ، ٥] (د)]-١ ، ٥[

(١٤) إذا كان : أ ب حـ ء متوازى أضلاع فإن : حتا أ + حتا ب = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) -١ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٥) Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع طول ضلعه ٩ سم فإن مساحة الدائرة المارة برؤوسه تساوى .... π سم^٢

(أ) $٣\sqrt{٣}$ (ب) $٦\sqrt{٣}$ (جـ) ١٨ (د) ٢٧

(١٦) إذا كان : Δ أ ب حـ محيطه ٢٤ سم وكان : جا أ + جا ب = ٣ جا حـ

فإن : حـَ = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(١٧) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س - ٢}$ = ...

(أ) ١ (ب) غير موجودة (جـ) ٢ (د) صفر

(١٨) فى المثلث س ص ع إذا كان : سَ = صَ فإن : حتا س = ...

(أ) $\frac{٢ صَ}{عَ}$ (ب) $\frac{٢ عَ}{صَ}$ (جـ) $\frac{عَ}{٢ سَ}$ (د) $\frac{صَ}{٢ سَ}$

(١٩) إذا كان : د ، ر دالتين حيث د (س) = ٣ س + ١ ، ر (س) = $\text{س}^{٢}$ − ٥

فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) −٥ (د) −٢

(٢٠) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^{٥} + \text{س}^{٢} - ٣٦}{\text{س} - ٢}$ = ...

(أ) ٨٠ (ب) ٤ (جـ) ٨٤ (د) ٣٦

(٢١) مجموعة حل المعادلة : $(٢\,\text{س} - ٢٥)^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$ في ح هي ....

(أ) {−١} (ب) {٢٦} (جـ) {−١ ، ٢٦} (د) ∅

(٢٢) إذا كان : لو ٢ = س ، لو ٣ = ص فإن : لو ٦ = ...

(أ) س ص (ب) س + ص (جـ) س − ص (د) لو س + لو ص

(٢٣) إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{٤\,\text{أ}\,\text{س}^{\text{ن}} - ٤\,\text{س} + ٥}{٣ - ٩\,\text{س} + ٨\,\text{س}^{٢}} = ٣$ فإن : ن + أ = ...

حيث أ ، ن ∈ ح

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢٤) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{٣\,\text{س}^{-٣} - ٢\,\text{س}^{-٢} + ١}{٢\,\text{س}^{-٣} + ٣\,\text{س}^{-٢} - ١}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ١ (د) −١

(٢٥) $\lim\limits_{\text{س} \to \pi} \dfrac{\text{جا}\,\text{س}}{\pi - \text{س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\pi^{٢}$ (جـ) π (د) $-\pi$

(٢٦) إذا كان : $\text{لو}_{٢}\,\text{لو}_{٣}\,\text{س} = ١$ فإن : س = ...

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ١

(٢٧) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{١ - \text{جتا}\,٨\,\text{س}}{٤\,\text{س}}$ = ...

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) صفر

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) إذا كانت الدالة $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{ك}\,\text{س} - ٢ & ،\ \text{س} > ٢ \\ ٤ & ،\ \text{س} = ٢ \\ ٥\,\text{ك} + \text{م}\,\text{س} & ،\ \text{س} < ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢

أوجد قيمة : ك ، م

٢ ارسم الشكل البيانى للدالة د (س) = | س٢ – ٢ س – ٣ | ومن الرسم أوجد مدى الدالة وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

٩ محافظة دمياط — إدارة كفر البطيخ

اختبار تفاعلى ٩

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) نقطة رأس المنحنى د : د (س) = | س + ٣ | + ٢ هى ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (–٣ ، ٢) (جـ) (٣ ، –٢) (د) (–٣ ، –٢)

(٢) إذا كانت د : د (س) = أ^س دالة أسية فإن : أ ∈ ....

(أ) ح (ب) ح₊ – {١} (جـ) ح₋ (د) ح₊

(٣) نهـــا (س ← ٢) (٢ أ٢) = ...

(أ) ١٨ (ب) ٢ أ٢ (جـ) ٦ (د) ٣

(٤) المثلث س ص ع فيه : $\frac{\text{س}}{\text{جا س}}$ = ٦ فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٥) إذا كانت : د دالة مجالها هو ح – {١} ، مداها ح – {٣} حيث د (س) = $\frac{\text{٣ س – ٢}}{\text{س – ب}}$

فإن : ب = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) –١

(٦) نهـــا (س ← ٠) ٢ س قتا ٤ س = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) $\frac{١}{٢}$

(٧) لو ٥ + لو ٢ = ...

(أ) لو ٧ (ب) ١ (جـ) ٧ (د) صفر

(٨) إذا كان : د (س) = س٣ + ٧ فإن : د^{-١} (–١) = ...

(أ) ٦ (ب) ٢ (جـ) –٢ (د) غير معرفة

(٩) إذا كان : لو_س ٤ = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) –٢ (جـ) ± ٢ (د) ٢

(١٠) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٧ - ١}{س - ١}$ = ...

(أ) ٦ (ب) غير موجودة. (جـ) صفر (د) ٧

(١١) الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) $د_١(س) = س + ٢$ (ب) $د_٢(س) = س^٢$

(جـ) $د_٣(س) = |س|$ (د) $د_٤(س) = ٥$

(١٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{-٣} + ٣ س^{-٢} + ١}{س^{-٢} + س^{-١} + ٣}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) $\frac{١}{٣}$

(١٣) مجموعة الحل للمعادلة : $س^{\frac{٢}{٣}} = ٢٥$ فى ح هى ....

(أ) $\{٥\}$ (ب) $\{٥ ، -٥\}$

(جـ) $\{١٢٥\}$ (د) $\{١٢٥ ، -١٢٥\}$

(١٤) عدد حلول Δ أ ب حـ الذى فيه : ق(∠ أ) = ٦٠° ، أ = ٧ سم ، حـ = ٩ سم

هو ....

(أ) واحد (ب) اثنان (جـ) صفر (د) ثلاثة

(١٥) إذا كانت د (س) دالة حقيقية مجالها [-٢ ، ٣] فإن مجال الدالة ر (س) = د (س - ٢)

هو ....

(أ) [-٢ ، ٣] (ب) [-٤ ، ١] (جـ) [٠ ، ٥] (د) ح

(١٦) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٦ سم ، ١٠ سم ، ١٤ سم

يساوى ....°

(أ) ١٢٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ١٣٥ (د) ٦٠

(١٧) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س - ٤}}$ هو ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]٤ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ٤] (د)]-∞ ، ٤[

(١٨) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ = ...

(أ) -٦ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ٦

(١٩) إذا كانت مساحة المثلث أ ب جـ = ١٢ سم^{٢} فإن : (ب^{٢} + جـ^{٢} − أ^{٢}) ظا أ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٦

(٢٠) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{س^{٢} + س}$ = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) $-\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٢١) لو$_{٣}$ ٥٤ − لو$_{٣}$ $\frac{٨}{١٥}$ + لو$_{٣}$ $\frac{٤}{٥}$ = ...

(أ) لو ٣ (ب) ٤ (جـ) ٢٧ (د) ٣

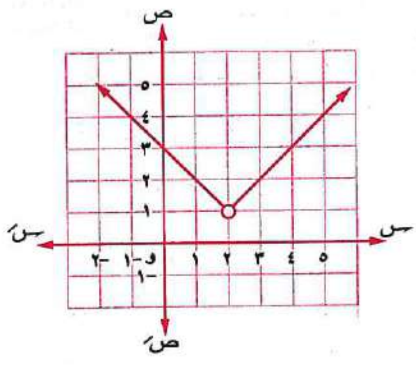
(٢٢) إذا كان : ٣^{س} = ٥ فإن : ٣$^{س + ٢}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٤٥ (د) ٩٠

(٢٣) لو (حتا θ) + لو (قا θ) = ... حيث θ زاوية حادة.

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

(٢٤) فى الشكل المقابل :



$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

(أ) غير موجودة.

(ب) ١

(جـ) −١

(د) ٢

(٢٥) فى المثلث س ص ع يكون : حتا (س + ص) = ...

(أ) حتا س + حتا ص (ب) حا س + حا ص

(جـ) حتا ع (د) − حتا ع

(٢٦) المثلث أ ب جـ فيه : ٣ حا أ = ٦ حا ب = ٤ حا جـ فإن : أ : ب : جـ = ...

(أ) ٤ : ٢ : ٣ (ب) ٢ : ٣ : ٤ (جـ) ٤ : ٣ : ٢ (د) ٣ : ٦ : ٤

(٢٧) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}(١ - س)}{٢ س - ٢}$ = ...

(أ) −١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{-١}{٢}$ (د) ١

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ر (س) = د (س + ١) ومن الرسم أوجد المجال والمدى وحدد هل الدالة زوجية أو فردية أو غير ذلك.

---

(٢) أوجد قيمتى م ، ك التى تجعل الدالة د متصلة عند س = ٢ حيث :

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٣م & ، س < ٢ \\ ٧ & ، س = ٢ \\ ٥س + ك & ، س > ٢ \end{cases}$$

١٠ محافظة كفر الشيخ

إدارة بلطيم
توجيه الرياضيات

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلى ١٠

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س - ١}$ ، ر (س) = $\sqrt{١ - س}$

فإن : مجال (د + ر) هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب)]−∞ ، ١] (ج) [−١ ، ∞[(د) {١}

(٢) فى Δ س ص ع إذا كان : ق (∠ س) : ق (∠ ص) : ق (∠ ع) = ٢ : ٣ : ١

فإن : سَ : صَ : عَ = ...

(أ) ٣ : $\sqrt{٢}$: ١ (ب) $\sqrt{٣}$: ٢ : ١ (ج) $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$: ١ (د) ٢ : ٣ : ١

(٣) إذا كان : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ل}{س - ٣}$ = م فإن : (ل ، م) = ...

(أ) (٣ ، ٣) (ب) (−٩ ، ٠) (ج) (٩ ، ٦) (د) (٠ ، ٠)

(٤) حاصل ضرب جذرى المعادلة : س^{٢} − ٣ |س| − ١٠ = ٠ يساوى ....

(أ) −٢٥ (ب) −١٥ (ج) ١٠ (د) ٢٥

(٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢س + ٥ ظا ٣س}{س}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١٥ (ج) ٢١ (د) ١٧

(٦) مجموعة حل المعادلة : (لو سـ)^{٢} − لو سـ^{٢} = صفر هى ....

(أ) {١ ، ١٠}　(ب) {١ ، ١٠٠}　(جـ) {١٠ ، ١٠٠}　(د) {٠ ، ١٠٠}

(٧) نهـا$_{\text{سـ} \leftarrow ٢}$ $\dfrac{\text{سـ}^{٥} - ٣٢}{\text{سـ}^{٢} + ٣\,\text{سـ} - ١٠}$ = ...

(أ) ٨٠　(ب) $\frac{٨٠}{٧}$　(جـ) $\frac{٧}{٨٠}$　(د) $\frac{١}{٨٠}$

(٨) إذا كانت : ٥$^{\text{سـ} + ٢}$ = $\sqrt[٤]{١٢٥}$　فإن : سـ = ...

(أ) ٣　(ب) صفر　(جـ) −١　(د) $\frac{-٥}{٤}$

(٩) عدد الحلول الممكنة للمثلث سـ ص ع الذى فيه :

ق (∠ سـ) = ٣٠° ، سـَ = ٦ سم ، صَ = ٩ سم يساوى ....

(أ) ١　(ب) ٢　(جـ) ٠　(د) عدد لانهائى

(١٠) إذا كانت د ، ر دالتين حيث د (سـ) = سـ^{٣} ، ر (سـ) = سـ^{٢} + ٢

فإن : (ر ∘ د) (سـ) هى دالة ....

(أ) أحادية.　(ب) فردية.　(جـ) زوجية.　(د) خطية.

(١١) نهـا$_{\text{سـ} \leftarrow ١}$ $\dfrac{\text{سـ}^{٢٠} + \text{سـ}^{١٠} - ٢}{\text{سـ} - ١}$ = ...

(أ) ٣٠　(ب) ٢٠　(جـ) ١٠　(د) ١

(١٢) مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{\text{سـ}^{٢} - ٢\,\text{سـ} + ١}$ ≤ ٤ هى ....

(أ) [−٣ ، ٥]　(ب) ح −]−٣ ، ٥[　(جـ)]−٣ ، ٥[　(د) ح − [−٣ ، ٥]

(١٣) الدالة د (سـ) = | سـ + ٢ | تكون تناقصية فى الفترة ....

(أ)]٠ ، ∞[　(ب)]٢ ، ∞[　(جـ)]−٢ ، ∞[　(د)]−∞ ، −٢[

(١٤) إذا كان محيط الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ = ٢ π سم

فإن : أَ قتا أ + بَ قتا ب + حـَ قتا حـ = ... سم

(أ) ٢　(ب) ٤　(جـ) ٦　(د) ٨

(١٥) إذا كان : لو$_{\text{سـ}}$ (٦ − سـ) = ٢　فإن : لو (٥ سـ) = ...

(أ) ١٠　(ب) ١　(جـ) ٢　(د) ٣

(١٦) مجموعة حل المعادلة : ٤$^{\text{سـ}}$ − ٢$^{\text{سـ}}$ − ٢ = صفر ....

(أ) {١}　(ب) {−١ ، ٢}　(جـ) {٢}　(د) {−١}

(١٧) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٣ س^{٢} + أ س - ٢ & \text{عند } س < ٣ \\ ٢ س + ب & \text{عند } س > ٣ \end{cases}$

وكانت : $\lim_{س \to ٣}$ د (س) = ١٦ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) −١ (د) ١٣

(١٨) فى المثلث أ ب جـ إذا كان : جتا ب = $\frac{جـ}{٢ أ}$ فإن : المثلث أ ب جـ فيه ....

(أ) جـ = أ (ب) جـ = ب (جـ) أ = ب (د) أ = ٢ ب

(١٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{-٣} + ٢ س^{-٢} + ١}{٢ س^{-٣} + س^{-١} + ٣}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) $\frac{١}{٣}$

(٢٠) إذا كان : $س^{\frac{٥}{٣}} = ٢ ص^{\frac{٤}{٣}} = ٣٢$ فإن : س + ص = ...

(أ) ١٦ (ب) صفر (جـ) ١٦ ، −١٦ (د) صفر ، ١٦

(٢١) أ ب جـ مثلث فيه : $أ^{٢} + ب^{٢} - جـ^{٢} + \sqrt{٣}\, أ ب = ٠$ فإن : ق (∠ جـ) = ...

(أ) ٣٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٠

(٢٢) الدالة العكسية للدالة : ص = ٢ س + ١ هى ....

(أ) س = ص + ١

(ب) ص = ٢ س + ١

(جـ) ص = $\frac{١}{٢}$ س − ١

(د) ص = $\frac{١}{٢}$ (س − ١)

(٢٣) فى المثلث س ص ع يكون : $\frac{٢ س}{جا س}$ = ... نق

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(٢٤) $\lim_{س \to ٠}$ ٥ س ظتا ٢ س = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ١٠ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) صفر

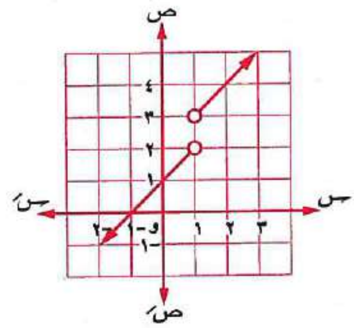
(٢٥) مجموعة حل المعادلة : $٧^{س^{٢}} = ٤٩^{س + ٤}$ هو ....

(أ) {−٢} (ب) {−٢ ، ٤} (جـ) {−٢ ، ٣} (د) {٢ ، −٤}

(٢٦) مجال الدالة د : د (س) = $لو_{١ - س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١ (جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

(٢٧) الشكل المقابل هو التمثيل البياني للدالة د



فإن : $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ د(س) = ...

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ١ (د) غير موجودة.

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ ارسم منحنى الدالة د : د(س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$ ومن الرسم أوجد مدى الدالة وابحث اطرادها.

---

٢ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \left(\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٥} - ٣٢} + \frac{س^{٤} - ١٦}{س^{٧} - ١٢٨} \right)$

١١ محافظة البحيرة

إدارة النوبارية
توجيه الرياضيات

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجال الدالة د(س) = $\frac{٢}{|س| - ٢}$ هو ....

(أ) {−٢} (ب) ح − {−٢} (جـ) ح − {±٢} (د) ح

(٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س + ٢}{س^{٢} - ٤}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ∞ (د) −∞

(٣) △ أ ب جـ فيه : أ = ١٢ جا أ فإن محيط الدائرة الخارجة للمثلث = ... سم

(أ) ٣ π (ب) ٦ π (جـ) ٩ π (د) ١٢ π

(٤) جميع الدوال الآتية دوال فردية ما عدا د(س) = ...

(أ) قتا س (ب) طا س (جـ) قا س (د) $س^{٣}$

(٥) إذا كانت : $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - أ^{٥}}{س - أ}$ = ٨٠ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ±٢ (د) ±٤

(٦) Δ أ ب حـ فيه : أَ = ٤ سم ، بَ = ٥ سم ، جتا حـ = $\frac{٢}{٥}$

فإن : حَ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

(٧) مجموعة حل المعادلة : $(س + ٢)^{\frac{٢}{٣}}$ = ٤ هي ....

(أ) {٦} (ب) {٩} (جـ) {−١٠ ، ٦} (د) {±٩}

(٨) $\lim\limits_{س \to \pi} \frac{جاس}{س - \pi}$ = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) π

(٩) Δ أ ب حـ فيه : $\frac{جا أ}{٤} = \frac{جا ب}{٣} = \frac{٢ جا حـ}{٥}$ فإن : أَ : بَ : حَ = ...

(أ) ٨ : ٥ : ٦ (ب) ٤ : ٣ : ٥ (جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٨ : ٦ : ٥

(١٠) إذا كانت : د (٣) = ٨ ، ر (٧) = ٣ فإن : (د ∘ ر) (٧) = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٨

(١١) $\lim\limits_{س \to صفر} \frac{(٢س + ١)^{٥} - ١}{٣س}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) $\frac{١٠}{٣}$ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(١٢) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ حيث : أَ = ٥ سم ، بَ = ٦ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠°

هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٣) $لو_{ب} ٨ \times لو_{٢} ب^{٣}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

(١٤) إذا كان : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{(ك - ٢)س^{٢} + ٦س - ٥}{م س - ٢} = ٢$ فإن : ك + م = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٢

(١٥) Δ أ ب حـ محيطه = ٢٧ سم ، جا أ : جا ب : جا حـ = ٢ : ٣ : ٤

فإن : أَ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٢

(١٦) الدالة د (س) = $(س - ١)^{٢}$ + ٣ تناقصية عندما س ∈ ....

(أ)]٣ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٣[(جـ)]١ ، ∞[(د)]−∞ ، ١[

(١٧) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{أ س} + ٢ & ، \text{س} > ١ \\ \text{س} + \text{ب} & ، \text{س} < ١ \end{cases}$ وكانت : $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}}$ د (س) موجودة

فإن : أ − ب = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) −١ (د) صفر

(١٨) Δ أ ب حـ فيه : أ = ب فإن : حتا ب = ...

(أ) $\frac{\text{حـ}}{٢ \text{أ}}$ (ب) $\frac{\text{أ}}{٢ \text{حـ}}$ (جـ) $\frac{\text{ب}}{٢ \text{أ}}$ (د) $\frac{\text{أ}}{٢ \text{ب}}$

(١٩) إذا كانت : د (س) = $\text{س}^٣ + ١$ فإن : $\text{د}^{-١}$ (٢) = ...

(أ) ٩ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

(٢٠) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٣ + \text{س}^٢ - ٢}{\text{س} - ١}$ = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢١) مجموعة حل المعادلة : لو (س + ١) − لو (س − ١) = ٢ لو $\sqrt{٣}$ هى ....

(أ) {٣} (ب) {١ ، ٢} (جـ) {٢} (د) {٢ ، ٣}

(٢٢) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س} + \text{جا } ٢ \text{س}}{\text{س جا } ٣ \text{س}}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ١

(٢٣) إذا كانت : $٢^{\text{س} + ٢} = ٦$ فإن : س = ...

(أ) $\text{لو}_٦ ٢ - ٣$ (ب) $\text{لو}_٢ ٦ - ٣$ (جـ) $\text{لو}_٢ ٣ - ٦$ (د) $\text{لو}_٣ ٢ - ٦$

(٢٤) مجموعة حل المتباينة : | ٣ − س | ≤ ٥ هى .... حيث (س ∈ ح)

(أ) [−٢ ، ٨] (ب) ح − [−٢ ، ٨] (جـ)]−٢ ، ٨[(د) ح −]−٢ ، ٨[

(٢٥) الدالة الأسية : د (س) = $\text{أ}^{\text{س}}$ تكون تناقصية عندما أ ∈ ....

(أ)]١ ، ∞[(ب)]صفر ، ١[(جـ)]−∞ ، ١[(د)]−١ ، ١[

(٢٦) مجموعة حل المعادلة : $(\text{لو س})^٢ + \text{لو س}^٢$ = صفر هى ....

(أ) {١ ، ١٠} (ب) {صفر ، ١٠٠}

(جـ) {صفر ، $\frac{١}{١٠}$} (د) {١ ، $\frac{١}{١٠٠}$}

(٢٧) إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٥ = ص فإن : لو ١٥ = ...

(أ) س + ص (ب) س ص (جـ) $\frac{س}{ص}$ (د) س − ص

ثانيًا | الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) ارسم الشكل البيانى للدالة د (س) = $\frac{س^{٤}}{|س|}$ ومن الرسم عين المدى وابحث الأطراد مبينًا نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

---

(٢) ابحث اتصال الدالة : د (س) = $\begin{cases} \frac{١ - جتا س + جا ٢ س}{س} & ، س > ٠ \\ ٣ - جتا س & ، س \le ٠ \end{cases}$ عند س = صفر

١٢ محافظة الفيوم

إدارة غرب الفيوم
توجيه الرياضيات

أولًا | أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة : د (س) = $(س - ٢)^{٢} + ٣$ تكون متزايدة فى الفترة ....

(أ)]٣ ، ∞[(ب)]٣ ، ∞[(جـ)]٢ ، ∞[(د)]٢ ، ٣]

(٢) مدى الدالة : د (س) = $\frac{٢ س^{٣} - ٢ س}{س^{٢} - ١}$ هو ....

(أ) ح − {١ ، −١} (ب) {٢ ، −٢}

(جـ) $ح^{+}$ (د) ح − {٢ ، −٢}

(٣) إذا كانت : د ، ر دالتين حيث د (س) = $س^{٣}$ ، ر (س) = س + ٣

فإن : (ر ∘ د) هى دالة ....

(أ) أحادية (ب) فردية (جـ) زوجية (د) خطية

(٤) إذا كانت م مساحة دائرة وكان س طول نصف قطر الدائرة وكان : م = π $س^{٢}$

أى أن م دالة فى س فإن مجالها ....

(أ) ح (ب) ح − {٠} (جـ) $ص^{+}$ (د) $ح^{+}$

(٥) منحنى الدالة : د (س) = | س + ٣ | − ٢ متماثل حول المستقيم ....

(أ) س = ٣ (ب) س = −٣ (جـ) ص = ٣ (د) ص = −٣

(٦) مجموعة حل المعادلة : $\sqrt[٣]{(س - ٣)^{٥}}$ = ٣٢ في ح هي ....

(أ) {٢} (ب) {١١} (جـ) {١١ ، −٥} (د) {−١١ ، ١١}

(٧) إذا كانت : د (س) = $٢^{-س}$ فإن : د (س) تكون تناقصية عند س ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح^{+}$ (جـ) $ح^{-}$ (د) ∅

(٨) إذا كانت : د (س) = $\frac{س + ك}{س + ١}$ وكان : (٥ ، ٢) ∈ $د^{-١}$ فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ١٣

(٩) إذا كان : لو س + لو $\sqrt{٢}$ = لو ٢ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢ $\sqrt{٢}$

(١٠) مجموعة حل المعادلة : $٢٥^{س}$ − ٢٧ × $٥^{س}$ + ٥٠ = ٠ هي ....

(أ) ٢ (ب) ٠,٤٣ (جـ) {٢ ، ٠,٤٣} (د) {٥ ، ٢}

(١١) إذا كان : $لو_{٧} \sqrt{س + ٥} = \frac{١}{٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٧ (ب) $\sqrt{٧}$ (جـ) ٢ (د) ١٢

(١٢) العدد : $٣^{٢٥}$ + $٣^{٢٤}$ + $٣^{٢٢}$ يقبل القسمة على ....

(أ) ١٧ (ب) ٢٩ (جـ) ٣٧ (د) ٤٧

(١٣) مستطيل طولا بعديه : $لو_{٦}$ ٨ ، $لو_{٦}$ ٢٧ سم فإن محيطه = ... سم

(أ) ٢ $لو_{٦}$ ٣٥ (ب) $لو_{٦}$ ٧٠ (جـ) ٣ (د) ٦

(١٤) إذا كانت : أ (٠ ، ١) ، ب (٣ ، ٤) ، حـ (١ ، ٣) رؤوس مثلث

فإن : جا (∠ أ حـ ب) = ...

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{-٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{-٣}{٥}$

(١٥) $\lim_{س \to ٢}$ (٣ $أ^{٢}$) = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٣ $أ^{٢}$

(١٦) $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ٣)^{٥} - ١}{\text{س}^{٢} - ٤} =$ ....

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{-٥}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{-١}{٤}$

(١٧) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{حـ}}}{\text{س}^{\text{ء}}} =$ .... (إذا كانت : حـ > ء)

(أ) حـ − ء (ب) ١ (جـ) ∞ (د) صفر

(١٨) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } ٣\text{س}}{٥\text{س}^{٢} - ٤\text{س}} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{٣}{٥}$

(١٩) إذا كانت : $\text{د(س)} = \begin{cases} -٢ & ، \text{ س} > ٠ \\ ١ & ، \text{ س} < ٠ \end{cases}$ فإن : $\underset{\text{س} \to -٤}{\text{نهـا}} \text{ د(س)} =$ ....

(أ) غير موجوده (ب) −٢ (جـ) ١ (د) صفر

(٢٠) إذا كانت : $\underset{\text{س} \to \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}} \text{ د(س)} = \text{ل}$ ، $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{ د(س)} = \text{م}$ وكانت الدالة متصلة

عند س = أ فإن : $\text{ل}^{٢} + \text{م}^{٢} - ٢ \text{ ل م} =$ ....

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

(٢١) $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢)}{\text{س} + ١} =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) −٣ (د) −٥

(٢٢) إذا كانت : $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{١٥} + ١}{\text{س} + ١} = \underset{\text{س} \to \text{ك}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٥} - \text{ك}^{٥}}{\text{س}^{٣} - \text{ك}^{٣}}$ فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) −١ (د) ±٣

(٢٣) Δ أ ب حـ فيه : ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠حـ) = ٢ : ٣ : ٤ ، حـَ = ١٢ سم

فإن : بَ ≈ .... سم

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٦ (د) ١٨

(٢٤) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ = ٣ سم

وكان : جا أ + جا ب + جا حـ = ٢ فإن : محيط Δ أ ب حـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٢٥) Δ س ص ع فيه : ٢ سَ صَ حتا (س + ص) = ...

(أ) سَ^٢ + صَ^٢ − عَ^٢ (ب) صَ^٢ + عَ^٢ − سَ^٢

(جـ) سَ^٢ − عَ^٢ − صَ^٢ (د) عَ^٢ − سَ^٢ − صَ^٢

(٢٦) Δ س ص ع فيه : عَ^٢ = (سَ + صَ)^٢ − سَ صَ فإن : ق (∠ ع) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

(٢٧) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ أ) = ١١٢° ، أ = ٧ سم

، ب = ٤ سم هو ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) لا نهائى

ثانيًا **الأسئلة المقالية**

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ إذا كانت : د (س) = { (أ حتا س + ١٥ حا س) / س ، س > ٠ ؛ (س^٦ − ٦٤) / (س^٣ − ٨) ، س < ٠ }

وكانت لها نهاية عند س = ٠ أوجد قيمة : أ

---

٢ أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : √((س + ٢)^٢) + | ٢ س + ٤ | ≤ ٦ جبريًا

١٣ محافظة المنيا

إدارة مالوى
توجيه الرياضيات

أولًا **أسئلة الاختيار من متعدد**

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجال الدالة د : د (س) = √(س^٢ + ٩) هو ....

(أ) ح (ب) {٣ ، −٣} (جـ) (٣ ، −٣) (د) ح − {−٩}

(٢) مجموعة حل المعادلة : |س| + ٧ = ٥ هى .... حيث س ∈ ح

(أ) {−٢} (ب) {١٢} (جـ) ∅ (د) {٢}

(٣) نهـــا (س ← ٠) (حا ٢ س^٢ + طا^٢ ٣ س) / س^٢ = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١١

(٤) مجموعة حل المعادلة : $٣^{٢س} - ١٠ \times ٣^{س} + ٩$ = صفر فى ح هى ....

(أ) {٠}　(ب) {٢}　(جـ) {-٣}　(د) {٠ ، ٢}

(٥) إذا كان س ص ع مثلث فيه : ٢ جا س = ٤ جا ص = ٣ جا ع

فإن : ق (∠ ص) = ...°

(أ) ٦٣,٦١　(ب) ٥٥,٢٣　(جـ) ٣٦,٣٤　(د) ٢٦,٣٨

(٦) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{س^٢ + س - ١٠}{س - ٢}$ = ...

(أ) ١٥　(ب) ١٤　(جـ) ١٣　(د) ١٢

(٧) إذا كان محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث : أ ب حـ = ٢ π سم

فإن : أَ قتا أ + بَ قتا ب + حـَ قتا حـ = ... سم

(أ) ٢　(ب) ٤　(جـ) ٦　(د) ٨

(٨) الدالة الأحادية من بين الدوال الآتية هى .... حيث س ∈ ح

(أ) د (س) = |س + ٧|　(ب) د (س) = س + ١

(جـ) د (س) = جتا ٢ س　(د) د (س) = ٣ $س^٢$

(٩) إذا كانت د دالة زوجية ، ٢ ∈ مجال د　فإن : د (٢) - د (-٢) = ...

(أ) صفر　(ب) ٤　(جـ) ٢ (-٢)　(د) ٢ د (٢)

(١٠) إذا كانت : د (س) = ٢ س + ١ ، ر (س) = $\sqrt{س + ٣}$

فإن : (د ∘ ر) (٦) = ...

(أ) ٤　(ب) ٧　(جـ) ١٣　(د) ٣

(١١) مجموعة حل المتباينة : |س + ٢| < ٦ فى ح تساوى ....

(أ)]-٨ ، ٤[　(ب) ح -]-٨ ، ٤[

(جـ) ح - {-٨ ، ٤}　(د) ح - [-٨ ، ٤]

(١٢) $\underset{س \leftarrow ٩}{\text{نهـــا}} \frac{س - ٣\sqrt{س}}{٣ - \sqrt{س}}$ = ...

(أ) ٩　(ب) ٣　(جـ) -٣　(د) -٩

(١٣) عدد الحلول الممكنة للمثلث س ص ع الذى فيه : ق (∠ س) = ٣٠° ، سَ = ٦ سم

صَ = ٩ سم يساوى ....

(أ) ١　(ب) ٢　(جـ) صفر　(د) عدد لا نهائى

(١٤) فى المثلث أ ب حـ إذا كان : أً = ٢٠ سم ، حـً = ١٦ سم ، حتاب = $\frac{\text{٢}}{\text{٥}}$
فإن : بً = ... سم

(أ) ٢٠　　(ب) ١٦　　(جـ) ٢٥　　(د) ١٥

(١٥) إذا كان : $\text{س}^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}} = \sqrt[\text{٣}]{\text{٤}}$ فإن : س = ...

(أ) ± ٢　　(ب) ١　　(جـ) ٣　　(د) ٤

(١٦) مجموعة حل المعادلة : $(\text{لو س})^{\text{٢}} - \text{لو س}^{\text{٢}}$ = صفر هى ....

(أ) {١ ، ١٠}　　(ب) {١ ، ١٠٠}　　(جـ) {١٠ ، ١٠٠}　　(د) {٠ ، ١٠٠}

(١٧) المثلث أ ب حـ فيه : $\frac{\text{جا أ}}{\text{٣}} = \frac{\text{٢ جا ب}}{\text{٥}} = \frac{\text{جا حـ}}{\text{٤}}$ فإن : أً : بً : حـً = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨　　(ب) ٨ : ٥ : ٦　　(جـ) ٧ : ٢ : ٤　　(د) ٣ : ٥ : ٤

(١٨) الدالة العكسية للدالة ص = ٢ س + ١ هى ....

(أ) س = ص + ١　　(ب) ص = ٢ س + ١

(جـ) ص = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ س − ١　　(د) ص = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (س − ١)

(١٩) $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + \text{٣})^{\text{٤}} - \text{٨١}}{\text{س}}$ = ...

(أ) ١٠٨　　(ب) ٧٢　　(جـ) ٣٦　　(د) ٣٢٤

(٢٠) $\underset{\text{س} \to \text{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٦ س} + \text{٨}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥ س} + \text{٦}}$ = ...

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(جـ) −١　　(د) ٤

(٢١) $\text{لو}_{\text{٣}}$ ٥ × $\text{لو}_{\text{٢}}$ ٣ × $\text{لو}_{\text{٥}}$ ١٦ = ...

(أ) ٣٠　　(ب) ١٥　　(جـ) لو ١٠٠٠٠　　(د) $\text{لو}_{\text{٣.}}$ ٢٤٠

(٢٢) إذا كان عدد سكان إحدى المدن الأن هو ١٠٠٠٠٠ نسمه ، ويتناقص بنسبة ٥ ٪ سنويا فإن عدد السكان المتوقع بعد ١٠ سنوات تقريبًا هو ....

(أ) ٧٥٩٨٣　　(ب) ٥٩٨٧٤　　(جـ) ٩٨٧٣٥　　(د) ٣٥٩٨٧

(٢٣) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣ أ س}^{\text{٣}} - \text{٥ س}}{\text{٣ س}^{\text{٢}} - \text{٢ س}^{\text{٣}}} = \text{٦}$ فإن : أ = ...

(أ) ١٨　　(ب) ١٢　　(جـ) −٤　　(د) −٦

(٢٤) طول قطر الدائرة الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه = ٤ $\sqrt{\text{٣}}$ سم يساوى .... سم

(أ) ٢ $\sqrt{\text{٣}}$　　(ب) ٤ $\sqrt{\text{٣}}$　　(جـ) ٤　　(د) ٨

(٢٥) نهـا س ← ٢ $\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٤}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١٢

(٢٦) إذا كان : لو ٥ = س ، لو ٣ = ص فإن : لو ١٥٠ = ...

(أ) ١٥ س ص (ب) س + ص + ١ (جـ) ١٥ (س + ص) (د) ١٠ س ص

(٢٧) إذا كان : د (س) = { س^{٢} + ١ ، س < ٣ ؛ ٣ س + ١ ، س ≥ ٣ } فإن : نهـا س ← ٣ د (س) = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٤

ثانيًا **الأسئلة المقالية**

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ ارسم الشكل البيانى للدالة د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣ ومن الرسم عين مجال الدالة ومدى الدالة واطراد الدالة وهل الدالة زوجية ام فردية ام غير ذلك.

---

٢ ابحث اتصال الدالة : د (س) = { ٤ س^{٢} + ٣ ، س ≤ $\frac{١}{٢}$ ؛ ٥ − ٢ س ، س > $\frac{١}{٢}$ } عند س = $\frac{١}{٢}$

١٤ محافظة سوهاج

إدارة سوهاج
توجيه الرياضيات

أولًا **أسئلة الاختيار من متعدد**

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt[٤]{س - ٣}$ هو ....

(أ) [٣ ، ∞[(ب)]٣ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٣] (د) ح

(٢) أى من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية زوجية : د (س) = ...

(أ) جا س (ب) س جتا س (جـ) س^{٣} + ٢ (د) س جا س

(٣) نقطة رأس المنحنى للدالة د (س) = س^{٢} + ٢ س + ١ هى ....

(أ) (١ ، صفر) (ب) (−١ ، صفر) (جـ) (صفر ، −١) (د) (صفر ، ١)

(٤) إذا كان : د (س) = $س^{٢}$ + ٢ فإن : (د ∘ د) (١) = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ١١ (د) ٧

(٥) التمثيل البيانى للدالة ر (س) = | س − ٦ | + ١ هو نفس التمثيل البيانى للدالة د (س) = | س | بإزاحة مقدارها أ وحدة طول فى اتجاه و س← وإزاحة مقدارها ب وحدة طول فى اتجاه و ص← فإن : أ − ب = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ١ (د) −١

(٦) مجموعة حل المتباينة : ٢ $\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩}$ − | ٣ − س | + ٥ > ٥ فى ح هى ....

(أ) ∅ (ب) ح (جـ) {٣} (د) ح − {٣}

(٧) إذا كان : د (س) = $٢^{س}$ ، د (س + ١) + د (س − ١) = ١٠ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ± ٣ (د) ± ٢

(٨) الدالة : د (س) = $أ^{س}$ تكون تناقصية على مجالها ح عندما ....

(أ) أ = ١ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = −١

(٩) إذا كان : لو س = ٢ ، لو ص = ٣ فإن : لو س ص = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(١٠) مجموعة حل المعادلة : لو | س | = ١ فى ح هى ....

(أ) {−١٠} (ب) {١٠} (جـ) {±١٠} (د) {±١}

(١١) إذا كان : د (س) = ٢ س + ١ فإن : $د^{-١}$ (٢٥) = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٥ (جـ) ٤ (د) ٣

(١٢) إذا كان : $لو_{٣}$ (س + ١) + $لو_{٣}$ (س − ١) = $لو_{٣}$ ٨ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ± ٢ (د) ± ٣

(١٣) $لو_{س}$ (س + ٦) = ٢ فإن : $لو_{٩}$ س = ...

(أ) −٢ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٤) $نهـا_{س \to ١} \frac{٢س^{٢} + ٥س + ٣}{س^{٢} - ١}$ = ...

(أ) $\frac{-١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) ٥ (د) غير موجوده

(١٥) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\text{س}^{٢} - ٢٧}{\text{س} - ٣} =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٨

(١٦) إذا كانت : $\underset{\text{س} \to \text{صفر}}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{م س} + \text{ك}} - ٣}{\text{س}} = ٢$ فإن : $\dfrac{\text{م}}{\text{ك}} =$ ....

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٧) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^{٧} - ٢٥٦}{٣\text{س}^{٥} - ٩٦} =$ ....

(أ) $\frac{٥٦}{١٥}$ (ب) $\frac{٥}{٧}$ (جـ) $\frac{٢٨}{٥}$ (د) $\frac{-٢٨}{٥}$

(١٨) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} (٥\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٢) =$ ....

(أ) ٢ (ب) ١٠ (جـ) ∞ (د) غير موجودة

(١٩) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{٣ - \text{س}} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) غير موجودة

(٢٠) $\underset{\text{س} \to \text{صفر}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س جاس} + \text{ظا}^{٢}\, ٢\text{س}}{\text{جتاس جا} ٥\text{س}^{٢}} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) ١ (د) غير موجودة

(٢١) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}{٣\text{س}^{٢} - ٧} =$ ....

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٧}$ (د) غير موجودة

(٢٢) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس $\triangle$ أ ب جـ يساوى ٢ سم

فإن : $\dfrac{\text{أ ب جـ}}{\text{جاأ جاب جاجـ}} - \left[\dfrac{\text{أ}}{\text{جاأ}} + \dfrac{\text{ب}}{\text{جاب}} + \dfrac{\text{جـ}}{\text{جاجـ}} + \dfrac{\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}}{\text{جاأ} + \text{جاب} + \text{جاجـ}}\right] =$ ....

(أ) ٦٤ (ب) ١٦ (جـ) صفر (د) ٤٨

(٢٣) عدد حلول $\triangle$ أ ب جـ الذى فيه : أ = ٨ سم ، ب = ١٠ سم
، ق (∠ أ) = ٤٢° هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(٢٤) $\triangle$ أ ب جـ فيه : ق (∠ أ) = ١٢٠° ، ب = ٣ سم ، جـ = ٥ سم
فإن محيط المثلث = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ١٨

(٢٥) إذا كان Δ أ ب جـ فيه : ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠جـ) = ٩ : ٥ : ٤ ، أ = ٨ سم

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... سم

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ١٢

(٢٦) Δ أ ب جـ فيه : $أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢ - ب جـ$ طا أ فإن : ق(∠أ) ∈ ....

(أ) {٣٠° ، ٦٠°} (ب) {٣٠° ، ١٥٠° ، ٩٠°}

(جـ) {٦٠° ، ١٥٠°} (د) {٦٠° ، ١٢٠°}

(٢٧) مثلث متساوى الأضلاع طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ٤ $\sqrt{٣}$ سم

فإن مساحته = ... سم

(أ) ١٨ (ب) ٣٦ (جـ) ١٨ $\sqrt{٣}$ (د) ٣٦ $\sqrt{٣}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

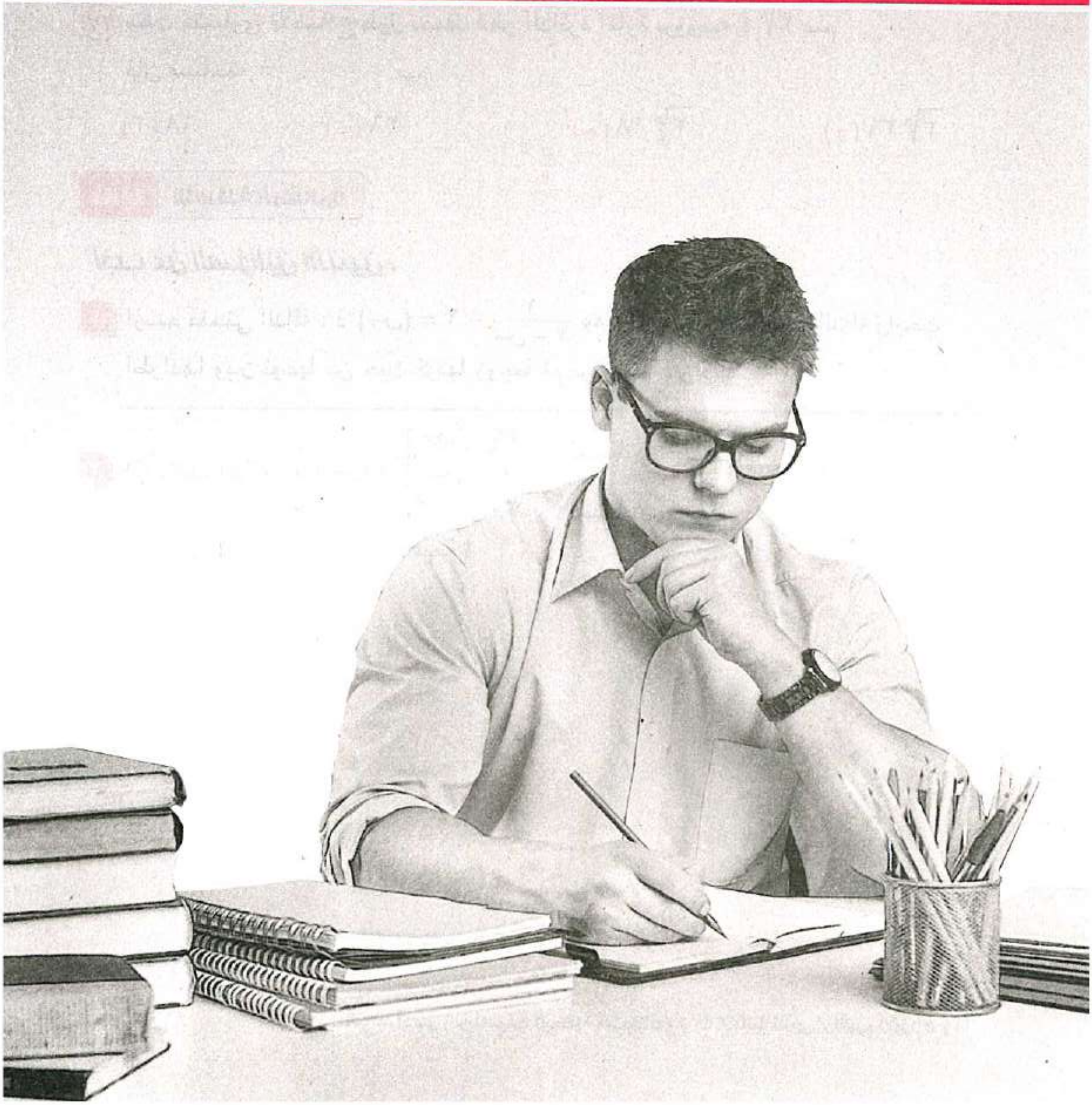
(١) ارسم منحنى الدالة : د(س) = ٢ − $\frac{١}{س - ٢}$ **ومن الرسم أوجد :** مدى الدالة وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

---

(٢) إذا كانت الدالة : د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٥ - ٣٢}{س^٣ - ٨} & \text{عندما } س \geq -٢ \\ أ س - ٢ & \text{عندما } س < -٢ \end{cases}$

متصلة عند س = −٢ **أوجد :** قيمة أ

الإجابات



إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الجبر

الاختبار الأول

١ ① (جـ) ② (د) ③ (جـ) ④ (أ)

٢
① تزايدية فى]٠ ، ٢[وثابتة فى]٢ ، ∞[
② تزايدية فى]-١ ، ٠[وتناقصية فى]٠ ، ٤[
③ تناقصية فى]-∞ ، ١[وتزايدية فى]١ ، ∞[

الاختبار الثانى

١ ① (جـ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (ب) ⑤ (د) ⑥ (جـ)

٢
① (د ∘ ر) (س) = $\frac{١}{س + ٢}$
، مجال (د ∘ ر) = ح − {−٢}
② (ر ∘ د) (س) = $\frac{١}{س}$ + ٢
، مجال (ر ∘ د) = ح − {٠}

الاختبار الثالث

١ ① (ب) ② (جـ) ③ (د) ④ (ب) ⑤ (جـ) ⑥ (أ)

٢ (د$_١$ + د$_٢$) (س) = س^٥ + جا س ونوعها فردية

الاختبار الرابع

١ مثل بنفسك ، المدى = [٠ ، ∞[والنوع : ليست زوجية وليست فردية الاطراد : تناقصية فى]-∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[

٢ المجال = ح − {٢} وأثبت بنفسك

٣ مثل بنفسك ، المجال = ح − {−١}
، المدى = ح − {−٢}
الاطراد : تزايدية فى ح − {−١}

٤ مثل بنفسك ، المدى =]١ ، ٢] ∪ {−١}

الاختبار الخامس

١ ① (جـ) ② (أ) ③ (جـ) ④ (أ) ⑤ (جـ) ⑥ (ب)

٢ مثل بنفسك ، المدى = [٠ ، ∞[والنوع : زوجية
الاطراد : تناقصية فى]-∞ ، −٢[،]٠ ، ٢[
وتزايدية فى]−٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[

الاختبار السادس

١ ① (ب) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (د) ⑥ (د)

٢
① م.ح = {٤}
② م.ح = [$\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٧}{٤}$] − {$\frac{٣}{٢}$}

الاختبار السابع

١ ① (ب) ② (أ) ③ (ب) ④ (د) ⑤ (أ) ⑥ (أ)

٢
① م.ح = {١ ، −١ ، ٢٧ ، −٢٧}
② م.ح = {٦}

الاختبار الثامن

١ ① (د) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (ب) ⑤ (د) ⑥ (ب)

٢ د (ن) = ٦٠ (١ + ٠,٢٥)^{ن} ، ٢٢٩ نحلة تقريبًا

الاختبار التاسع

١ ① (أ) ② (أ) ③ (ب) ④ (د) ⑤ (ب) ⑥ (جـ)

٢
① المجال = ح − {−١} ، المدى = ح − {٢}
② د$^{-١}$ (س) = $\frac{س + ٢}{س − ٢}$ ، مجال د$^{-١}$ = ح − {٢}
، مدى د$^{-١}$ = ح − {−١}

الاختبار العاشر

١ ① (جـ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (ب) ⑥ (أ)

٢
① مجموعة الحل = {٨}
② مجموعة الحل = {−١ ، ٥}

الاختبار الحادى عشر

١ ① (جـ) ② (أ) ③ (جـ) ④ (ب) ⑤ (أ) ⑥ (د)

٢ أثبت بنفسك.

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى التفاضل

الاختبـار الأول

١ (١) ١ (٢) ٤ (٣) غير معرفة (٤) ٢

٢ (١) (د) (٢) (د) (٣) (جـ)

الاختبـار الثانى

١ (١) (أ) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (جـ)

٢ (١) $\frac{١}{٤}$ (٢) $\frac{٧}{٢}$ (٣) ٣٢ (٤) ١

الاختبـار الثالث

١ (١) (أ) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (أ) (٥) (أ) (٦) (د)

٢ (١) ٦٤ (٢) ٥

الاختبـار الرابع

١ (١) (د) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (د)

٢ (١) ٢ (٢) $\frac{١}{٤}$ (٣) ∞ (٤) ٧

الاختبـار الخامس

١ (١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (جـ) (٥) (جـ) (٦) (ب)

٢ (١) ٢ (٢) $\frac{١}{٤}$

الاختبـار السادس

١ (١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (د) (٥) (أ) (٦) (جـ)

٢ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = -١$

الاختبـار السابع

١ (١) (د) (٢) (أ) (٣) (جـ) (٤) (جـ) (٥) (جـ) (٦) (أ)

٢ الدالة د متصلة عند س = ١

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى حساب المثلثات

الاختبـار الأول

١ (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (ب)

٢ ب حـ ≃ ١٨,٠٤ سم ، نق = ١٦,٥٦ سم

الاختبـار الثانى

١ (١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (جـ) (٥) (د) (٦) (د)

٢ مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ = ٢٥ π سم²

الاختبـار الثالث

١ (١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (جـ) (٤) (أ) (٥) (جـ) (٦) (ب)

٢ يوجد حلان ، حـَ ≃ ٢٧,٣ سم ، أ ≃ ٨,٧ سم

إجابات اختبارات شهر أكتوبر

اختبـار ١

١ (١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (جـ) (٥) (جـ) (٦) (أ) (٧) (د) (٨) (ب) (٩) (جـ) (١٠) (أ) (١١) (د) (١٢) (جـ)

٢

① ∵ $(\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{د}(\text{ر}(\text{س}))$

$= \text{د}\left(\sqrt{\text{س} - ٢}\right) = \left(\sqrt{\text{س} - ٢}\right)^{٢} - ٣$

$= \text{س} - ٢ - ٣ = \text{س} - ٥$

، ∵ $\text{م}_{\text{ر}} = \text{مجال ر} = [٢ ، \infty[$

، قيم س التى تجعل ر(س) فى مجال د هى $\text{م}_{٢} = \text{ح}$

∴ $\text{مجال}(\text{د} \circ \text{ر}) = \text{م}_{١} \cap \text{م}_{٢} = [٢ ، \infty[$

، $(\text{د} \circ \text{ر})(٣) = ٣ - ٥ = -٢$

② $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٤\text{س} + ٥} - ٣}{\text{س} - ١} \times \frac{\sqrt{٤\text{س} + ٥} + ٣}{\sqrt{٤\text{س} + ٥} + ٣}$

$= \underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٤\text{س} + ٥ - ٩}{(\text{س} - ١)\left(\sqrt{٤\text{س} + ٥} + ٣\right)}$

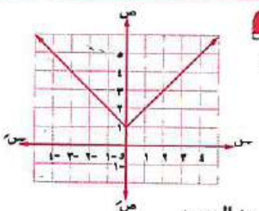
$= \underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٤(\text{س} - ١)}{\left(\sqrt{٤\text{س} + ٥} + ٣\right)(\text{س} - ١)}$

$= \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

اختبـار ٢

١ (١) (ب) (٢) (د) (٣) (د) (٤) (د) (٥) (جـ) (٦) (جـ) (٧) (د) (٨) (أ) (٩) (جـ) (١٠) (جـ) (١١) (ب) (١٢) (جـ)

٢

① 

من الرسم :

- المدى = [١ ، ∞[
- الاطراد : الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[
- النوع : الدالة زوجية.

② $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س} + ١١} - ٤}{\text{س}^{٢} - ٢٥} \times \frac{\sqrt{\text{س} + ١١} + ٤}{\sqrt{\text{س} + ١١} + ٤}$

$= \underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} + ١١ - ١٦}{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٥)\left(\sqrt{\text{س} + ١١} + ٤\right)}$

$= \underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{١}{(\text{س} + ٥)\left(\sqrt{\text{س} + ١١} + ٤\right)}$

$= \frac{١}{(٥ + ٥)\left(\sqrt{٥ + ١١} + ٤\right)} = \frac{١}{٨٠}$

إجابات أختبارات شهر نوفمبر

اختبار ١

١

① (ب)	② (جـ)	③ (أ)	④ (أ)
⑤ (د)	⑥ (د)	⑦ (ب)	⑧ (د)
⑨ (ب)	⑩ (جـ)	⑪ (ب)	⑫ (د)

٢

① نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{حا ٥ س}}{\text{ظا ٣ س}}$ = نهـا (س ← ٠) $\frac{\frac{\text{حا ٥ س}}{\text{س}}}{\frac{\text{ظا ٣ س}}{\text{س}}}$ = $\frac{٥}{٣}$

② ∵ |س − ٣| = |٩ − ٢ س|

∴ س − ٣ = ٩ − ٢ س

∴ ٣ س = ١٢   ∴ س = ٤

أ، س − ٣ = −٩ + ٢ س

∴ س = ٦

∴ مجموعة الحل = {٤ ، ٦}

اختبار ٢

١

① (ب)	② (أ)	③ (ب)	④ (د)
⑤ (ب)	⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (د)
⑨ (ب)	⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	⑫ (جـ)

٢

① ٥$^{\text{س}}$ + ٥$^{\text{س} - ١}$ = ١٥٠

∴ ٥$^{\text{س} - ١}$ (٥ + ١) = ١٥٠

∴ ٥$^{\text{س} - ١}$ = ٢٥ = ٥^{٢}

∴ س = ٣

② نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{حا س}}{\sqrt{\text{س} + ١} - ١}$ × $\frac{\sqrt{\text{س} + ١} + ١}{\sqrt{\text{س} + ١} + ١}$

= نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{حا س} (\sqrt{\text{س} + ١} + ١)}{\text{س} + ١ - ١}$

= نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{حا س}}{\text{س}}$ × نهـا (س ← ٠) $(\sqrt{\text{س} + ١} + ١)$

= ١ × $(\sqrt{٠ + ١} + ١)$ = ١ × ٢ = ٢

إجابات اسئلة هامة من امتحانات الإدارات التعليمية

الوحدة الأولى

أولا: اسئلة الاختيار من متعدد

١ (ب)	٢ (جـ)	٣ (د)	٤ (ب)	٥ (د)
٦ (أ)	٧ (جـ)	٨ (ب)	٩ (ب)	١٠ (د)
١١ (ب)	١٢ (جـ)	١٣ (د)	١٤ (أ)	١٥ (جـ)
١٦ (أ)	١٧ (ب)	١٨ (أ)	١٩ (جـ)	٢٠ (ب)
٢١ (جـ)	٢٢ (ب)	٢٣ (جـ)	٢٤ (جـ)	٢٥ (أ)
٢٦ (ب)	٢٧ (ب)	٢٨ (ب)	٢٩ (ب)	٣٠ (جـ)
٣١ (د)	٣٢ (د)	٣٣ (د)	٣٤ (د)	٣٥ (أ)
٣٦ (ب)	٣٧ (جـ)	٣٨ (ب)	٣٩ (ب)	٤٠ (د)
٤١ (د)	٤٢ (د)	٤٣ (د)	٤٤ (جـ)	٤٥ (ب)
٤٦ (ب)	٤٧ (ب)	٤٨ (د)	٤٩ (ب)	٥٠ (أ)
٥١ (ب)	٥٢ (ب)	٥٣ (أ)	٥٤ (د)	٥٥ (جـ)
٥٦ (جـ)	٥٧ (جـ)	٥٨ (جـ)	٥٩ (ب)	٦٠ (جـ)
٦١ (ب)	٦٢ (جـ)	٦٣ (أ)	٦٤ (أ)	٦٥ (ب)
٦٦ (ب)	٦٧ (جـ)	٦٨ (أ)	٦٩ (ب)	٧٠ (د)
٧١ (جـ)	٧٢ (أ)	٧٣ (ب)	٧٤ (د)	٧٥ (جـ)
٧٦ (أ)	٧٧ (ب)	٧٨ (ب)	٧٩ (جـ)	٨٠ (د)
٨١ (أ)	٨٢ (جـ)	٨٣ (د)	٨٤ (جـ)	٨٥ (د)
٨٦ (أ)	٨٧ (ب)	٨٨ (ب)	٨٩ (أ)	٩٠ (د)
٩١ (أ)	٩٢ (ب)	٩٣ (أ)	٩٤ (جـ)	٩٥ (ب)
٩٦ (د)	٩٧ (جـ)	٩٨ (ب)	٩٩ (أ)	١٠٠ (أ)
١٠١ (د)	١٠٢ (ب)	١٠٣ (د)	١٠٤ (ب)	

ثانيا: الأسئلة المقالية

١

(د$_{١}$ + د$_{٢}$) (س) = د$_{١}$ (س) + د$_{٢}$ (س)

(د$_{١}$ + د$_{٢}$) (س) = س^{٥} + ظا ٢ س

بوضع −س بدلًا من س

(د$_{١}$ + د$_{٢}$) (−س) = (−س)^{٥} + ظا ٢ (−س)

= −س^{٥} + ظا ٢ س

≠ (د$_{١}$ + د$_{٢}$) (س) ≠ − (د$_{١}$ + د$_{٢}$) (س)

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

٢

د (س) = ٣ س − ٤ س^{٣}

بوضع − س بدلًا من س

د (−س) = ٣ (−س) − ٤ (−س)^{٣}

= −٣ س + ٤ س^{٣} = − (٣ س − ٤ س^{٣})

= − د (س)

∴ الدالة فردية.

٣

∵ $\sqrt{\text{٤ س}^{٢} - \text{١٢ س} + ٩}$ = ٥

∴ $\sqrt{(\text{٢ س} - ٣)^{٢}}$ = ٥

|٢ س − ٣| = ٥

∴ ٢ س − ٣ = ٥   ∴ ٢ س = ٨   ∴ س = ٤

أ، ٢ س − ٣ = −٥

∴ ٢ س = −٢   ∴ س = −١

∴ م.ح = {−١ ، ٤}

٤

|س − ٢| + ٦ |٢ − س| ≤ ١٤

|س − ٢| + ٦ |س − ٢| ≤ ١٤

٧ |س − ٢| ≤ ١٤

∴ |س − ٢| ≤ ٢

−٢ ≤ س − ٢ ≤ ٢

٠ ≤ س ≤ ٤

∴ م.ح = [٠ ، ٤]

٥

√(٤س² − ٤س + ١) − ٣س = ١١

√((٢س − ١)²) − ٣س = ١١

∴ |٢س − ١| − ٣س = ١١

عند س ≥ ½

∴ ٢س − ١ − ٣س = ١١

∴ −س = ١٢   ∴ س = −١٢ (مرفوض)

، عند س < ½

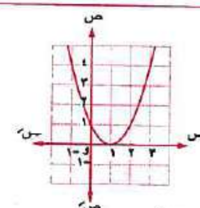
∴ −٢س + ١ − ٣س = ١١

∴ −٥س = ١٠

∴ س = −٢ (يحقق)

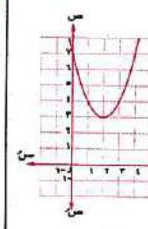
∴ م.ح = {−٢}

٦



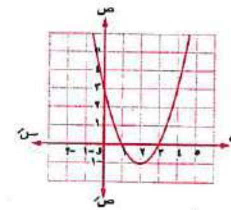
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ١[وتزايدة فى]١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

٧



* مجال الدالة = ح
* المدى = [٢ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢[، الدالة تزايدية فى]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية
* الدالة ليست أحادية

٨

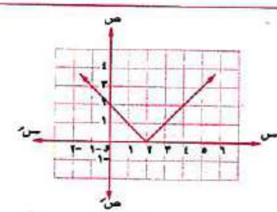


د(س) = س² − ٤س + ٣

∴ د(س) = (س − ٢)² − ١

* المجال = ح ، المدى = [−١ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢[، الدالة تزايدية فى]٢ ، ∞[

٩

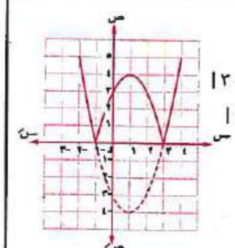


د(س) = √(س² − ٤س + ٤) = √((س − ٢)²)

∴ د(س) = |س − ٢|

* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢[، تزايدية فى]٢ ، ∞[

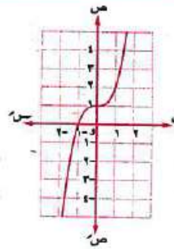
١٠



د(س) = |س² − ٢س − ٣| = |(س − ١)² − ٤|

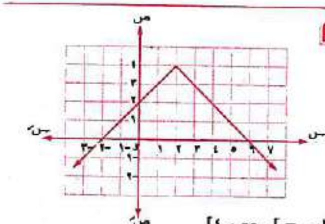
* المدى = [٠ ، ∞[
* تناقصية فى]−∞ ، −١[،]١ ، ٣[، تزايدية فى]−١ ، ١[،]٣ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

١١



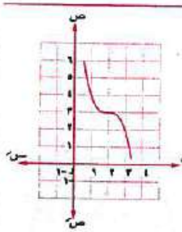
* المدى = ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية
* الدالة تزايدية فى ح

١٢



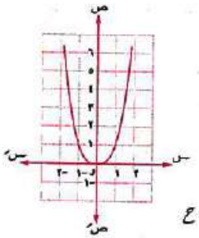
* المدى =]−∞ ، ٤]
* الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢[وتناقصية فى]٢ ، ∞[

١٣



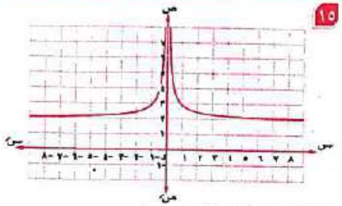
* د(س) = −(س − ٢)³ + ٣
* المدى = ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

١٤



* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[والدالة تزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة زوجية.

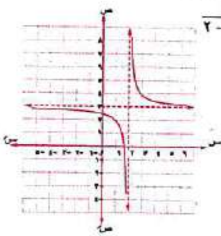
١٥



* الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠[، الدالة تناقصية فى]٠ ، ∞[
* المدى =]٢ ، ∞[

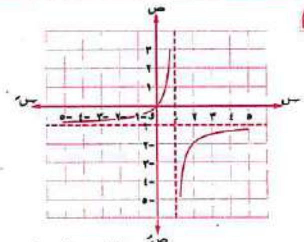
١٦

د(س) = ((٢س − ٦) + ١) / (س − ٢) = ٢ + ١/(س − ٢)



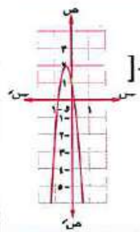
* د (س) = ٢ + ١/(س − ٢) * المجال = ح − {٢}
* المدى = ح − {٣}

١٧



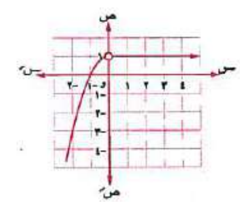
د (س) = س/(١ − س) = −س/(س − ١) = (−(١ − س) − ١)/(س − ١)
= −١/(س − ١) − ١
* المدى = ح − {−١}
* الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ١[،]١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

١٨



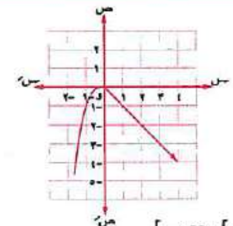
* المدى =]− ∞ ، ٢]
* الدالة تزايدية فى]− ∞ ، − ١/٢]
وتناقصية فى [− ١/٢ ، ∞[

١٩



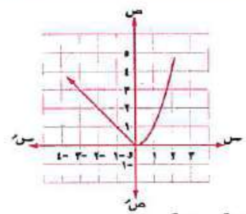
* المدى =]− ∞ ، ١[
* الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠[، ثابتة فى]٠ ، ∞[

٢٠



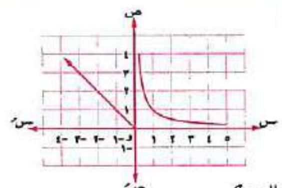
* المدى =]− ∞ ، ٠]
* الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠[
، تناقصية فى]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

٢١



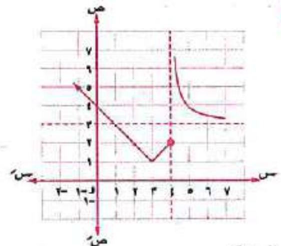
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

٢٢



* المجال = ح
* المدى =]٠ ، ∞[

٢٣



* المجال = ح
* المدى = [١ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٣[،]٤ ، ∞[
، الدالة تزايدية فى]٣ ، ٤[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

الوحدة الثانية

أسئلة الاختيار من متعدد

١ (أ)	٢ (ب)	٣ (د)	٤ (ب)	٥ (ب)
٦ (أ)	٧ (جـ)	٨ (أ)	٩ (جـ)	١٠ (جـ)
١١ (أ)	١٢ (جـ)	١٣ (د)	١٤ (جـ)	١٥ (د)
١٦ (جـ)	١٧ (د)	١٨ (ب)	١٩ (جـ)	٢٠ (د)
٢١ (أ)	٢٢ (جـ)	٢٣ (جـ)	٢٤ (جـ)	٢٥ (جـ)
٢٦ (ب)	٢٧ (أ)	٢٨ (ب)	٢٩ (جـ)	٣٠ (د)
٣١ (جـ)	٣٢ (ب)	٣٣ (أ)	٣٤ (ب)	٣٥ (د)
٣٦ (د)	٣٧ (د)	٣٨ (د)	٣٩ (جـ)	٤٠ (جـ)
٤١ (ب)	٤٢ (ب)	٤٣ (د)	٤٤ (أ)	٤٥ (جـ)
٤٦ (أ)	٤٧ (ب)	٤٨ (ب)	٤٩ (أ)	٥٠ (أ)
٥١ (جـ)	٥٢ (ب)	٥٣ (جـ)	٥٤ (ب)	٥٥ (د)
٥٦ (جـ)	٥٧ (ب)	٥٨ (د)	٥٩ (أ)	٦٠ (د)
٦١ (د)	٦٢ (ب)	٦٣ (أ)	٦٤ (جـ)	٦٥ (أ)
٦٦ (أ)	٦٧ (جـ)	٦٨ (د)	٦٩ (ب)	٧٠ (جـ)
٧١ (ب)	٧٢ (أ)	٧٣ (ب)	٧٤ (أ)	٧٥ (جـ)
٧٦ (د)	٧٧ (ب)	٧٨ (أ)	٧٩ (د)	٨٠ (أ)
٨١ (ب)	٨٢ (ب)	٨٣ (جـ)	٨٤ (أ)	٨٥ (ب)
٨٦ (ب)	٨٧ (جـ)	٨٨ (ب)	٨٩ (د)	٩٠ (جـ)
٩١ (أ)	٩٢ (جـ)	٩٣ (أ)	٩٤ (ب)	٩٥ (جـ)
٩٦ (أ)	٩٧ (د)			

الوحدة الثالثة

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (أ)	٢ (جـ)	٣ (ب)	٤ (ب)	٥ (ب)
٦ (د)	٧ (ب)	٨ (ب)	٩ (د)	١٠ (ب)
١١ (جـ)	١٢ (ب)	١٣ (أ)	١٤ (ب)	١٥ (أ)
١٦ (د)	١٧ (د)	١٨ (ب)	١٩ (ب)	٢٠ (جـ)
٢١ (ب)	٢٢ (جـ)	٢٣ (د)	٢٤ (جـ)	٢٥ (أ)
٢٦ (جـ)	٢٧ (د)	٢٨ (ب)	٢٩ (جـ)	٣٠ (أ)
٣١ (أ)	٣٢ (د)	٣٣ (د)	٣٤ (جـ)	٣٥ (أ)
٣٦ (جـ)	٣٧ (أ)	٣٨ (جـ)	٣٩ (أ)	٤٠ (ب)
٤١ (ب)	٤٢ (د)	٤٣ (أ)	٤٤ (أ)	٤٥ (أ)
٤٦ (أ)	٤٧ (د)	٤٨ (ب)	٤٩ (جـ)	٥٠ (ب)
٥١ (جـ)	٥٢ (ب)	٥٣ (د)	٥٤ (أ)	٥٥ (ب)
٥٦ (جـ)	٥٧ (جـ)	٥٨ (أ)	٥٩ (أ)	٦٠ (أ)
٦١ (ب)	٦٢ (د)	٦٣ (جـ)	٦٤ (د)	٦٥ (أ)
٦٦ (ب)	٦٧ (جـ)	٦٨ (أ)	٦٩ (ب)	٧٠ (ب)
٧١ (ب)	٧٢ (جـ)	٧٣ (أ)	٧٤ (جـ)	٧٥ (د)
٧٦ (د)	٧٧ (د)	٧٨ (أ)	٧٩ (جـ)	٨٠ (جـ)
٨١ (د)	٨٢ (ب)	٨٣ (ب)	٨٤ (ب)	٨٥ (جـ)
٨٦ (ب)	٨٧ (أ)	٨٨ (د)	٨٩ (أ)	٩٠ (أ)
٩١ (د)	٩٢ (ب)	٩٣ (ب)	٩٤ (أ)	٩٥ (أ)
٩٦ (جـ)	٩٧ (أ)	٩٨ (ب)	٩٩ (ب)	١٠٠ (ب)
١٠١ (ب)	١٠٢ (جـ)	١٠٣ (د)	١٠٤ (ب)	١٠٥ (د)
١٠٦ (جـ)	١٠٧ (د)	١٠٨ (د)	١٠٩ (د)	١١٠ (د)
١١١ (جـ)				

ثانيا الأسئلة المقالية

١

$$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س - ٥)(س - ٣)}{(س - ٣)}$$

$$\lim\limits_{س \to ٣} (س - ٥) = -٢$$

٢

$$\lim\limits_{س \to -١} \frac{س + ١}{\sqrt{س + ٥} - ٢} \times \frac{\sqrt{س + ٥} + ٢}{\sqrt{س + ٥} + ٢}$$

$$= \lim\limits_{س \to -١} \frac{(س + ١)(\sqrt{س + ٥} + ٢)}{س + ٥ - ٤}$$

$$= \lim\limits_{س \to -١} (\sqrt{س + ٥} + ٢) = ٤$$

٣

$$\lim\limits_{س \to ١} \frac{س(س - ١)}{\sqrt{س + ٨} - ٣} \times \frac{\sqrt{س + ٨} + ٣}{\sqrt{س + ٨} + ٣}$$

$$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{س(س - ١)(\sqrt{س + ٨} + ٣)}{س + ٨ - ٩}$$

$$= \lim\limits_{س \to ١} س(\sqrt{س + ٨} + ٣) = ٦$$

٤

$$\lim\limits_{س \to ٢} \left(\frac{س^٣ - ٨}{س^٥ - ٣٢}\right) + \lim\limits_{س \to ٢} \left(\frac{س^٤ - ١٦}{س^٧ - ١٢٨}\right)$$

$$= \lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٢^٣}{س^٥ - ٢^٥} + \lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٤ - ٢^٤}{س^٧ - ٢^٧}$$

$$= \frac{٣}{٥}(٢)^{٣-٥} + \frac{٤}{٧}(٢)^{٤-٧}$$

$$= \frac{٣}{٢٠} + \frac{١}{١٤} = \frac{٣١}{١٤٠}$$

٥

مجال الدالة $]-\infty ، ٣]$

$\lim\limits_{س \to ٣^-} \sqrt{٣ - س} =$ صفر

$\lim\limits_{س \to ٣^+} \sqrt{٣ - س}$ غير موجودة

$\therefore \lim\limits_{س \to ٣} \sqrt{٣ - س}$ غير موجودة

٦

$\lim\limits_{س \to ٣^-} (٢س - ٧) = -١$ (١)

$$\lim\limits_{س \to ٣^+} \frac{س^٢ - ٧س + ١٢}{س - ٣}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٣^+} \frac{(س - ٣)(س - ٤)}{(س - ٣)}$$

$\lim\limits_{س \to ٣^+} س - ٤ = -١$ (٢)

من (١)، (٢): $\lim\limits_{س \to ٣} د(س) = -١$

٧

$\therefore \lim\limits_{س \to ٢^-} د(س) = ٧$

$\therefore \lim\limits_{س \to ٢^+} د(س) = ٧$

$\therefore ٤ + ٣م = ٧ \qquad \therefore م = ١$

$= \lim\limits_{س \to ٢^+} د(س) = ٧$

$\therefore ١٠ + ك = ٧ \qquad \therefore ك = -٣$

٨

$\because \lim\limits_{س \to \infty} د(س) = \infty$

$\therefore$ درجة البسط > درجة المقام

$\therefore أ + ١ = ٠$ منها $أ = -١$

$\therefore ٧ - ب = ٠$ منها $ب = ٧$

٩

$د(س) = |س - ١| - ٢$

$$= \begin{cases} س - ١ - ٢ & ، س \geq ١ \\ -س + ١ - ٢ & ، س < ١ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} س - ٣ & ، س \geq ١ \\ -س - ١ & ، س < ١ \end{cases}$$

$د(١) = \lim\limits_{س \to ١^+} د(س) = ١ - ٣ = -٢$

، $\lim\limits_{س \to ١^-} د(س) = -١ - ١ = -٢$

$\because د(١) = د(١^-) = د(١^+)$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $س = ١$

١٠

$\lim\limits_{س \to ١^-} د(س) = ١^٢ + ١ = ٢$

، $\lim\limits_{س \to ١^+} د(س) = ٣(١) = ٣$

$\because$ الدالة ليس لها نهاية عند $س = ١$

$\therefore$ غير متصلة عند $س = ١$

١١

$\lim\limits_{س \to ٠^+} د(س) = ٠ + ١ = ١$

$$\lim\limits_{س \to ٠^-} \frac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{س} \times \frac{\sqrt{س + ٤} + ٢}{\sqrt{س + ٤} + ٢}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٠^-} \frac{س + ٤ - ٤}{س(\sqrt{س + ٤} + ٢)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٠^-} \frac{١}{\sqrt{س + ٤} + ٢} = \frac{١}{٤}$$

$\because \lim\limits_{س \to ٠^+} د(س) \neq \lim\limits_{س \to ٠^-} د(س)$

$\therefore$ الدالة غير متصلة عند $س = ٠$

١٢

$$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٧ - ١٢٨}{س^٣ - ٨}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٧ - ٢^٧}{س^٣ - ٢^٣} = \frac{٧}{٣}(٢)^{٧-٣}$$

$$= \frac{٧}{٣} \times ١٦ = \frac{١١٢}{٣}$$

$\because$ الدالة متصلة عند $س = ٢$

$\therefore د(٢) = \lim\limits_{س \to ٢} د(س) = \frac{١١٢}{٣}$

$\therefore ك = \frac{١١٢}{٣}$

١٣

$\because د(أ) = \lim\limits_{س \to أ^+} د(س) = أ^٢ + ٩$

، $\lim\limits_{س \to أ^-} د(س) = ٦أ$

$\because$ الدالة متصلة عند $س = أ$

$\therefore أ^٢ + ٩ = ٦أ$ منها $أ^٢ - ٦أ + ٩ = ٠$

$(أ - ٣)^٢ = ٠ \qquad \therefore أ = ٣$

١٤

$\because$ الدالة متصلة عند $س = ٢$

$\therefore د(٢) = د(٢^-)$

$\therefore ٥ك + م(٢) = ٤$

$٥ك + ٢م = ٤$ (١)

، $د(٢) = د(٢^+)$

$\therefore ٢^٢ + ٢ك - ٢ = ٤$

$٢ك = ٢$

$\therefore \boxed{ك = ١}$ (٢)

من (١)، (٢): $\boxed{م = \frac{-١}{٢}}$

١٥

$$\lim\limits_{س \to ٣^+} \frac{س - ٣}{\sqrt{س + ١} - ٢} \times \frac{\sqrt{س + ١} + ٢}{\sqrt{س + ١} + ٢}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٣^+} \frac{(س - ٣)(\sqrt{س + ١} + ٢)}{س + ١ - ٤}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٣^+} (\sqrt{س + ١} + ٢) = ٤$$

، $\lim\limits_{س \to ٣^-} (٣س - ٥) = ٤$

$\therefore \lim\limits_{س \to ٣} د(س) = ٤$

$\therefore$ يمكن إعادة تعريف الدالة لكي تكون متصلة عن $س = ٣$

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س - ٣}{\sqrt{س + ١} - ٢} & ، س > ٣ \\ ٤ & ، س = ٣ \\ ٣س - ٥ & ، س < ٣ \end{cases}$$

الوحدة الرابعة

أسئلة الاختيار من متعدد

١ (جـ)	٢ (د)	٣ (د)	٤ (جـ)	٥ (ب)
٦ (ب)	٧ (أ)	٨ (جـ)	٩ (أ)	١٠ (أ)
١١ (أ)	١٢ (جـ)	١٣ (د)	١٤ (ب)	١٥ (أ)
١٦ (أ)	١٧ (ب)	١٨ (جـ)	١٩ (ب)	٢٠ (ب)
٢١ (أ)	٢٢ (أ)	٢٣ (جـ)	٢٤ (د)	٢٥ (جـ)
٢٦ (جـ)	٢٧ (ب)	٢٨ (ب)	٢٩ (ب)	٣٠ (د)
٣١ (ب)	٣٢ (ب)	٣٣ (جـ)	٣٤ (أ)	٣٥ (أ)
٣٦ (ب)	٣٧ (جـ)	٣٨ (ب)	٣٩ (جـ)	٤٠ (د)
٤١ (ب)	٤٢ (ب)	٤٣ (أ)	٤٤ (ب)	٤٥ (جـ)
٤٦ (جـ)	٤٧ (جـ)	٤٨ (ب)	٤٩ (ب)	٥٠ (د)
٥١ (ب)	٥٢ (ب)	٥٣ (جـ)	٥٤ (ب)	٥٥ (جـ)
٥٦ (ب)	٥٧ (أ)	٥٨ (ب)	٥٩ (د)	٦٠ (د)
٦١ (ب)	٦٢ (أ)	٦٣ (د)	٦٤ (ب)	٦٥ (د)
٦٦ (ب)	٦٧ (أ)	٦٨ (جـ)	٦٩ (ب)	٧٠ (د)
٧١ (أ)	٧٢ (ب)	٧٣ (د)	٧٤ (د)	٧٥ (أ)
٧٦ (جـ)	٧٧ (أ)	٧٨ (جـ)		

إجابات نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى الجبر

الاختبار الأول

١

① (د) ② (جـ) ③ (أ) ④ (أ)

٢

(أ) ① مجال د =]− ∞ ، ١[

② مجال ر = ح − {١ ، −١}

(ب) ارسم بنفسك ، المدى =]٠ ، ∞[

٣

(أ) ارسم بنفسك

؛ المجال = [−٢ ، ٣]

؛ الدالة تزايدية على الفترة]−٢ ، ٣[

(ب) ص = س − ١ ومثل بنفسك.

٤

(أ) ① م.ح = {٤} ② م.ح = $\{\frac{١}{٢}\}$

(ب) ارسم بنفسك.

٥

(أ) مجموعة الحل = ح −]$\frac{-٥}{٣}$ ، ٣[

(ب) مجموعة الحل = {٢٧ ، −٢٧ ، ١ ، −١}

الاختبار الثانى

١

① (د) ② (ب) ③ (د) ④ (ب)

٢

(أ) أثبت بنفسك. (ب) ٦

٣

(أ) مثِّل بنفسك.

(ب) ① ارسم بنفسك ، المدى = [٠ ، ∞[

، الدالة تناقصية فى الفترة]− ∞ ، ٢[

وتزايدية فى الفترة]٢ ، ∞[

② ارسم بنفسك ، المدى = [٠ ، ٢]

، الدالة تناقصية فى الفترة]٠ ، ٠,٢٧[

،]٢ ، ٣,٧٣[

، تزايدية فى الفترة]٠,٢٧ ، ٢[

،]٣,٧٣ ، ٤[

٤

(أ) ① فردية ② ليست زوجية وليست فردية.

③ زوجية

(ب) ① مجموعة الحل =]− ∞ ، ٠]

② مجموعة الحل = ∅

٥

(أ) ارسم بنفسك ، المجال = ح − {−١}

، المدى = ح − {−٢} ، تزايدية على ح − {−١}

(ب) ٢

إجابات نماذج اختبارات الكتاب المدرسى في التفاضل وحساب المثلثات

الاختبار الأول

١

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (د) (٤) (جـ)

٢

(أ) (١) $\frac{٨٠}{٧}$ (٢) ١٧

(ب) ق(∠أ) ≈ ٤٥° ٤٨′ ، ق(∠ب) ≈ ٦٣° ١٤′

، ق(∠جـ) ≈ ٦٨° ١١′ ، جـَ = ٢٦ سم

٣

(أ) (١) صفر (٢) ١ (٣) غير موجودة

(ب) محيط متوازى الأضلاع ≈ ٣٨ سم

٤

(أ) ق(∠ب) ≈ ٩ ٦٤° ، أ ٥١ ١١٥°

(ب) أ = $-\frac{١}{٢}$

٥

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{١٦}$

الاختبار الثانى

١

(١) (د) (٢) (د) (٣) (أ) (٤) (جـ)

٢

(أ) أ = −١

(ب) ق(∠جـ) = ٩٠° ، مساحة Δ أ ب جـ = ٢٤ سم^٢

٣

(أ) $\frac{٣}{٢}$

(ب) حَ ≈ ١٩,٥٠٤ سم ، ق(∠أ) = ٢٠° ٢٦′

، ق(∠ب) = ٤٠° ٤٧′

٤

(أ) $-\frac{٥}{٤}$

(ب) أثبت بنفسك ، مساحة الشكل أ ب جـ ء ≈ ١٢٤ سم^٢

٥

(أ) (١) $\frac{١}{٤}$ (٢) ٢

(ب) ٦١,٩ سم^٢

إجابات امتحانات مدارس المحافظات

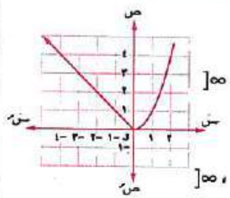
١ محافظة القاهرة

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب) (٢) (أ) (٣) (د) (٤) (جـ)
(٥) (أ) (٦) (ب) (٧) (جـ) (٨) (د)
(٩) (أ) (١٠) (ب) (١١) (جـ) (١٢) (جـ)
(١٣) (د) (١٤) (أ) (١٥) (د) (١٦) (جـ)
(١٧) (ب) (١٨) (أ) (١٩) (جـ) (٢٠) (أ)
(٢١) (د) (٢٢) (جـ) (٢٣) (أ) (٢٤) (ب)
(٢٥) (أ) (٢٦) (د) (٢٧) (جـ)

ثانياً الأسئلة المقالية

١



* المجال = ع
* المدى = [صفر ، ∞[
* الدالة تناقصية في]−∞ ، ٠[، وتزايدية في]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

٢

$د(س) = \frac{س^٢ + ٢|س|}{س}$

$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س}{س} & ، س > ٠ \\ \frac{س^٢ - ٢س}{س} & ، س < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{س(س + ٢)}{س} & ، س > ٠ \\ \frac{س(س - ٢)}{س} & ، س < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} س + ٢ & ، س > ٠ \\ س - ٢ & ، س < ٠ \end{cases}$

د(٠$^-$) = ٠ − ٢ = −٢

د(٠$^+$) = ٠ + ٢ = ٢

∵ د(٠$^-$) ≠ د(٠$^+$)

∴ $\lim_{س \to ٠}$ د(س) غير موجودة.

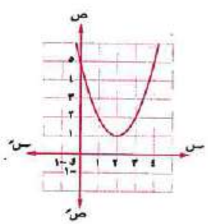
٢ محافظة الجيزة

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب) (٢) (أ) (٣) (ب) (٤) (أ)
(٥) (ب) (٦) (جـ) (٧) (جـ) (٨) (جـ)
(٩) (ب) (١٠) (جـ) (١١) (د) (١٢) (ب)
(١٣) (أ) (١٤) (د) (١٥) (ب) (١٦) (جـ)
(١٧) (ب) (١٨) (د) (١٩) (د) (٢٠) (أ)
(٢١) (د) (٢٢) (جـ) (٢٣) (ب) (٢٤) (جـ)
(٢٥) (د) (٢٦) (ب) (٢٧) (أ)

ثانياً الأسئلة المقالية

١



(١) المدى = [١ ، ∞[

(٢) الدالة تناقصية في]−∞ ، ٢[، تزايدية في]٢ ، ∞[

٢
∵ الدالة متصلة عند س = ٢

∴ د(٢^+) = د(٢^-) = د(٢)

∴ ٣ × $٢^٢$ + حـ × ٢ − ٢ = ٢ × ٢ − هـ = ١٦

∴ ١٠ + ٢ حـ = ٤ − هـ = ١٦

∴ ١٠ + ٢ حـ = ١٦ ، ٤ − هـ = ١٦

∴ حـ = ٣ ، هـ = −١٢

∴ ٤ حـ + هـ = ٤ × ٣ + (−١٢) = صفر

٣ محافظة الإسكندرية

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (ب)	③ (ب)	④ (د)
⑤ (ب)	⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (ب)	⑩ (ب)	⑪ (د)	⑫ (جـ)
⑬ (أ)	⑭ (د)	⑮ (ب)	⑯ (أ)
⑰ (جـ)	⑱ (د)	⑲ (د)	⑳ (ب)
㉑ (ب)	㉒ (ب)	㉓ (د)	㉔ (ب)
㉕ (د)	㉖ (أ)	㉗ (جـ)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١
∵ الدالة متصلة فى ح

∴ الدالة متصلة عند س = ٢

∴ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٧ - ٢^٧}{س^٣ - ٢^٣}$ = ك

∴ $\frac{٧}{٣} \times ٢^٤$ = ك

∴ ك = $\frac{١١٢}{٣}$

٢
د(س) = −$(س - ٢)^٣$ + ٢



* المدى = ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية

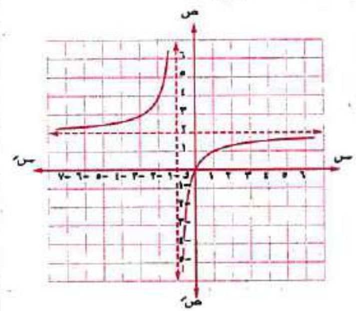
٤ محافظة القليوبية

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (جـ)	③ (أ)	④ (ب)
⑤ (ب)	⑥ (د)	⑦ (أ)	⑧ (أ)
⑨ (ب)	⑩ (جـ)	⑪ (ب)	⑫ (ب)
⑬ (أ)	⑭ (د)	⑮ (د)	⑯ (د)
⑰ (أ)	⑱ (د)	⑲ (جـ)	⑳ (ب)
㉑ (ب)	㉒ (د)	㉓ (جـ)	㉔ (جـ)
㉕ (ب)	㉖ (د)	㉗ (جـ)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١
ر(س) = ٢ − $\frac{٢}{س + ١}$



* المجال = ح − {−١}
* المدى = ح − {٢}

٢
∵ د(س) لها نهاية عند س = ١

∴ $\lim_{س \to ١^-}$ د(س) = $\lim_{س \to ١^+}$ د(س) = ٥

∴ م × ١ + ل = ل × $١^٢$ − ١ + ٧ = ٥

م + ل = ل + ٦ = ٥

∴ م + ل = ٥ ، ل + ٦ = ٥

∴ ل = −١ ∴ م = ٦

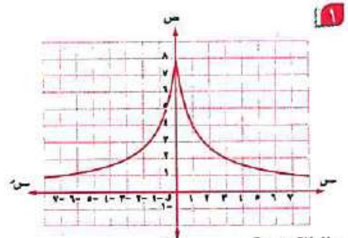
٥ محافظة الشرقية

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (جـ)	③ (د)	④ (جـ)
⑤ (ب)	⑥ (أ)	⑦ (د)	⑧ (أ)
⑨ (د)	⑩ (ب)	⑪ (جـ)	⑫ (أ)
⑬ (د)	⑭ (أ)	⑮ (ب)	⑯ (أ)
⑰ (ب)	⑱ (أ)	⑲ (د)	⑳ (جـ)
㉑ (أ)	㉒ (د)	㉓ (أ)	㉔ (ب)
㉕ (ب)	㉖ (أ)	㉗ (أ)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١



* الدالة زوجية
* المدى =]٠ ، ٨]

٢
∵ الدالة متصلة عند س = أ

∴ د($أ^+$) = د($أ^-$) = د(أ)

٢ − $أ^٢$ = أ

∴ $أ^٢$ + أ − ٢ = ٠

(أ + ٢) (أ − ١) = ٠

∴ أ = −٢ ، أ = ١

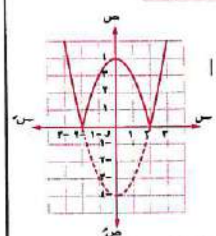
٦ محافظة المنوفية

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (د)	③ (د)	④ (أ)
⑤ (أ)	⑥ (ب)	⑦ (أ)	⑧ (جـ)
⑨ (جـ)	⑩ (جـ)	⑪ (أ)	⑫ (ب)
⑬ (د)	⑭ (ب)	⑮ (د)	⑯ (ب)
⑰ (جـ)	⑱ (جـ)	⑲ (أ)	⑳ (ب)
㉑ (جـ)	㉒ (د)	㉓ (أ)	㉔ (أ)
㉕ (د)	㉖ (أ)	㉗ (جـ)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١
د(س) = |$س^٢$ − ٤|



* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، −٢[،]٠ ، ٢[
وتزايدية فى]−٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[
* الدالة زوجية

٢
$\lim_{س \to \infty} \frac{\left(\sqrt{٤س^٢ + ٣ب س + ٥} - ٢س\right)}{١} \times \frac{\left(\sqrt{٤س^٢ + ٣ب س + ٥} + ٢س\right)}{\left(\sqrt{٤س^٢ + ٣ب س + ٥} + ٢س\right)}$

$$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{أس}^2 + ٣\text{ب س} + ٥ - ٤\text{س}^2}{\sqrt{\text{أس}^2 + ٣\text{ب س} + ٥} + ٢\text{س}}$$

$$\therefore \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(\text{أ} - ٤)\text{س}^2 + ٣\text{ب س} + ٥}{\sqrt{\text{أس}^2 + ٣\text{ب س} + ٥} + ٢\text{س}} = ٣$$

∵ أكبر درجة في المقام هي ١

∴ درجة البسط = ١

∴ أ − ٤ = ٠

∴ أ = ٤

$$\therefore \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{ب س} + ٥}{\sqrt{٤\text{س}^2 + ٣\text{ب س} + ٥} + ٢\text{س}} = ٣$$

(بقسمة كل من البسط والمقام على س)

$$\therefore \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{ب} + \frac{٥}{\text{س}}}{\left(\sqrt{٤ + \frac{٣\text{ب}}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}^2}} + ٢\right)} = ٣$$

$$\therefore \frac{٣\text{ب}}{\sqrt{٤} + ٢} = ٣$$

∴ ٣ب = ٣ × (٢ + ٢)

∴ ب = ٤

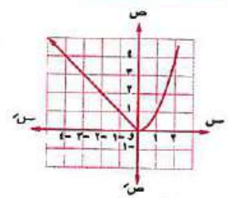
٧ محافظة الغربية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (جـ)	③ (أ)	④ (د)
⑤ (د)	⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (ب)	⑩ (أ)	⑪ (ب)	⑫ (د)
⑬ (أ)	⑭ (ب)	⑮ (د)	⑯ (جـ)
⑰ (ب)	⑱ (ب)	⑲ (أ)	⑳ (ب)
㉑ (ب)	㉒ (جـ)	㉓ (أ)	㉔ (ب)
㉕ (جـ)	㉖ (أ)	㉗ (أ)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١



* المدى = [٠ ، ∞[
* ليست زوجية وليست فردية

٢

∵ الدالة متصلة عند س = ٢

$\therefore$ د (٢^+) = د (٢^-) = د (٢)

$\therefore ٢^2 - ١ = ٢ - ٢\text{أ}$

٣ = ٢ − ٢أ

٢أ = −١

$\therefore \text{أ} = \frac{-١}{٢}$

٨ محافظة الدقهلية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (د)	③ (جـ)	④ (ب)
⑤ (ب)	⑥ (أ)	⑦ (جـ)	⑧ (د)
⑨ (د)	⑩ (د)	⑪ (أ)	⑫ (جـ)
⑬ (د)	⑭ (ب)	⑮ (د)	⑯ (ب)
⑰ (ب)	⑱ (جـ)	⑲ (د)	⑳ (جـ)
㉑ (جـ)	㉒ (ب)	㉓ (د)	㉔ (د)
㉕ (أ)	㉖ (أ)	㉗ (د)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

∵ د (٢) = ٤ ، الدالة متصلة عند س = ٢

$\therefore$ د (٢^+) = د (٢^-) = د (٢)

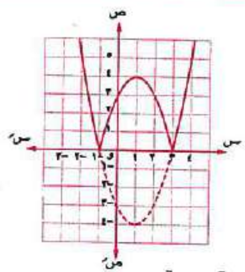
$\therefore ٢^2 + \text{ك} \times ٢ - ٢ = ٥\text{ك} + \text{م} \times ٢ = ٤$

∴ ٢ك + ٢ = ٤   ∴ ك = ١

، ٥ك + ٢م = ٤

∴ ٥ × ١ + ٢م = ٤ $\therefore \text{م} = \frac{-١}{٢}$

٢



* المدى = [٠ ، ∞[
* تناقصية في]−∞ ، −١[∪]١ ، ٣[
* ، تزايدية في]−١ ، ١[∪]٣ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية

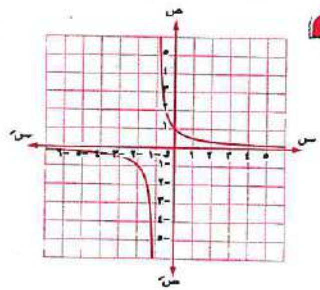
٩ محافظة دمياط

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (ب)	③ (ب)	④ (أ)
⑤ (جـ)	⑥ (د)	⑦ (ب)	⑧ (جـ)
⑨ (د)	⑩ (د)	⑪ (أ)	⑫ (د)
⑬ (د)	⑭ (جـ)	⑮ (جـ)	⑯ (أ)
⑰ (ب)	⑱ (د)	⑲ (جـ)	⑳ (د)
㉑ (ب)	㉒ (جـ)	㉓ (أ)	㉔ (ب)
㉕ (د)	㉖ (أ)	㉗ (جـ)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١



* المجال = ح − {−١}
* المدى = ح − {٠}
* الدالة ليست زوجية وليست فردية

٢

∵ د (٢) = ٧ ، الدالة متصلة عند س = ٢

$\therefore$ د (٢^+) = د (٢^-) = د (٢)

$\therefore ٥ \times ٢ + \text{ك} = ٢^2 + ٣\text{م} = ٧$

١٠ + ك = ٧   ،   ٤ + ٣م = ٧

∴ ك = −٣   ∴ م = ١

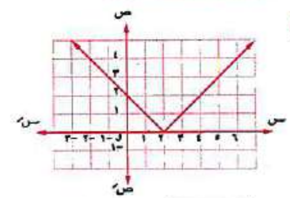
١٠ محافظة كفر الشيخ

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (ب)	③ (جـ)	④ (أ)
⑤ (د)	⑥ (ب)	⑦ (ب)	⑧ (د)
⑨ (ب)	⑩ (جـ)	⑪ (أ)	⑫ (ب)
⑬ (د)	⑭ (جـ)	⑮ (ب)	⑯ (أ)
⑰ (ب)	⑱ (جـ)	⑲ (د)	⑳ (د)
㉑ (ب)	㉒ (د)	㉓ (جـ)	㉔ (أ)
㉕ (ب)	㉖ (جـ)	㉗ (د)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١



$د(س) = \sqrt{(س - ٢)^{٢}} = |س - ٢|$

* مدى الدالة = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية في]− ∞ ، ٢[وتزايدية في]٢ ، ∞[

٢

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٢^{٣}}{س^{٥} - ٢^{٥}} + \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٤} - ٢^{٤}}{س^{٧} - ٢^{٧}}$

$= \frac{٣}{٥} \times ٢^{-٢} + \frac{٤}{٧} \times ٢^{-٣} = \frac{٣١}{١٤٠}$

١١ محافظة البحيرة

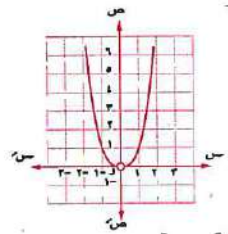
أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (أ)	③ (د)	④ (جـ)
⑤ (جـ)	⑥ (ب)	⑦ (جـ)	⑧ (أ)
⑨ (د)	⑩ (د)	⑪ (ب)	⑫ (أ)
⑬ (جـ)	⑭ (ب)	⑮ (أ)	⑯ (د)
⑰ (جـ)	⑱ (أ)	⑲ (د)	⑳ (ب)
㉑ (جـ)	㉒ (أ)	㉓ (ب)	㉔ (د)
㉕ (ب)	㉖ (د)	㉗ (أ)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

$د(س) = \begin{cases} س^{٣} & ، س > ٠ \\ -س^{٢} & ، س < ٠ \end{cases}$



* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية في]− ∞ ، ٠[وتزايدية في]٠ ، ∞[
* الدالة زوجية

٢

$د(٠) = ٣ - جتا ٠ = ٢$

$د(٠^{+}) = \lim_{س \to ٠^{+}} \frac{١ - جتا س + ٢ جا س}{س}$

$= \lim_{س \to ٠^{+}} \frac{١ - جتا س}{س} + \lim_{س \to ٠^{+}} \frac{٢ جا س}{س}$

$=$ صفر $+ ٢ = ٢$

$د(٠^{-}) = \lim_{س \to ٠^{-}} (٣ - جتا س) = ٣ - ١ = ٢$

∵ $د(٠) = د(٠^{+}) = د(٠^{-})$

∴ الدالة متصلة عند س = ٠

١٢ محافظة الفيوم

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (د)	③ (أ)	④ (د)
⑤ (ب)	⑥ (ب)	⑦ (أ)	⑧ (د)
⑨ (ب)	⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	⑫ (جـ)
⑬ (د)	⑭ (ب)	⑮ (د)	⑯ (ب)
⑰ (جـ)	⑱ (ب)	⑲ (جـ)	⑳ (أ)
㉑ (جـ)	㉒ (د)	㉓ (ب)	㉔ (جـ)
㉕ (د)	㉖ (د)	㉗ (أ)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

∵ د (س) لها نهاية عند س = ٠

∴ $\lim_{س \to ٠^{+}} د(س) = \lim_{س \to ٠^{-}} د(س)$

∴ $\lim_{س \to ٠^{+}} \left(أ جتا س + \frac{١٥ جا س}{س}\right)$

$= \lim_{س \to ٠^{-}} \frac{س^{٦} - ٢^{٦}}{س^{٢} - ٢^{٢}}$

∴ $أ + ١٥ = \frac{٦}{٢} \times ٢^{٤}$

$أ + ١٥ = ١٦$

∴ أ = ١

٢

$|س + ٢| + |س + ٢| + |س + ٢| \leq ٦$

$٣|س + ٢| \leq ٦$

$|س + ٢| \leq ٢$

$-٢ \leq س + ٢ \leq ٢$

$-٤ \leq س \leq ٠$

م.ح = [−٤ ، ٠]

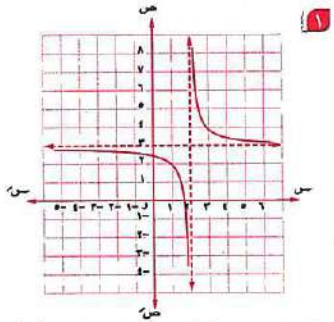
١٣ محافظة المنيا

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (جـ)	③ (د)	④ (د)
⑤ (د)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)
⑨ (أ)	⑩ (ب)	⑪ (أ)	⑫ (جـ)
⑬ (ب)	⑭ (أ)	⑮ (أ)	⑯ (ب)
⑰ (أ)	⑱ (د)	⑲ (أ)	⑳ (أ)
㉑ (جـ)	㉒ (ب)	㉓ (جـ)	㉔ (د)
㉕ (ب)	㉖ (ب)	㉗ (ب)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١



* المجال = ح − {٢}   * المدى = ح − {٣}
* الدالة تناقصية في الفترة]− ∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية

٢

∵ $د\left(\frac{١}{٢}\right) = ٤\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + ٣ = ٤$

، $د\left(\frac{١}{٢}^{-}\right) = \lim_{س \to \frac{١}{٢}^{-}} (٤س^{٢} + ٣) = ٤$

، $د\left(\frac{١}{٢}^{+}\right) = \lim_{س \to \frac{١}{٢}^{+}} (٥ - ٢س) = ٤$

∴ $د\left(\frac{١}{٢}\right) = د\left(\frac{١}{٢}^{-}\right) = د\left(\frac{١}{٢}^{+}\right)$

∴ الدالة د متصلة عند $س = \frac{١}{٢}$

١٤ محافظة سوهاج

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

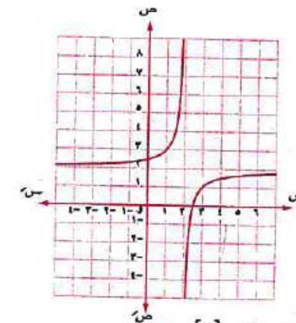
① (أ)	② (د)	③ (ب)	④ (جـ)
⑤ (ب)	⑥ (د)	⑦ (أ)	⑧ (جـ)
⑨ (أ)	⑩ (جـ)	⑪ (أ)	⑫ (ب)
⑬ (د)	⑭ (د)	⑮ (د)	⑯ (د)
⑰ (أ)	⑱ (جـ)	⑲ (د)	⑳ (أ)

(٢١) (ب) (٢٢) (د) (٢٣) (ب) (٢٤) (أ)

(٢٥) (ب) (٢٦) (ب) (٢٧) (د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١



* المجال = ح − {٢}

* الدالة تزايدية فى الفترة]− ∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

* الدالة ليست زوجية وليست فردية

٢

∵ الدالة متصلة عند س = −٢

∴ د (-٢^+) = د (-٢^-) = د (−٢)

$$∴ أ \times -٢ - ٢ = \frac{(-٢)^٥ - ٣٢}{(-٢)^٣ - ٨}$$

∴ −٢ أ − ٢ = ٤

∴ أ = −٣

الجزء الخاص

بالإجابات

الرياضيات

البحتة



2025

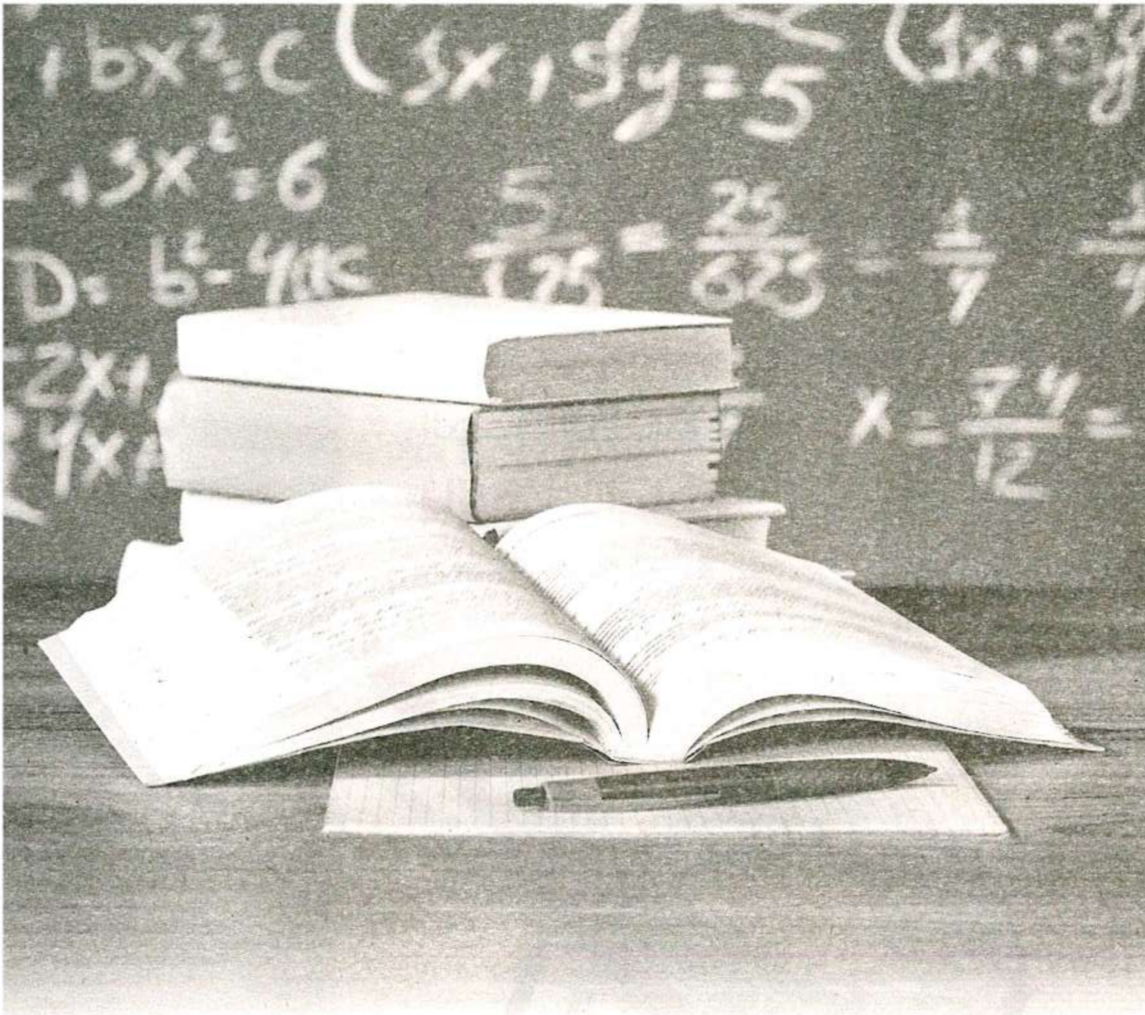
المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى

القسم العلمى

الفصل الدراسى الأول



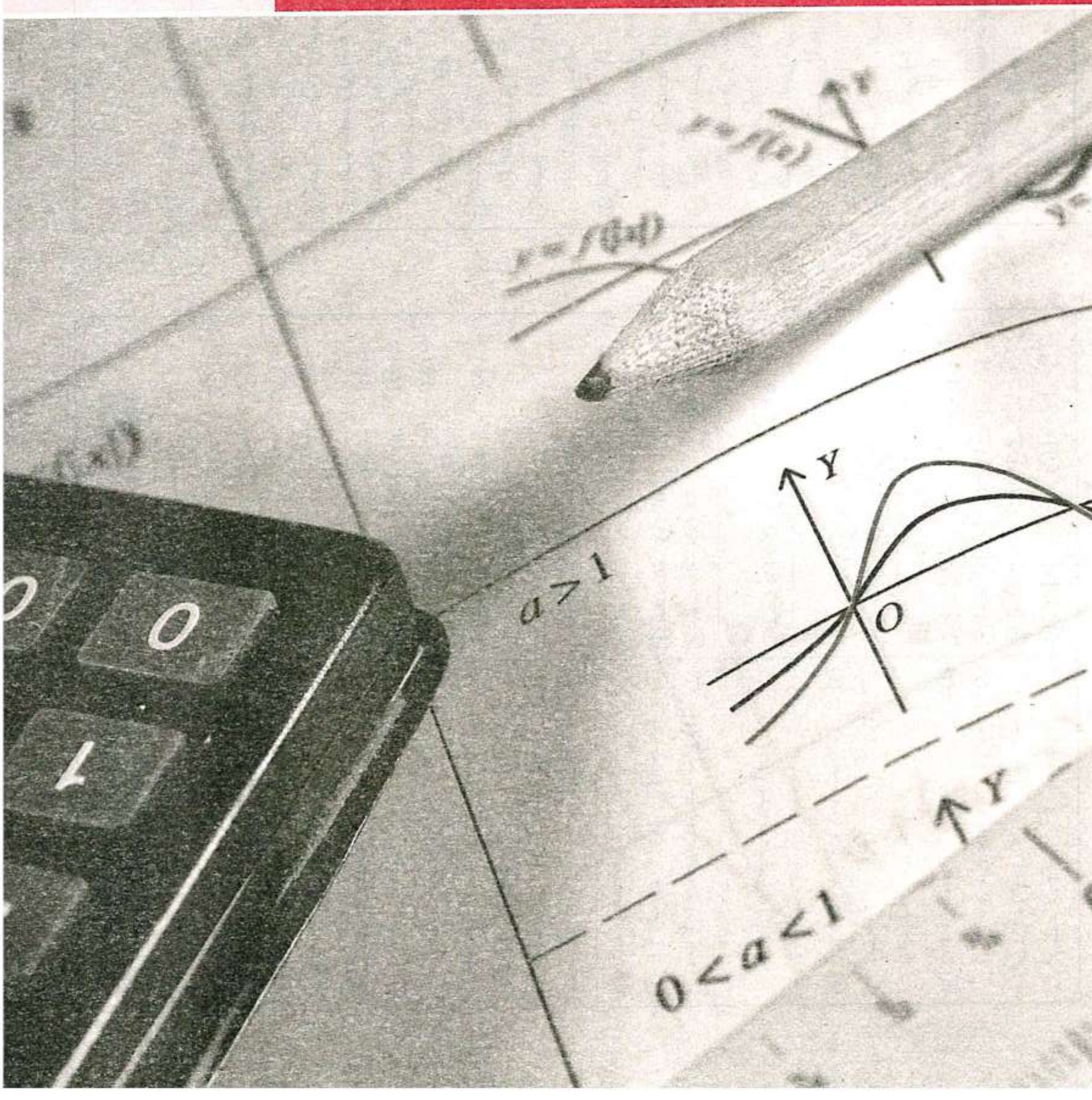
أولًا

إجابات تمارين

الجبر

إجابات تمارين الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية
ورسم المنحنيات



إجابات الوحدة الأولى

إجابات تمارين المتطلبات القبلية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (ب) ③ (د) ④ (جـ)
⑤ (جـ) ⑥ (أ) ⑦ (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

1

∵ د(س) = أ² س² + ١٠ أ س + ٢٥
، ر(س) = ٩ س² + ٣٠ س + حـ − ٤
، د(س) = ر(س)
∴ ١٠ أ = ٣٠ ∴ أ = ٣
، حـ − ٤ = ٢٥ ∴ حـ = ٢٩

2

① ∵ أ + ب = ٥ (١) ، أ + حـ = ٣ (٢)
، ب = −٢ وبالتعويض عن قيمة ب في (١)
∴ أ − ٢ = ٥
∴ أ = ٧ وبالتعويض عن قيمة أ في (٢)
∴ ٧ + حـ = ٣ ∴ حـ = −٤

② ∵ أ + ب = ١ (١) ، أ + حـ = ٠ (٢)
، ب = −٢ ∴ أ − ٢ = ١ ∴ أ = ٣
، ٣ + حـ = ٠ ∴ حـ = −٣

③ ∵ أ + ٢ب = ٧ (١)
، − حـ = ٥ ∴ حـ = −٥ ، أ − ب = ٤ (٢)
من (١) ، (٢) :
∴ ب = ١ ، أ = ٥

إجابات تمارين 1

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (د) ③ (د) ④ (جـ)
⑤ (أ) ⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (أ)
⑨ (د) ⑩ (جـ) ⑪ (ب) ⑫ (جـ)
⑬ (د) ⑭ (جـ) ⑮ (ب) ⑯ (ب)
⑰ (د) ⑱ (أ) ⑲ (د) ⑳ (د)
㉑ (ب) ㉒ (ب) ㉓ (جـ) ㉔ (جـ)
㉕ (د) ㉖ (ب) ㉗ (جـ) ㉘ (د)
㉙ (جـ) ㉚ (د) ㉛ (جـ) ㉜ (د)
㉝ (د) ㉞ (ب) ㉟ (جـ)
㊱ أولًا : (ب) ثانيًا : (جـ) ㊲ (ب)
㊳ (د) ㊴ (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

1

① دالة ② ليست دالة ③ دالة
④ ليست دالة ⑤ دالة ⑥ دالة
⑦ ليست دالة ⑧ دالة ⑨ دالة

2

① ليست دالة ② ليست دالة ③ دالة

3

① ع − {١ ، ٢} ② ع − {٣}
③ ع − {١ ، −٢/٣} ④ ع − {−١}

4

① ع − {٥/٢} ②]٣ ، ∞[
③]−∞ ، ١[④ ع −]−٤ ، ٤[
⑤]−٣ ، ٣[⑥ ع
⑦ ع − {٢} ⑧ [٠ ، ∞[− {١}

5

① ع ②]−∞ ، ٤[
③ [٠ ، ٦]

6

① المجال = ع ، المدى = {−٢ ، ٣}
، الدالة ثابتة في]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[
② المجال = ع − {٠} ، المدى = ع − [−٢ ، ٢]
، الدالة تناقصية في]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[
③ المجال = ع − {١} ، المدى =]−٢ ، ∞[
، الدالة تناقصية في]−∞ ، ١[
، تزايدية في]١ ، ∞[
④ المجال = ع − {٢} ، والمدى = ع − {٢}
، الدالة تزايدية في]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
⑤ المجال = ع − {−١ ، ٢} ، المدى = {٣}
، الدالة ثابتة على مجالها.
⑥ المجال = ع − [٠ ، ١[
، المدى =]٣ ، ∞[∪ {٢} ، الدالة ثابتة في
]−∞ ، ٠[وتزايدية في]١ ، ∞[
⑦ المجال = ع ، المدى =]−∞ ، ٤]
، الدالة تزايدية في]−∞ ، −٢[،]٠ ، ٢[
وتناقصية في]−٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[
⑧ المجال = ع ، المدى = ع − [١ ، ٢[
، الدالة تناقصية في]−∞ ، ٠[،]١ ، ∞[
وتزايدية في]٠ ، ١[
⑨ المجال = [−٢ ، ∞[، المدى = [٠ ، ∞[
، الدالة تزايدية في]−٢ ، ٠[
وتناقصية في]٠ ، ٢[،]٢ ، ∞[

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (د) ② (د) ③ (د)
④ (جـ) ⑤ (أ) ⑥ (د)

إرشادات الحل :

① ∵ س تدل على عدد أضلاع مضلع
∴ س عدد صحيح أكبر من ٢
∴ المجال = ص⁺ − {١ ، ٢}

② بوضع ∛س − ٢ = ٠
∴ ∛س = ٢ ∴ س = ٨
∴ المجال = ع − {٨}

③ ∵ ٢س ≥ ٠ ∴ س ≥ ٠
∴ س ∈ [٠ ، ∞[
بوضع √(٢س) − س = ٠ ∴ √(٢س) = س
∴ ٢س = س² ∴ س² − ٢س = ٠
∴ س(س − ٢) = ٠
∴ س = ٠ أ، س = ٢
∴ المجال = [٠ ، ∞[− {٢}

④ ∵ س − ١ ≥ ٠ ∴ س ≥ ١
∴ س ∈ [١ ، ∞[
وبوضع √(س − ١) = ٣ ∴ س − ١ = ٩
∴ س = ١٠
∴ المجال = [١ ، ∞[− {١٠}

⑤ ∵ س − ١ ≥ ٠ ∴ س ≥ ١
∴ س ∈ [١ ، ∞[
وبوضع √(س − ١) + ٣ = ٠ (تعارض)
∴ المجال = [١ ، ∞[

⑥ ∵ د(س) = √(−(س² − ٦س + ٩))
= √(−(س − ٣)²)
∴ −(س − ٣)² ≥ ٠ ∴ (س − ٣)² ≤ ٠
وهذا لا يتحقق إلا في حالة التساوي فقط
أي عندما س = ٣ ∴ المجال = {٣}

إجابات تمارين 2

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (ب)	③ (جـ)	④ (جـ)
⑤ (أ)	⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (د)	⑩ (د)	⑪ (جـ)	⑫ (جـ)
⑬ (د)	⑭ (أ)	⑮ (ب)	⑯ (د)
⑰ (ب)	⑱ (جـ)	⑲ (أ)	⑳ (جـ)
㉑ (د)	㉒ (جـ)	㉓ (ب)	㉔ (ب)
㉕ (جـ)	㉖ (د)	㉗ (د)	㉘ (أ)
㉙ (ب)	㉚ (أ)	㉛ (ب)	㉜ (أ)
㉝ (جـ)	㉞ (جـ)	㉟ (أ)	㊱ (جـ)
㊲ (ب)	㊳ (د)	㊴ (جـ)	㊵ (ب)
㊶ (ب)	㊷ (ب)		

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① (د + ر) (س) = س^{٢} − ١٦

، المجال = [−٤ ، ٨] ∩ [−٧ ، ٤] = [−٤ ، ٤]

② (د − ر) (س) = س^{٢} − ٢ س − ٨

، المجال = [−٤ ، ٤]

③ (د . ر) (س) = (س − ٤) (س^{٢} − س − ١٢)

، المجال = [−٤ ، ٤]

④ $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ١٢}{\text{س} - ٤}$

= $\frac{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٤)}$ = س + ٣

، المجال = [−٤ ، ٤[

⑤ $\left(\frac{\text{ر}}{\text{د}}\right)$ (س) = $\frac{\text{س} - ٤}{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٣)}$ = $\frac{١}{\text{س} + ٣}$

، المجال = [−٤ ، ٤[− {−٣}

٢

د (س) = س^{٢} − ٤ ومجال د = ح

، ر (س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$ ومجال ر = [١ ، ∞[

∴ المجال المشترك = [١ ، ∞[

① (د + ر) (س) = س^{٢} − ٤ + $\sqrt{\text{س} - ١}$

، المجال = [١ ، ∞[

، (د . ر) (س) = (س^{٢} − ٤) ($\sqrt{\text{س} - ١}$)

، المجال = [١ ، ∞[

، $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\sqrt{\text{س} - ١}}$ ، المجال =]١ ، ∞[

، $\left(\frac{\text{ر}}{\text{د}}\right)$ (س) = $\frac{\sqrt{\text{س} - ١}}{\text{س}^{٢} - ٤}$

، المجال = [١ ، ∞[− {٢}

② (د + ر) (٥) = ٥^{٢} − ٤ + $\sqrt{٥ - ١}$ = ٢٣

، (د . ر) (٢) = (٢^{٢} − ٤) ($\sqrt{٢ - ١}$) = صفر

، $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (٣) = $\frac{٣^{٢} - ٤}{\sqrt{٣ - ١}}$ = $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$

، $\left(\frac{\text{ر}}{\text{د}}\right)$ (−٢) غير معرفة لأن −٢ ∌ المجال

٣

أولاً :

① (د + ر) (س) = س^{٢} − ٤ س + $\sqrt{\text{س} + ٢}$

، المجال = ح ∩ [−٢ ، ∞[= [−٢ ، ∞[

② (ر − ع) (س) = $\sqrt{\text{س} + ٢}$ − $\sqrt{٤ - \text{س}}$

، المجال = [−٢ ، ∞[∩]−∞ ، ٤] = [−٢ ، ٤]

③ (د . ع) (س) = (س^{٢} − ٤ س) ($\sqrt{٤ - \text{س}}$)

، المجال = ح ∩]−∞ ، ٤] =]−∞ ، ٤]

④ $\left(\frac{\text{ع}}{\text{د}}\right)$ (س) = $\frac{\sqrt{٤ - \text{س}}}{\text{س}^{٢} - ٤ \text{س}}$ = $\frac{\sqrt{٤ - \text{س}}}{\text{س} (\text{س} - ٤)}$

، المجال =]−∞ ، ٤[− {٠}

ثانيًا :

① (ر − ع) (١) = $\sqrt{١ + ٢}$ − $\sqrt{٤ - ١}$ = صفر

② (د . ع) (٥) غير معرفة لأن ٥ ∌ المجال

③ $\left(\frac{\text{ع}}{\text{د}}\right)$ (٣) = $\frac{\sqrt{٤ - ٣}}{٣^{٢} - ٤ \times ٣}$ = −$\frac{١}{٣}$

٤

① ح − {٠ ، −٢}

② ح − {−١ ، ١}

③]−∞ ، ١[

④]$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

⑤ [٢ ، ∞[

⑥ [٤ ، ∞[− {٦}

⑦ [٣ ، ∞[

⑧]٥ ، ∞[

٥

① (د . ر) (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} - ٢ \text{س} ، & \text{س} \geq ٢ \\ -\text{س}^{٢} + ٢ \text{س} ، & \text{س} < ٢ \end{cases}$

، والمجال = ح

② $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (س) = $\begin{cases} ١ - \frac{٢}{\text{س}} ، & \text{س} \geq ٢ \\ -١ + \frac{٢}{\text{س}} ، & \text{س} < ٢ ، \text{س} \neq ٠ \end{cases}$

، والمجال = ح − {٠}

③ $\left(\frac{\text{ر}}{\text{د}}\right)$ (س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}}{\text{س} - ٢} ، & \text{س} > ٢ \\ \frac{\text{س}}{-\text{س} + ٢} ، & \text{س} < ٢ \end{cases}$

، والمجال = ح − {٢}

٦

① ح −]٣ ، ٥]

② [٢ ، ∞[− {٣}

③ [−٢ ، ∞[− {٧ ، −١}

④ ح − {١ ، ٢ ، $\frac{٧}{٤}$}

٧

① (د ∘ ر) (٢) = د (ر (٢)) = د (٢^{٢} − ٥)

= د (−١) = ٣ × (−١) + ١ = −٢

② (ر ∘ د) (−٣) = ر (د (−٣)) = ر (٣ (−٣) + ١)

= ر (−٨) = (−٨)^{٢} − ٥ = ٥٩

③ (ر ∘ ق) (١) = ر (ق (١)) ر (١^{٣})

= ر (١) = ١^{٢} − ٥ = −٤

④ (ق ∘ د) (−٢) = ق (د (−٢)) = ق (٣ (−٢) + ١)

= ق (−٥) = (−٥)^{٣} = −١٢٥

٨

① (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (س + ٣) = $\frac{١}{\text{س} + ٣}$

∵ م$_{١}$ = مجال ر = ح

، قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د

هى م$_{٢}$ = ح − {−٣}

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح − {−٣}

② (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) = ر $\left(\frac{١}{\text{س}}\right)$

= $\frac{١}{\text{س}}$ + ٣

، ∵ م$_{١}$ = مجال د = ح − {٠}

، قيم س التى تجعل د (س) فى مجال ر

هى م$_{٢}$ = ح − {٠}

∴ مجال (ر ∘ د) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح − {٠}

٩

① ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (٣ س) = (٣ س)^{٢} + ٦

= ٩ س^{٢} + ٦

∴ (د ∘ ر) (٣) = ٩ × ٣^{٢} + ٦ = ٨٧

② ∵ ٩ س^{٢} + ٦ = ٤٢ ∴ ٩ س^{٢} = ٣٦

∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = ± ٢

١٠

∵ (د ∘ ر) (س)

= د (ر (س)) = د ($\sqrt{\text{س} - ٢}$)

= ($\sqrt{\text{س} - ٢}$)^{٢} − ٣ = س − ٢ − ٣ = س − ٥

، ∵ م$_{١}$ = مجال ر = [٢ ، ∞[

، قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د هى م$_{٢}$ = ح

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = [٢ ، ∞[

، (د ∘ ر) (٣) = ٣ − ٥ = −٢

11

∵ (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

$= \text{د}\left(\frac{٢}{\text{س} - ٢}\right) = \sqrt{\frac{٢}{\text{س} - ٢} + ١}$

$= \sqrt{\frac{\text{س} - ١}{\text{س} - ٢}}$

، ∵ م١ = مجال ر = ح − {٢}

، بوضع $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} - ٢} \geq ٠$

∴ قيم س التي تجعل ر(س) في مجال د هي م٢ = ح −]١ ، ٢]

∴ مجال (د ∘ ر) = م١ ∩ م٢ = ح −]١ ، ٢]

12

(1) ∵ (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

$= \text{د}\left(\sqrt{٤ - \text{س}}\right)$

$= \sqrt{\sqrt{٤ - \text{س}} - ٢}$

، ∵ م١ = مجال ر =]−∞ ، ٤]

، بوضع $\sqrt{٤ - \text{س}} - ٢ \geq ٠$

أي $\sqrt{٤ - \text{س}} \geq ٢$

أي ٤ − س ≥ ٤ أي س ≤ ٠

∴ قيم س التي تجعل ر(س) في مجال د هي م٢ =]−∞ ، ٠]

∴ مجال (د ∘ ر) = م١ ∩ م٢ =]−∞ ، ٠]

(2) ∵ (ر ∘ د)(س) = ر(د(س))

$= \text{ر}\left(\sqrt{\text{س} - ٢}\right)$

$= \sqrt{٤ - \sqrt{\text{س} - ٢}}$

، ∵ م١ = مجال د = [٢ ، ∞[

، بوضع $٤ - \sqrt{\text{س} - ٢} \geq ٠$

∴ $\sqrt{\text{س} - ٢} \leq ٤$

∴ س − ٢ ≤ ١٦ ∴ س ≤ ١٨

∴ قيم س التي تجعل د(س) في مجال ر هي م٢ =]−∞ ، ١٨]

∴ مجال (ر ∘ د) = م١ ∩ م٢ = [٢ ، ١٨]

13

(1) ∵ (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

$= \text{د}\left(\sqrt{\text{س}^٢ - ٤}\right)$

$= \sqrt{\sqrt{\text{س}^٢ - ٤} - ١}$

، بوضع $\text{س}^٢ - ٤ \geq ٠$

∴ م١ = مجال ر = ح −]−٢ ، ٢[

وبوضع $\sqrt{\text{س}^٢ - ٤} - ١ \geq ٠$

أي $\sqrt{\text{س}^٢ - ٤} \geq ١$ أي $\text{س}^٢ - ٤ \geq ١$

أي $\text{س}^٢ - ٥ \geq ٠$

، قيم س التي تجعل ر(س) في مجال د هي

$\text{م}_٢ = \text{ح} -]-\sqrt{٥} ، \sqrt{٥}[$

∴ مجال (د ∘ ر) = م١ ∩ م٢

$= \text{ح} -]-\sqrt{٥} ، \sqrt{٥}[$

(2) ∵ (ر ∘ د)(س) = ر(د(س))

$= \text{ر}\left(\sqrt{\text{س} - ١}\right)$

$= \sqrt{\left(\sqrt{\text{س} - ١}\right)^٢ - ٤}$

$= \sqrt{\text{س} - ١ - ٤} = \sqrt{\text{س} - ٥}$

، ∵ م١ = مجال د = [١ ، ∞[

، قيم س التي تجعل د(س) في مجال ر هي

م٢ = [٥ ، ∞[

∴ مجال (ر ∘ د) = م١ ∩ م٢ = [٥ ، ∞[

14

$\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ٤}$ ، $\text{ر}(\text{س}) = \text{س}^٢$

(توجد حلول أخرى)

15

بفرض د(س) = أ س + ب

، ∵ (د ∘ د)(س) = ١٦ س + ١٥

∴ د(د(س)) = ١٦ س + ١٥

∴ د(أ س + ب) = ١٦ س + ١٥

∴ أ(أ س + ب) + ب = ١٦ س + ١٥

∴ $\text{أ}^٢$ س + أ ب + ب = ١٦ س + ١٥

∴ $\text{أ}^٢ = ١٦$ ومنها أ = ±٤

، أ ب + ب = ١٥ ∴ $\text{ب} = \frac{١٥}{\text{أ} + ١}$

، عند أ = ٤ ∴ ب = ٣

، عند أ = −٤ ∴ ب = −٥

∴ د(س) = ٤ س + ٣

أ، د(س) = −٤ س − ٥

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1

(1) (د) (2) (د) (3) (د) (4) (جـ) (5) (جـ)

(6) (د) (7) (أ) (8) (د) (9) (جـ)

إرشادات لحل رقم 1

(1) ∵ مجال د = [١ ، ∞[، مجال ر =]−∞ ، ١]

∴ مجال (د + ر) = [١ ، ∞[∩]−∞ ، ١]

= {١}

(2) عندما ٠ < س < ١

(د + ر)(س) = د(س) + ر(س)

= (−س + ٢) + (س + ٢) = ٤

(3) (ر ∘ د)(−١) = ر(د(−١))

[لاحظ أن د(−١) = $(-١)^٢ + ١ = ٢$]

= ر(٢)

= $(٢)^٢ + ٢ = ٦$

(4) ∵ د(ر(س)) = د(س)

∴ د(٢ س + ٣) = د(س)

∴ $(٢\text{س} + ٣)^٢ = \text{س}^٢$

∴ $٤\text{س}^٢ + ١٢\text{س} + ٩ - \text{س}^٢ = ٠$

∴ $٣\text{س}^٢ + ١٢\text{س} + ٩ = ٠$

∴ $\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٣ = ٠$

∴ (س + ١)(س + ٣) = ٠

∴ س = −١ أ، س = −٣

∴ مجموعة الحل = {−١ ، −٣}

(5) ∵ (د ∘ ر)(س) = ٣ س + ٢

∴ د(ر(س)) = ٣ س + ٢

∴ ٢ ر(س) + ١ = ٣ س + ٢

∴ ٢ ر(س) = ٣ س + ١

∴ $\text{ر}(\text{س}) = \frac{٣}{٢}\text{س} + \frac{١}{٢}$

(6) ∵ (ر ∘ د)(س) = س + ٢

∴ ر(د(س)) = س + ٢

∴ ر(٢ س − ٣) = س + ٢

وبوضع ٢ س − ٣ = ص

∴ $\text{س} = \frac{\text{ص} + ٣}{٢}$

∴ $\text{ر}(\text{ص}) = \frac{\text{ص} + ٣}{٢} + ٢ = \frac{\text{ص} + ٧}{٢}$

∴ $\text{ر}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٧}{٢}$

(7) ∵ (ر ∘ د)(٠) = (د ∘ ر)(١)

∴ ر[د(٠)] = د[ر(١)]

لاحظ أن: د(٠) = ٢ ، $\text{ر}(١) = \frac{١ - \text{ك}}{٢}$

∴ $\text{ر}(٢) = \text{د}\left(\frac{١ - \text{ك}}{٢}\right)$

∴ $\frac{٢ - \text{ك}}{٥} = \frac{١ - \text{ك}}{٢} + ٢$

∴ ٤ − ٢ك = ٥ − ٥ك + ٢٠

∴ ٣ك = ٢١ ∴ ك = ٧

⑧ ∵ (د ٥ د ٥ د) (١)

= د (د [د (١)])　　[من الرسم د (١) = ٥]

= د (د (٥))　　[من الرسم د (٥) = صفر]

= د (صفر)　　[من الرسم د (٠) = ٢]

= ٢

⑨ (د ٥ ت) (٢) − (د ٥ ت) (٨)

= د (ت (٢)) − د (ت (٨))

= د (٢) − د (٤)

= ٤ − ٨ = −٤

٢

① (د ٥ د) (س) = د (د (س)) = د $(\frac{1}{س})$

= ١ ÷ $\frac{1}{س}$ = س

② (د ٥ د ٥ د) (س) = د (د (د (س)))

= د (د $(\frac{1}{س})$)

= د (س) = $\frac{1}{س}$

③ نلاحظ مما سبق أن التركيب مرتين يعطى س والتركيب ثلاثة مرات يعطى $\frac{1}{س}$ وهكذا نلاحظ أن فى باقى التركيب يعطى س ثم $\frac{1}{س}$

∴ (د ٥ د ٥ د ٥ ..... إلى ن من المرات) (س)

= { س إذا كانت ن زوجية
　 $\frac{1}{س}$ إذا كانت ن فردية

إجابات تمارين 3

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (أ)	③ (أ)	④ (ب)
⑤ (أ)	⑥ (جـ)	⑦ (ب)	⑧ (ب)
⑨ (أ)	⑩ (جـ)	⑪ (أ)	⑫ (د)
⑬ (أ)	⑭ (د)	⑮ (ب)	⑯ (د)
⑰ (د)	⑱ (ب)	⑲ (جـ)	⑳ (جـ)
㉑ (أ)	㉒ (جـ)	㉓ (ب)	㉔ (جـ)
㉕ (جـ)	㉖ (ب)	㉗ (د)	㉘ (جـ)
㉙ (أ)	㉚ (جـ)	㉛ (أ)	㉜ (جـ)
㉝ (جـ)	㉞ (أ)	㉟ (أ)	㊱ (ب)
㊲ (د)	㊳ (د)	㊴ (ب)	㊵ (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

شكل (١) : متماثل حول محور السينات ومحور الصادات ونقطة الأصل

شكل (٢) : متماثل حول محور السينات

شكل (٣) : متماثل حول نقطة الأصل

شكل (٤) : متماثل حول نقطة الأصل

شكل (٥) : متماثل حول محور الصادات

شكل (٦) : متماثل حول نقطة الأصل

٢

① فردية　　② ليست زوجية وليست فردية

③ زوجية　　④ ليست زوجية وليست فردية

⑤ فردية　　⑥ فردية

٣

شكل (١) : د (س) = $س^3$ + س

∵ مجال د = ح والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل

∴ الدالة د فردية.

التحقيق الجبرى : لكل س ، −س ∈ ح

∵ د (−س) = $(−س)^3$ + (−س)

= $−س^3$ − س = −($س^3$ + س)

= −د (س)

∴ الدالة فردية

شكل (٢) : د (س) = $س^3$ − ٢

∵ مجال د = ح

، المنحنى ليس متماثلاً حول محور الصادات وليس متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل.

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

التحقيق الجبرى : لكل س ، −س ∈ ح

∵ د (−س) = $(−س)^3$ − ٢ = $−س^3$ − ٢

= −($س^3$ + ٢)

∴ د (−س) ≠ د (س) ≠ −د (س)

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

شكل (٣) : د (س) = ٢ − $س^2$

∵ مجال د = [−٢ ، ٢]

، المنحنى متماثل حول محور الصادات.

∴ الدالة د زوجية.

التحقيق الجبرى : لكل س ، −س ∈ [−٢ ، ٢]

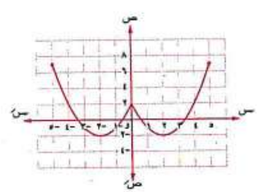
∵ د (−س) = ٢ − $(−س)^2$

= ٢ − $س^2$ = د (س)

∴ الدالة زوجية.

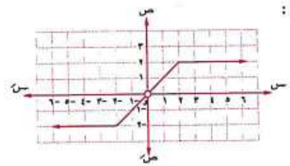
٤

أولاً :

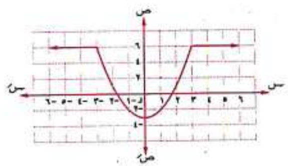


شكل (١)

ثانيًا :



شكل (٢)



شكل (٣)

ثالثًا :

شكل (١) : المجال = [−٥ ، ٥] ، المدى = [−٢ ، ٧] ، ليست أحادية

شكل (٢) : المجال = ح − {٠} ، المدى = [−٢ ، ٢] − {٠} ، ليست أحادية

شكل (٣) : المجال = ح ، المدى = [−٣ ، ٦] ، ليست أحادية

٥

① د (−س) = ٥ = د (س)　　∴ الدالة زوجية.

② د (−س) = $(−س)^4$ + $(−س)^2$ − ١

= $س^4$ + $س^2$ − ١ = د (س)

∴ الدالة زوجية.

③ د (−س) = ٣ (−س) − ٤ $(−س)^3$

= −٣ س + ٤ $س^3$

= −(٣ س − ٤ $س^3$) = −د (س)

∴ الدالة فردية.

④ $د(-س) = (-س)^{٢} - ٣(-س) + ٤$

$= س^{٢} + ٣س + ٤$

$\ne د(س) \ne -د(س)$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

⑤ $د(-س) = (-س)^{٣}\left((-س)^{٢} - ١\right)$

$= -س^{٣}(س^{٢} - ١) = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

⑥ $د(-س) = (-س - ٣)^{٢} - ٧$

$= (س + ٣)^{٢} - ٧$

$\ne د(س) \ne -د(س)$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

⑦ ∵ مجال الدالة = ح − {٣}

∴ −٣ ∈ مجال الدالة ، ٣ ∉ مجالها

∴ الدالة ليست فردية وليست زوجية.

⑧ $د(-س) = \frac{٢(-س)^{٣} - (-س)^{٥}}{-س}$

$= \frac{-٢س^{٣} + س^{٥}}{-س}$

$= \frac{-(٢س^{٣} - س^{٥})}{-س}$

$= \frac{٢س^{٣} - س^{٥}}{س} = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

⑨ ∵ مجال د = [−٣ ، ∞[

∴ لكل س ∈ [−٣ ، ∞[

ليس بالضرورة أن يوجد −س ∈ [−٣ ، ∞[

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

⑩ $د(-س) = \left((-س)^{٢} + ١\right)^{٣} = (س^{٢} + ١)^{٣}$

$= د(س)$

∴ الدالة زوجية.

⑪ $د(-س) = \sqrt[٣]{(-س)^{٢} + ٦} = \sqrt[٣]{س^{٢} + ٦} = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

⑫ $د(-س) = \sqrt[٣]{(-س)^{٣} + (-س)}$

$= \sqrt[٣]{-(س^{٣} + س)} = -\sqrt[٣]{س^{٣} + س}$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

⑬ $د(-س) = (-س)^{٣} - \frac{١}{-س}$

$= -س^{٣} + \frac{١}{س}$

$= -\left(س^{٣} - \frac{١}{س}\right) = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

⑭ $د(-س) = \left(-س - \frac{٢}{-س}\right)^{٣}$

$= \left(-\left(س - \frac{٢}{س}\right)\right)^{٣}$

$= -\left(س - \frac{٢}{س}\right)^{٣} = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

⑮ $د(-س) = \left(\frac{(-س)^{٢}}{٣} - \frac{٥}{(-س)^{٤}}\right)^{٥}$

$= \left(\frac{س^{٢}}{٣} - \frac{٥}{س^{٤}}\right)^{٥} = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

⑯ $د(-س) = \left(\frac{-س + ١}{-س - ١}\right)^{٢} - \left(\frac{-س - ١}{-س + ١}\right)^{٢}$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

⑰ $د(-س) = \left(\frac{-س - ١}{-س + ١}\right)^{٥} + \left(\frac{-س + ١}{-س - ١}\right)^{٥}$

$= \left[\frac{-(س + ١)}{-(س - ١)}\right]^{٥} + \left[\frac{-(س - ١)}{-(س + ١)}\right]^{٥}$

$= \left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{٥} + \left(\frac{س - ١}{س + ١}\right)^{٥}$

$= د(س)$

∴ الدالة زوجية.

⑱ $د(-س) = \left((-س)^{٣} + ١\right)^{٤} - \left((-س)^{٣} - ١\right)^{٤}$

$= \left(-(س^{٣} - ١)\right)^{٤} - \left(-(س^{٣} + ١)\right)^{٤}$

$= (س^{٣} - ١)^{٤} - (س^{٣} + ١)^{٤}$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

⑲ $د(-س) = -س\ جتا(-س) = -س\ جتاس$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

⑳ $د(-س) = \frac{-٣س}{ظا(-س)} = \frac{-٣س}{-ظاس} = \frac{٣س}{ظاس}$

$= د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉑ $د(-س) = \frac{(-س)^{٣} \times جا(-٣س)}{١ + (-س)^{٤}}$

$= \frac{س^{٣}\ جا٣س}{١ + س^{٤}} = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉒ $د(-س) = \frac{٣(-س)^{٢} - جتا(-س)}{(-س)^{٣} + ٦س}$

$= \frac{٣س^{٢} - جتاس}{-س^{٣} + ٦س} = \frac{٣س^{٢} - جتاس}{-(س^{٣} - ٦س)}$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

㉓ $د(-س) = (-س)^{٢}\left(جا(-س)\right)^{٢}$

$= س^{٢}(-جاس)^{٢} = -س^{٢}\ جا^{٢}س$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

㉔ $د(-س) = -س\ جا(-س)^{٣}$

$= -س\ جا(-س^{٣})$

$= س\ جاس^{٣} = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉕ $د(-س) = \frac{(-س)^{٢} + ظا(-س)}{(-س)^{٤} + جا(-س)}$

$= \frac{س^{٢} - ظاس}{س^{٤} - جاس} \ne د(س) \ne -د(س)$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

㉖ $د(-س) = جا(-س)^{٢} - \left(جا(-س)\right)^{٢}$

$= جاس^{٢} - (-جاس)^{٢}$

$= جاس^{٢} - جا^{٢}س = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉗ $د(-س) = (-س)^{٤} + جا^{٦}(-س)$

$= س^{٤} + (-جاس)^{٦}$

$= س^{٤} + جا^{٦}س = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉘ $د(-س) = (-س)^{٧} + ظا^{٥}(-س)$

$= -س^{٧} + (-ظاس)^{٥}$

$= -س^{٧} - ظا^{٥}س = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

㉙ $د(-س) = \frac{جا(-٣س)\ جتا(-٢س)}{قا(-س)}$

$= \frac{-جا٣س\ جتا٢س}{قاس} = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

㉚ ∵ $د(س) = ٢^{٢س} + جتاس + ٢^{-٢س}$

∴ $د(-س) = ٢^{-٢س} + جتا(-س) + ٢^{٢س}$

$= ٢^{-٢س} + جتاس + ٢^{٢س}$

$= د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉛ ∵ $د(س)$

$= \left((جتاس + جاس) - ١\right)\left((جتاس + جاس) + ١\right)$

$= (جتاس + جاس)^{٢} - ١$

$= جتا^{٢}س + جا^{٢}س + ٢\ جاس\ جتاس - ١$

$= ١ + ٢\ جاس\ جتاس - ١ = ٢\ جاس\ جتاس$

∴ $د(-س) = ٢\ جا(-س)\ جتا(-س)$

$= -٢\ جاس\ جتاس = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

(٣٢) د (−س) = $\begin{cases} \text{−٢س ، −س ≤ ٠} \\ \text{٢س ، −س > ٠} \end{cases}$

= $\begin{cases} \text{−٢س ، س ≥ ٠} \\ \text{٢س ، س < ٠} \end{cases}$

= $\begin{cases} \text{٢س ، س ≤ ٠} \\ \text{−٢س ، س > ٠} \end{cases}$

= د (س)

∴ الدالة زوجية.

(٣٣) د (−س)

= $\begin{cases} \text{−٢س + (−س)}^{٢} \text{ ، −س ≥ ٠} \\ \text{−٢س − (−س)}^{٢} \text{ ، −س < ٠} \end{cases}$

= $\begin{cases} \text{−(٢س − س}^{٢}\text{) ، س ≤ ٠} \\ \text{−(٢س + س}^{٢}\text{) ، س > ٠} \end{cases}$

= $\begin{cases} \text{−(٢س + س}^{٢}\text{) ، س ≥ ٠} \\ \text{−(٢س − س}^{٢}\text{) ، س < ٠} \end{cases}$

= − $\begin{cases} \text{٢س + س}^{٢} \text{ ، س ≥ ٠} \\ \text{٢س − س}^{٢} \text{ ، س < ٠} \end{cases}$

= − د (س)

∴ الدالة فردية.

٦

شكل (١) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

التحقيق الجبرى :

بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = ٢ − ٢أ ، د (ب) = ٢ − ٢ب

وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ ٢ − ٢أ = ٢ − ٢ب

∴ −٢أ = −٢ب ∴ أ = ب

∴ الدالة د أحادية

شكل (٢) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

التحقيق الجبرى :

بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = ٤ − أ^{٣} ، د (ب) = ٤ − ب^{٣}

وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ ٤ − أ^{٣} = ٤ − ب^{٣}

∴ −أ^{٣} = −ب^{٣} ∴ أ = ب

∴ الدالة د أحادية.

شكل (٣) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

التحقيق الجبرى :

بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = $\frac{\text{أ − ١}}{\text{أ − ٢}}$ ، د (ب) = $\frac{\text{ب − ١}}{\text{ب − ٢}}$

وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ $\frac{\text{أ − ١}}{\text{أ − ٢}} = \frac{\text{ب − ١}}{\text{ب − ٢}}$

∴ (أ − ١) (ب − ٢) = (أ − ٢) (ب − ١)

∴ أب − ٢أ − ب + ٢ = أب − أ − ٢ب + ٢

∴ −٢أ − ب = −أ − ٢ب

∴ ٢ب − ب = ٢أ − أ ∴ ب = أ

∴ الدالة د أحادية.

٧

(١) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ٢أ − ٣ ، د (ب) = ٢ب − ٣

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٢أ − ٣ = ٢ب − ٣ ∴ ٢أ = ٢ب

∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

(٢) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ٤ − أ^{٣} ، د (ب) = ٤ − ب^{٣}

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٤ − أ^{٣} = ٤ − ب^{٣} ∴ −أ^{٣} = −ب^{٣}

∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية

(٣) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = $\frac{٣}{\text{٢أ + ٥}}$ ، د (ب) = $\frac{٣}{\text{٢ب + ٥}}$

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{٣}{\text{٢أ + ٥}} = \frac{٣}{\text{٢ب + ٥}}$ ∴ ٢أ + ٥ = ٢ب + ٥

∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

(٤) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = $\frac{\text{٣أ − ٥}}{\text{٤أ + ٣}}$ ، د (ب) = $\frac{\text{٣ب − ٥}}{\text{٤ب + ٣}}$

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{\text{٣أ − ٥}}{\text{٤أ + ٣}} = \frac{\text{٣ب − ٥}}{\text{٤ب + ٣}}$

∴ (٣أ − ٥) (٤ب + ٣) = (٤أ + ٣) (٣ب − ٥)

∴ ١٢أب + ٩أ − ٢٠ب − ١٥

= ١٢أب − ٢٠أ + ٩ب − ١٥

∴ ٩أ − ٢٠ب = −٢٠أ + ٩ب

∴ ٢٩أ = ٢٩ب

∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

٨

(١) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د ، أ ≠ ب

، ∵ د (أ) = ٣ ، د (ب) = ٣

∴ د (أ) = د (ب) ∴ د دالة ليست أحادية.

(٢) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = (أ + ٣)^{٢} ، د (ب) = (ب + ٣)^{٢}

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ (أ + ٣)^{٢} = (ب + ٣)^{٢} ∴ أ + ٣ = ± (ب + ٣)

∴ أ + ٣ = ب + ٣ ∴ أ = ب

أ، أ + ٣ = −ب − ٣ ∴ أ = −ب − ٦

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، −ب − ٦

∴ د دالة ليست أحادية.

(٣) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = أ^{٢} − ٥أ + ٦

، د (ب) = ب^{٢} − ٥ب + ٦

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ أ^{٢} − ٥أ + ٦ = ب^{٢} − ٥ب + ٦

∴ أ^{٢} − ٥أ = ب^{٢} − ٥ب

∴ أ^{٢} − ب^{٢} − ٥أ + ٥ب = ٠

∴ (أ − ب) (أ + ب) − ٥ (أ − ب) = ٠

∴ (أ − ب) (أ + ب − ٥) = ٠

∴ أ − ب = ٠ ∴ أ = ب

أ، أ + ب − ٥ = ٠ ∴ أ = −ب + ٥

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، −ب + ٥

∴ د دالة ليست أحادية.

(٤) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = $\frac{١}{\text{أ}^{٢}\text{ − ٤}}$ ، د (ب) = $\frac{١}{\text{ب}^{٢}\text{ − ٤}}$

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{١}{\text{أ}^{٢}\text{ − ٤}} = \frac{١}{\text{ب}^{٢}\text{ − ٤}}$ ∴ أ^{٢} − ٤ = ب^{٢} − ٤

∴ أ^{٢} = ب^{٢} ∴ أ = ± ب

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، −ب

∴ د دالة ليست أحادية.

٩

(١) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ٢أ^{٢} − أ − ٣

، د (ب) = ٢ب^{٢} − ب − ٣

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٢أ^{٢} − أ − ٣ = ٢ب^{٢} − ب − ٣

∴ ٢أ^{٢} − ٢ب^{٢} − أ + ب = ٠

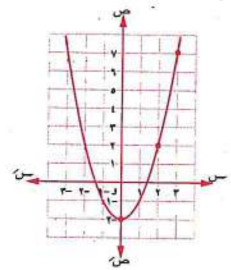
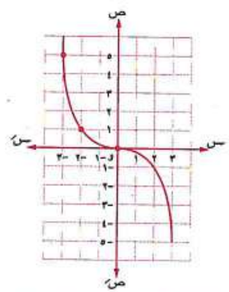
∴ ٢ (أ² − ب²) − (أ − ب) = ٠
∴ ٢ (أ − ب) (أ + ب) − (أ − ب) = ٠
∴ (أ − ب) (٢ (أ + ب) − ١) = ٠
∴ أ − ب = ٠   ∴ أ = ب
أ، ٢ (أ + ب) − ١ = ٠
∴ أ + ب = $\frac{١}{٢}$ ∴ أ = $\frac{١}{٢}$ − ب
∴ أ لها قيمتان هما : ب ، $\frac{١}{٢}$ − ب
∴ د دالة ليست أحادية.

② بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د
، ∵ د (أ) = أ⁴ + ٢ أ² + ١
، د (ب) = ب⁴ + ٢ ب² + ١
، وبفرض د (أ) = د (ب)
∴ أ⁴ + ٢ أ² + ١ = ب⁴ + ٢ ب² + ١
∴ (أ² + ١)² = (ب² + ١)²
∴ أ² + ١ = ب² + ١ ∴ أ² = ب² ∴ أ = ± ب
∴ أ لها قيمتان هما : ب ، − ب
∴ د دالة ليست أحادية.

١٠
من ① : ④ ليست زوجية وليست فردية.

١١
① ∵ الدالة فردية.   ∴ د (−٥) = − د (٥)
∴ المقدار = $\frac{-٧ د (٥) + ٣ د (٥)}{-٢ د (٥)} = \frac{-٤ د (٥)}{-٢ د (٥)} = ٢$
② ∵ الدالة زوجية.   ∴ د (−٥) = د (٥)
∴ المقدار = $\frac{٧ د (٥) + ٣ د (٥)}{٢ د (٥)} = \frac{١٠ د (٥)}{٢ د (٥)} = ٥$

١٢
∵ د₁ ، د₂ زوجيتان ، ر₁ ، ر₂ فرديتان
① د₁ + ر₂ ليست زوجية وليست فردية
② د₁ − د₂ زوجية   ③ ر₁ + ر₂ فردية
④ د₁ . ر₂ فردية   ⑤ ر₁ . ر₂ زوجية
⑥ $\frac{د_٢}{د_١}$ زوجية

١٣
①

②


ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (جـ)	② (جـ)	③ (ب)	④ (أ)
⑤ (ب)	⑥ (أ)	⑦ (أ)	

إرشادات الحل :
① ∵ د دالة ينتمى إليها النقطة (٢ ، ٣)
∴ النقطة (٢ ، −١) ∉ بيان الدالة
، ∵ د أحادية ينتمى إليها النقطة (٢ ، ٣)
∴ النقطة (٥ ، ٣) ∉ بيان الدالة
∴ النقطة التى يمكن أن تنتمى للدالة هى (٣ ، ٢)
② ∵ الدالة احادية تمر بالنقطتين (٢ ، أ) ، (٣ ، ب)
∴ لابد وأن يكون أ ≠ ب دائمًا

③ ∵ د فردية ، د (١) = ك ∴ د (−١) = − ك
، ∵ د (س + ٢) = د (س) + د (٢)
بوضع س = −١
∴ د (١) = د (−١) + د (٢)
∴ ك = − ك + د (٢)   ∴ د (٢) = ٢ ك
، بوضع س = ١
∴ د (٣) = د (١) + د (٢) = ك + ٢ ك = ٣ ك

④ ∵ (د + ر) (−س)
= $\frac{١ + (-س)}{١ - (-س)} + \frac{١ - (-س)}{١ + (-س)}$
= $\frac{١ - س}{١ + س} + \frac{١ + س}{١ - س}$ = (د + ر) (س)
∴ (د + ر) دالة زوجية
، ∵ (د . ر) (س) = $\frac{١ + س}{١ - س} \times \frac{١ - س}{١ + س} = ١$
∴ (د . ر) دالة زوجية أيضًا.

⑤ ∵ ر (−س) = د (−س) + د (س) = ر (س)
∴ ر دالة زوجية دائمًا

⑥ ∵ ٣ د (س) + ٢ د (−س) = س² − جاس (١)
وبوضع −س بدلًا من س
∴ ٣ د (−س) + ٢ د (س) = (−س)² − جا (−س)
∴ ٣ د (−س) + ٢ د (س) = −س² + جاس (٢)
بجمع (١) ، (٢) :
∴ ٥ د (س) + ٥ د (−س) = صفر
∴ د (س) = − د (−س)
∴ الدالة فردية.

⑦ د (س) = س³ ، ر (س) = س² + ١
(١) (د × ر) (س) = س³ (س² + ١)
∴ (د × ر) (−س) = (−س)³ ((−س)² + ١)
= − س³ (س² + ١)
∴ (د × ر) (−س) = − (د × ر) (س)
أى أن : (د × ر) فردية.

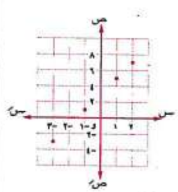
(٢) (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))
= د (س² + ١)
= (س² + ١)³
∴ (د ∘ ر) (−س) = ((−س)² + ١)³
= (س² + ١)³
= (د ∘ ر) (س)
∴ (د ∘ ر) زوجية.
(٣) (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))
= ر (س³) = س⁶ + ١
∴ (ر ∘ د) (−س) = ((−س)⁶ + ١)
= س⁶ + ١ = (ر ∘ د) (س)
∴ (ر ∘ د) زوجية.
∴ الإجابة (أ) هى الصحيحة.

إجابات تمارين 4

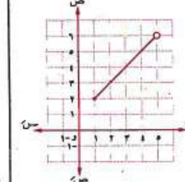
أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (جـ)	③ (د)	④ (ب)
⑤ (د)	⑥ (د)	⑦ (ب)	⑧ (جـ)
⑨ (جـ)	⑩ (جـ)	⑪ (د)	⑫ (ب)
⑬ (ب)	⑭ (ب)	⑮ (جـ)	⑯ (ب)
⑰ (ب)			

ثانيا الأسئلة المقالية

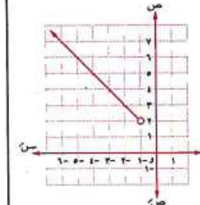
١
①

المدى = {−٣ ، ١ ، ٥ ، ٧}

②



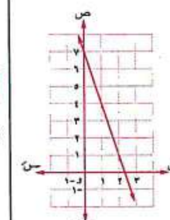
المدى =]٢ ، ٦]

③



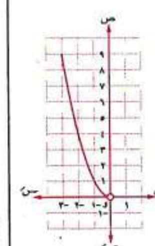
المدى =]٢ ، ∞[

④



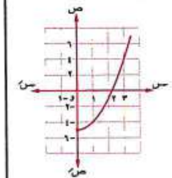
المدى = ح

⑤



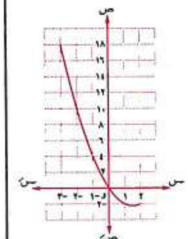
المدى = [٠ ، ∞[

⑥



المدى = [-٥ ، ∞[

⑦

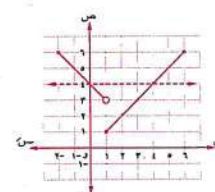


* لاحظ أن رأس المنحنى $\left(١٫٥ ، -٢\frac{١}{٤}\right)$

* المدى = $\left[-٢\frac{١}{٤} ، ١٨\right]$

٢

①



* المدى = [١ ، ٦]

* الدالة تناقصية فى]-٢ ، ١[

، وتزايدية فى]١ ، ٦]

② الدالة ليست أحادية لأنه يوجد خط أفقى يقطع الدالة فى أكثر من نقطة.

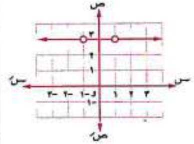
٣

①

$د(س) = \frac{٣(س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)}$

∴ د(س) = ٣

، س ≠ ± ١



* المجال = ح - {١ ، -١} * المدى = {٣}

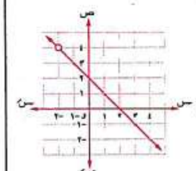
* الدالة ثابتة على مجالها. * الدالة زوجية.

* الدالة متماثلة حول محور الصادات.

②

$د(س) = \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{س + ٢} = ٢ - س$

، س ≠ -٢



* المجال = ح - {-٢}

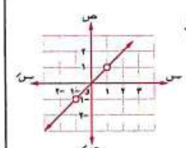
* المدى = ح - {٤}

* الدالة تناقصية على مجالها

* الدالة ليست فردية وليست زوجية.

③

$د(س) = \frac{س(س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)} = س$ ، س ≠ ± ١



* المجال = ح - {-١ ، ١}

* المدى = ح - {-١ ، ١}

* الدالة تزايدية على ح - {-١ ، ١}

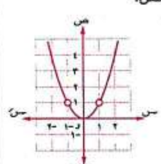
* الدالة فردية.

* الدالة متماثلة حول نقطة الأصل.

④

$د(س) = \frac{س^٢(س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)} = س^٢$

حيث س ≠ ± ١



* المجال = ح - {١ ، -١}

* المدى = [٠ ، ∞[- {١}

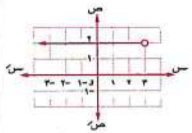
* الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٠] - {-١}

، وتزايدية فى [٠ ، ∞[- {١} * الدالة زوجية.

* الدالة متماثلة حول محور الصادات.

٤

①



* المجال =]-∞ ، ٣[

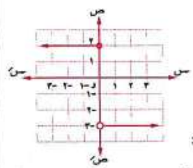
* المدى = {٢}

* الدالة ثابتة فى الفترة]-∞ ، ٣[

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

②



* المجال = ح

* المدى = {-٣ ، ٢}

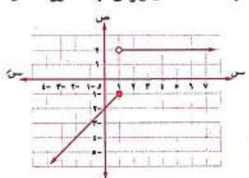
* الدالة ثابتة فى كل من :

]-∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

③



* المجال = ح

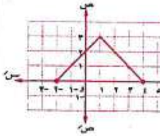
* المدى

=]-∞ ، -١] ∪ {٢}

* الدالة ثابتة فى]١ ، ∞[، وتزايدية فى]-∞ ، ١[

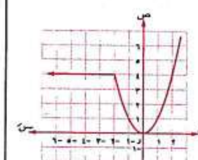
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

(٤)



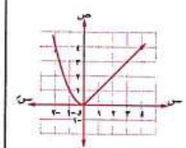
* المجال = [−٢ ، ٤]
* المدى = [٠ ، ٣]
* الدالة تزايدية
في]−٢ ، ١[
، وتناقصية في]١ ، ٤[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* محور التماثل هو المستقيم س = ١

(٥)



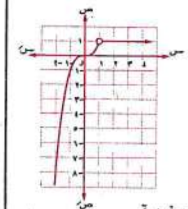
* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة ثابتة
في]−∞ ، −٢[
، وتناقصية في]−٢ ، ٠[، وتزايدية في]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

(٦)



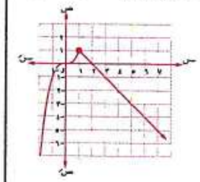
* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية
في]−∞ ، ٠[
، وتزايدية في]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

(٧)



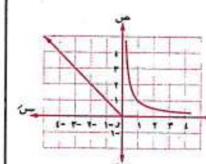
* المجال = ح − {١}
* المدى =]−∞ ، ١]
* الدالة تزايدية
في]−∞ ، ١[
، وثابتة في]١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

(٨)



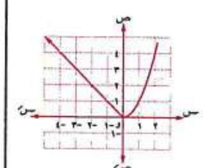
* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ١]
* الدالة تزايدية
في]−∞ ، ١[
، وتناقصية
في]١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

(٩)



* المجال = ح
* المدى = [صفر ، ∞[
* الدالة تناقصية
في]−∞ ، ٠[
،]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

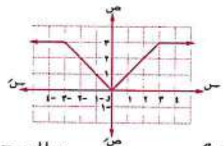
(١٠)



* المجال = ح
* المدى = [صفر ، ∞[
* الدالة تناقصية
في]−∞ ، ٠[
، وتزايدية في]٠ ، ∞[

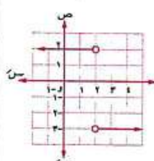
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

(١١)



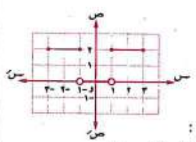
* المجال = ح * المدى = [٠ ، ٣]
* الدالة ثابتة في كل من]−∞ ، −٣[،]٣ ، ∞[
، وتناقصية في]−٣ ، ٠[، وتزايدية في]٠ ، ٣[
* الدالة زوجية. * محور التماثل هو المستقيم : س = ٠

(١٢)



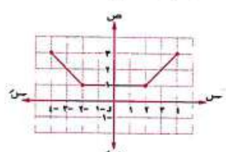
د (س) = { −٣ ، س > ٢ ؛ ٢ ، س < ٢ }
* المجال = ح − {٢}
* المدى = {٢ ، −٣}
* الدالة ثابتة في كل من :]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

(١٣)



* المجال = [−٣ ، ٣]
* المدى = {٠ ، ٢}
* الدالة ثابتة في كل من :
]−٣ ، −١[،]−١ ، ١[،]١ ، ٣[
* الدالة زوجية
* محور التماثل هو المستقيم س = ٠

(١٤)

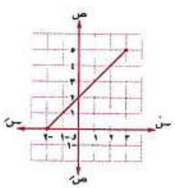


* المجال = [−٤ ، ٤] * المدى = [١ ، ٣]
* الدالة تناقصية في]−٤ ، −٢[
، وثابتة في]−٢ ، ٢[
وتزايدية في]٢ ، ٤[* الدالة زوجية.
* محور التماثل هو المستقيم س = ٠

٥

$د_١$ (س) = ٢ س − ١ ، مجالها = ح
، $د_٢$ (س) = ٣ − ٢ س ، مجالها = [−٢ ، ٣]
، ($د_١$ + $د_٢$) (س) = −س + ٢ ، ومجالها = [−٢ ، ٣]

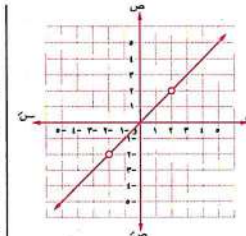
س	−٢	−١	٠	١	٢	٣
($د_١$ + $د_٢$) (س)	٠	١	٢	٣	٤	٥



* المجال = [−٢ ، ٣]
* الدالة تزايدية في]−٢ ، ٣[

٦

∵ د (س) = $س^٣$ − ٤ س ومجالها = ح
، ر (س) = $س^٢$ − ٤ ومجالها = ح
∴ $\frac{د}{ر}$ (س) = $\frac{س^٣ - ٤ س}{س^٢ - ٤}$ = $\frac{س (س^٢ - ٤)}{س^٢ - ٤}$ = س
حيث س ≠ ± ٢
ومجال $\frac{د}{ر}$ = ح − {٢ ، −٢}



* المدى = ح − {٢ ، −٢}   * الدالة فردية.
* الدالة تزايدية على ح − {٢ ، −٢}   * الدالة أحادية.

إجابات تمارين 5

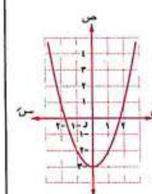
أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (ب)	③ (جـ)	④ (ب)
⑤ (د)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (أ)
⑨ (ب)	⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	⑫ (ب)
⑬ (جـ)	⑭ (جـ)	⑮ (ب)	⑯ (أ)
⑰ (ب)	⑱ (ب)	⑲ (ب)	⑳ (ب)
㉑ (د)	㉒ (ب)	㉓ (جـ)	㉔ (ب)
㉕ (جـ)	㉖ (أ)	㉗ (جـ)	㉘ (جـ)
㉙ (د)	㉚ (ب)	㉛ (جـ)	㉜ (ب)
㉝ (جـ)	㉞ (د)	㉟ (جـ)	㊱ (د)
㊲ (أ)	㊳ (جـ)	㊴ (ب)	㊵ (ب)
㊶ (جـ)	㊷ (أ)	㊸ (د)	㊹ (ب)
㊺ (د)	㊻ (جـ)		

ثانيا الأسئلة المقالية

١

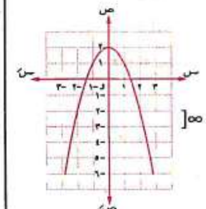
①



* المجال = ح
* المدى = [−٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[

، الدالة تزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة زوجية.
* معادلة محور التماثل هى : س = صفر

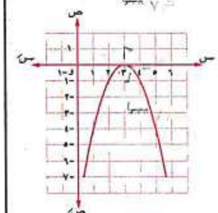
②



* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٢]
* الدالة تناقصية فى]٠ ، ∞[

، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠[
* الدالة زوجية.
* معادلة محور التماثل هى : س = صفر

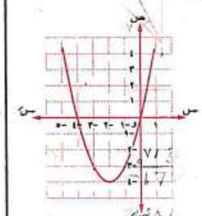
③



* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٠]
* الدالة تناقصية فى]٣ ، ∞[

، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٣[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٣

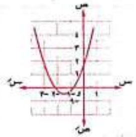
④



* المجال = ح
* المدى = [−٤ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، −٢[

، الدالة تزايدية فى]−٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −٢

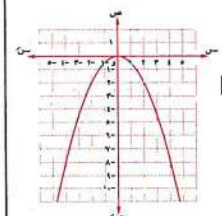
⑤



* المجال = ح
* المدى = [$-\frac{1}{2}$ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، $\frac{-3}{2}$[

، الدالة تزايدية فى]$\frac{-3}{2}$ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = $-\frac{3}{2}$

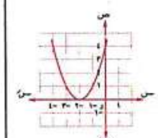
⑥



* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٠]
* الدالة تناقصية فى]٠ ، ∞[

، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠[
* الدالة زوجية.
* معادلة محور التماثل هى : س = صفر

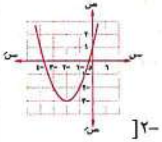
⑦



ر (س) = $(س + ٢)^2$
* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، −٢[

، الدالة تزايدية فى]−٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −٢

⑧

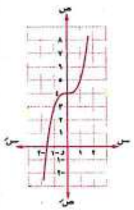


ر (س) = $(س + ٢)^2$ − ٣
* المجال = ح
* المدى = [−٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، −٢[

، الدالة تزايدية فى]−٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −٢

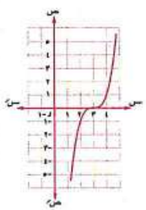
٢

①



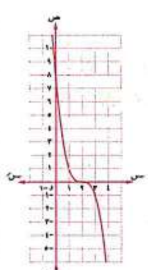
* المجال = ح   * المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٠ ، ٤)

②



* المجال = ح
* المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٣ ، ٠)

③



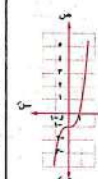
ر (س) = − $(س − ٢)^3$
* المجال = ح
* المدى = ح
* الدالة تناقصية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ٠)

④


* المجال = ح * المدى = ح
* الدالة تناقصية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (١ ، ٢)

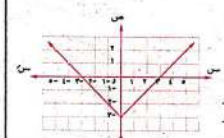
⑤ د(س) = −(س − ٣)^{٣} + ١


* المجال = ح * المدى = ح
* الدالة تناقصية على ح
* الدالة ليست زوجية
  وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٣ ، ١)

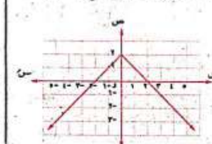
⑥


* المجال = ح * المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٠ ، −١)

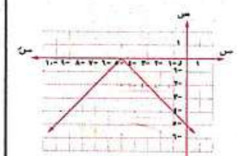
٣

①


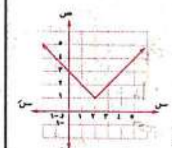
* المجال = ح
* المدى = [−٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠]
  ، الدالة تزايدية فى [٠ ، ∞[
* الدالة زوجية * معادلة محور التماثل هى : س = ٠

②


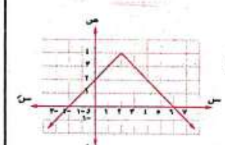
* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٢]
* الدالة تناقصية
  فى [٠ ، ∞[
  ، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠]
* الدالة زوجية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٠

③


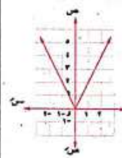
* المجال = ح
* المدى
  =]−∞ ، ٠]
* الدالة تناقصية
  فى [−٥ ، ∞[
  ، الدالة تزايدية فى]−∞ ، −٥]
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −٥

④ د(س) = |س − ٢| + ١


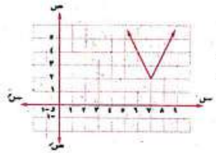
* المجال = ح
* المدى = [١ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢]
  ، الدالة تزايدية فى [٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٢

⑤


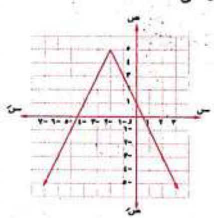
* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٤]
* الدالة تناقصية
  فى [٢ ، ∞[
  ، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢]
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٢

⑥


* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠]
  ، الدالة تزايدية فى [٠ ، ∞[
* الدالة زوجية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٠

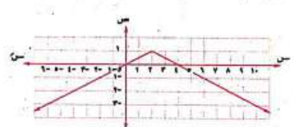
⑦


* المجال = ح
* المدى = [٢ ، ∞[
* الدالة تناقصية
  فى]−∞ ، ٧]
  ، الدالة تزايدية فى [٧ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٧

⑧


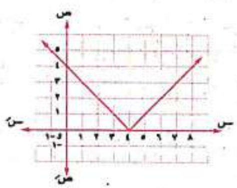
* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٥]
* الدالة تناقصية
  فى [−٢ ، ∞[
  ، الدالة تزايدية
  فى]−∞ ، −٢]
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −٢

⑨ د(س) = ١ − $\frac{١}{٢}$|س − ٢|



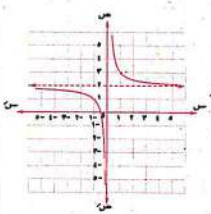
* المجال = ح * المدى =]−∞ ، ١]
* الدالة تناقصية فى [٢ ، ∞[
  ، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢]
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٢

⑩ ∵ د(س) = $\sqrt{س^{٢} - ٨س + ١٦}$
= $\sqrt{(س - ٤)^{٢}}$ = |س − ٤|



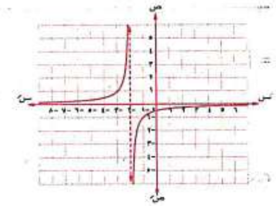
* المجال = ح * المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٤]
  ، الدالة تزايدية فى [٤ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٤

٤

①


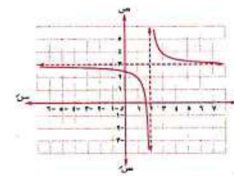
* المجال = ح − {٠}
* المدى = ح − {٢}
* الدالة تناقصية
  فى]٠ ، ∞[
  ،]−∞ ، ٠[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٠ ، ٢)

②



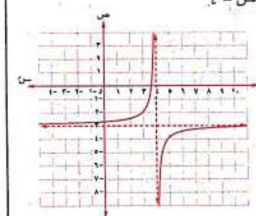
* المجال = ح − {−٢}   * المدى = ح − {٠}
* الدالة تزايدية فى]−∞ ، −٢[،]−٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (−٢ ، ٠)

③



* المجال = ح − {٢}   * المدى = ح − {٣}
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ٣)

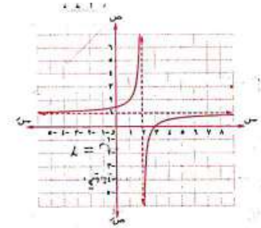
④ ر(س) = $\frac{-١}{س - ٤}$ − ٣



* المجال = ح − {٤}   * المدى = ح − {−٣}

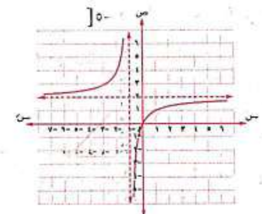
* الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٤[،]٤ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٤ ، −٣)

⑤ ر(س) = ١ − $\frac{١}{س - ٢}$



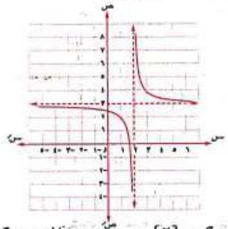
* المجال = ح − {٢}   * المدى = ح − {١}
* الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ١)

⑥ ر(س) = ٢ − $\frac{٢}{س + ١}$



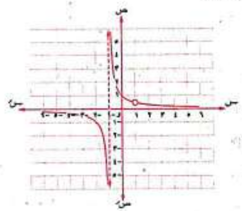
* المجال = ح − {−١}   * المدى = ح − {٢}
* الدالة تزايدية فى]−∞ ، −١[،]−١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (−١ ، ٢)

⑦ ر(س) = ٣ + $\frac{١}{س - ٢}$



* المجال = ح − {٢}   * المدى = ح − {٣}
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ٣)

⑧ ر(س) = $\frac{س - ١}{(س - ١)(س + ١)}$ = $\frac{١}{س + ١}$
، س ≠ ١



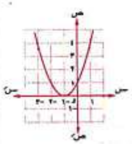
* المجال = ح − {−١ ، ١}   * المدى = ح − {٠ ، $\frac{١}{٢}$}
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، −١[،]−١ ، ١[،]١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* لا توجد نقطة تماثل.

٥

① د(س) = س − ٢
② د(س) = (س + ٢)^٢ − ٣
③ د(س) = −(س − ١)^٢ + ٢
④ د(س) = (س − ٢)^٣
⑤ د(س) = (س + ١)^٢ − ٣
⑥ د(س) = |س − ٢| − ٣
⑦ د(س) = −|س − ١| + ٣
⑧ د(س) = $\frac{١}{س}$ + ٢
⑨ د(س) = $\frac{-١}{س + ٢}$ − ٢

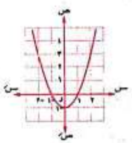
٦

①
د$_١$(س) = د(س + ١)
= (س + ١)^٢



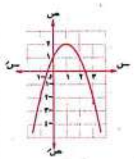
* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[

②
د$_٢$(س) = د(س) − ١
= س^٢ − ١



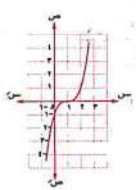
* المجال = ح
* المدى = [−١ ، ∞[

③
د$_٣$(س) = ٢ − د(س − ١)
= ٢ − (س − ١)^٢



* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٢]

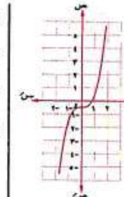
④
ر$_١$(س) = ر(س − ١)
= (س − ١)^٣



* المجال = ح
* المدى = ح

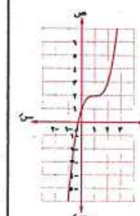
⑤ ر٢(س) = ر(س) − $\frac{١}{٢}$ = س^{٣} − $\frac{١}{٢}$

* المجال = ح
* المدى = ح



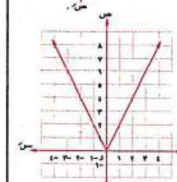
⑥ ر٢(س) = ر(س − ١) + ٢ = (س − ١)^{٣} + ٢

* المجال = ح
* المدى = ح



⑦ ع١(س) = ٢ ع(س) = ٢ |س|

* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[



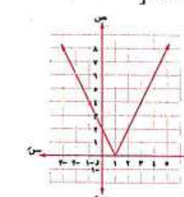
⑧



ع٢(س) = $\frac{١}{٢}$ ع(س) − ٣ = $\frac{١}{٢}$ |س| − ٣

* المجال = ح
* المدى = [−٣ ، ∞[

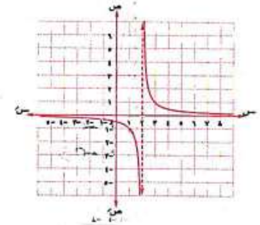
⑨



ع٣(س) = ٢ ع(س − ١) = ٢|س − ١|

* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[

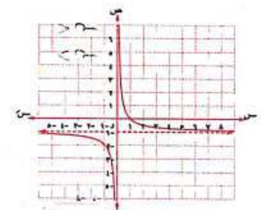
⑩



ه٢(س) = ه(س − ٢) = $\frac{١}{س − ٢}$

* المجال = ح − {٢}
* المدى = ح − {٠}

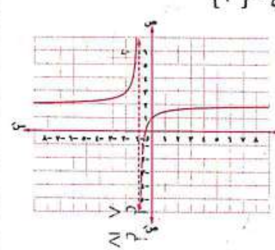
⑪



ه٣(س) = ه(س) − ١ = $\frac{١}{س}$ − ١

* المجال = ح − {٠}
* المدى = ح − {−١}

⑫

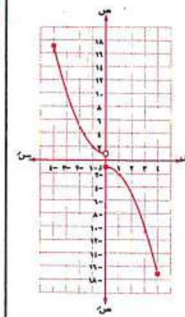


ه٤(س) = ٢ − ه(س + ١) = ٢ − $\frac{١}{س + ١}$

* المجال = ح − {−١}
* المدى = ح − {٢}

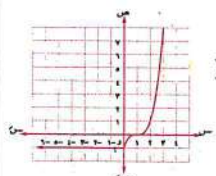
٧

①



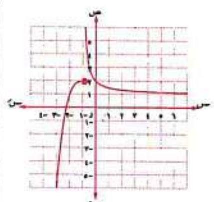
* المدى = [−١٧ ، ١٧] −]−١ ، ١[
* الدالة تناقصية في]−٤ ، ٠[،]٠ ، ٤[

②



* المدى = [−١ ، ∞[
* الدالة ثابتة في]−∞ ، ٠] ، وتزايدية في]٠ ، ∞[

③



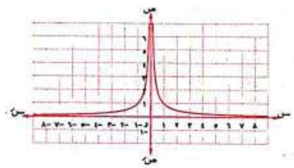
* المدى = ح
* الدالة تناقصية في]−١ ، ∞[، وتزايدية في]−∞ ، −١[

٨

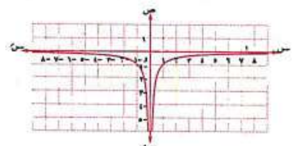
شكل (١) : د(س) = |(س − ٣)^{٢} − ١|
شكل (٢) : ق(س) = |س^{٢}|
شكل (٣) : ر(س) = $\frac{١}{|س − ٢|}$

٩

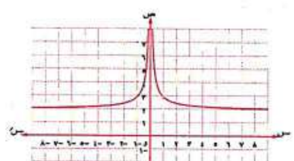
①



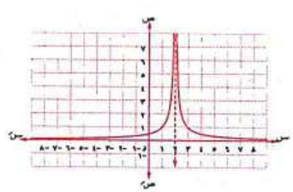
②



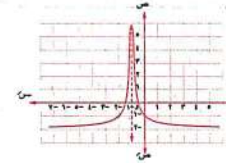
③



④

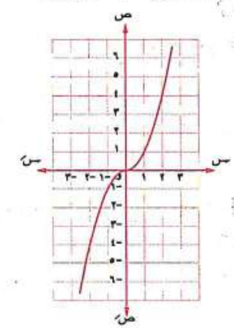


⑤

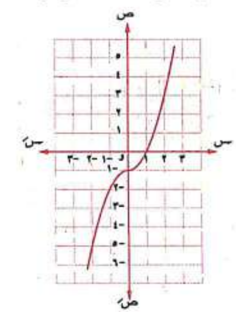


١٠

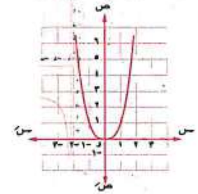
① د(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س \geq ٠ \\ -س^{٢} & ، س < ٠ \end{cases}$



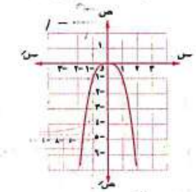
② د(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ١ & ، س \geq ٠ \\ -س^{٢} - ١ & ، س < ٠ \end{cases}$



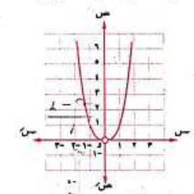
③ د(س) = $\begin{cases} س^{٣} & ، س \geq ٠ \\ -س^{٣} & ، س < ٠ \end{cases}$



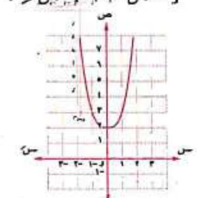
④ د(س) = $\begin{cases} -س^{٣} & ، س \geq ٠ \\ س^{٣} & ، س < ٠ \end{cases}$



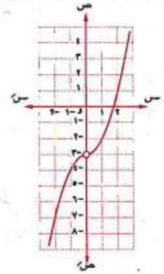
⑤ د(س) = $\begin{cases} س^{٣} & ، س > ٠ \\ -س^{٣} & ، س < ٠ \end{cases}$



⑥ د(س) = $\begin{cases} س^{٣} + ٢ & ، س \geq ٠ \\ -س^{٣} + ٢ & ، س < ٠ \end{cases}$

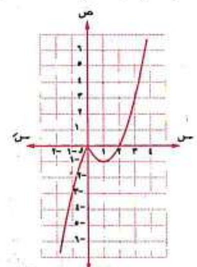


⑦ د(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٣ & ، س > ٠ \\ -س^{٢} - ٣ & ، س < ٠ \end{cases}$



⑧ د(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢س & ، س \geq ٠ \\ -س^{٢} + ٢س & ، س < ٠ \end{cases}$

= $\begin{cases} (س - ١)^{٢} - ١ & ، س \geq ٠ \\ -(س - ١)^{٢} + ١ & ، س < ٠ \end{cases}$



١١

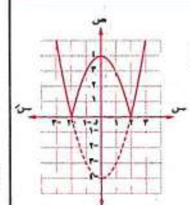
① د(س) = $|س^{٢} - ٤|$

* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية

في]−∞ ، −٢]

،]٠ ، ٢]

وتزايدية في]−٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[



② د(س) = $|س^{٢} - ٢س - ٣|$ ، س ∈ [−١ ، ٤]

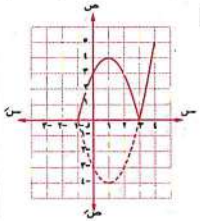
* المدى = [٠ ، ٥]
* الدالة تزايدية

في]−١ ، ١[

،]٣ ، ٤[

وتناقصية

في]١ ، ٣[



ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (جـ)	② (ب)	③ (أ)
④ (جـ)	⑤ (ب)	⑥ (ب)
⑦ (ب)	⑧ (ب)	⑨ (جـ)

إرشادات لحل رقم ١

① ∵ المنحنى ر (س) هو نفسه منحنى د (س) بالانتقال ٣ وحدات يمينًا.

∴ كل نقطة من نقاط تقاطع المنحنى د (س) مع محور السينات تنتقل ٣ وحدات يمينًا أيضًا.

∴ س ∈ {−٣ + ٣ ، ١ + ٣ ، ٠ + ٣}

أي س ∈ {٠ ، ٤ ، ٣}

② ∵ مدى الدالة التربيعية = [١ ، ∞[

∴ ب − ٢ = ١ ∴ ب = ٣

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ٢)

∴ د (٣) = ٢

∴ $(٣ - أ + ١)^{٢} + ١ = ٢$

∴ $(٤ - أ)^{٢} = ١$ ∴ ٤ − أ = ±١

∴ أ = ٤ ± ١ ∴ أ = ٣ أو ٥

③ ∵ منحنى د (س) هو نفسه منحنى ر (س) بالانتقال وحدة واحدة يسارًا.

∴ الدالة تكون متزايدة في]−١ ، ∞[

④ المنحنى ص = ٣ (س − ٥)^{٢} + ٧ تحت تأثير انتقال ٣ وحدات يمينًا ووحدة لأسفل.

∴ ص = ٣ (س − ٥ − ٣)^{٢} + ٧ − ١

∴ ص = ٣ (س − ٨)^{٢} + ٦

⑤ ∵ (د ∘ د) (س) = د (د (س))

∴ = د (|س| + ٢)

= ||س| + ٢| + ٢

= |س| + ٤

∴ مدى الدالة (د ∘ د) هو [٤ ، ∞[

⑥ ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = |½ س^{٢} − ٨|

∴ مدى الدالة (د ∘ ر) = [٠ ، ∞[

⑦ ∵ |د (س)| هو نفس منحنى د (س) بعد انعكاس الجزء المرسوم اسفل محور السينات لأعلى

أي أن : الدالة |د (س)| تكون زوجية.

⑧ ∵ الدالة متماثلة حول نقطة الأصل.

∴ ر (س) = س^{٣} − ٢

∴ ر تزايدية.

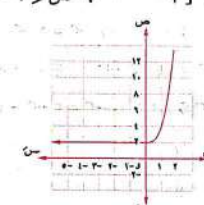
⑨ ∵ الدالة متماثلة حول محور الصادات

∴ ر (س) = − س^{٣} + ٢

٢

① د (س) = { س^{٣} + س^{٣} + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ س^{٣} − س^{٣} + ٢ ، س < ٠ }

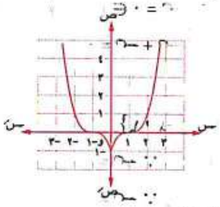
∴ = { ٢ س^{٣} + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ ٢ ، س < ٠ }



* المجال = ح * المدى = [٢ ، ∞[
* الدالة ثابتة في]− ∞ ، ٠[
، تزايدية في]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

② د (س) = { (س − ١)^{٣} ، س ≥ ٠ ؛ (−س − ١)^{٣} ، س < ٠ }

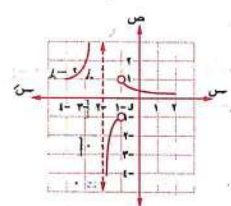
= { (س − ١)^{٣} ، س ≥ ٠ ؛ −(س + ١)^{٣} ، س < ٠ }



* المجال = ح
* المدى = [−١ ، ∞[
* الدالة تناقصية في]− ∞ ، ٠[
وتزايدية في]٠ ، ∞[
* الدالة زوجية.

③ د (س) = { (س + ١) / ((س + ٢)(س + ١)) ، س > −١ ؛ −(س + ١) / ((س + ٢)(س + ١)) ، س < −١ ، س ≠ −٢ }

= { ١ / (س + ٢) ، س > −١ ؛ − ١ / (س + ٢) ، س < −١ ، س ≠ −٢ }



* المجال = ح − {−١ ، −٢}
* المدى = ح − [−١ ، ٠]

* الدالة تزايدية في كل من :]− ∞ ، −٢[،]−٢ ، −١[
، وتناقصية في]−١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

④ د (س) = |س + ١| − |س − ١|

= { ٢ ، س > ١ ؛ ٢ س ، −١ ≤ س ≤ ١ ؛ −٢ ، س < −١ }

−س − ١	س + ١	س + ١
−س + ١	−س + ١	س − ١
−٢	٢ س	٢

(−١) (١)



* المجال = ح * المدى = [−٢ ، ٢]
* الدالة ثابتة في كل من]− ∞ ، −١[،]١ ، ∞[
وتزايدية في]−١ ، ١[
* الدالة فردية.

إجابات تمارين 6

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (جـ)	③ (جـ)	④ (أ)
⑤ (جـ)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)
⑨ (ب)	⑩ (د)	⑪ (أ)	⑫ (ب)
⑬ (ب)	⑭ (جـ)	⑮ (ب)	⑯ (جـ)
⑰ (جـ)	⑱ (د)	⑲ (أ)	⑳ (ب)
㉑ (ب)	㉒ (جـ)	㉓ (جـ)	㉔ (د)
㉕ (د)	㉖ (د)	㉗ (ب)	㉘ (جـ)
㉙ (جـ)	㉚ (ب)	㉛ (د)	㉜ (د)
㉝ (د)	㉞ (ب)	㉟ (جـ)	㊱ (ب)
㊲ (جـ)	㊳ (ب)	㊴ (ب)	㊵ (أ)
㊶ (ب)	㊷ (جـ)	㊸ (جـ)	㊹ (د)
㊺ (جـ)	㊻ (د)		

ثانيا الأسئلة المقالية

تمارين على حل معادلات القيمة المطلقة

١

① ٤ |س| = ٢٠ ∴ |س| = ٥

∴ س = ± ٥ ∴ مجموعة الحل = {٥ ، −٥}

② |٢ س − ٣| = ٧ ∴ ٢ س − ٣ = ± ٧

∴ ٢ س − ٣ = ٧ ومنها ٢ س = ١٠

∴ س = ٥

أ، ٢ س − ٣ = −٧ ومنها ٢ س = −٤

∴ س = −٢

∴ مجموعة الحل = {٥ ، −٢}

③ |س + ٢| = ١ ∴ س + ٢ = ± ١

∴ س = −١ أ، س = −٣

∴ مجموعة الحل = {−١ ، −٣}

④ ٢ |س| = ٢ ∴ |س| = ١

∴ س = ± ١

∴ مجموعة الحل = {١ ، −١}

⑤ عندما س ≥ ٢ : ∴ س − ٢ = ٢ س − ٤

∴ ٢ س = ٢ ∴ س = ١ ∉ [٢ ، ∞[

عندما س < ٢ : ∴ − س + ٢ = ٣ س − ٤

∴ ٤ س = ٦ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$ ∈]− ∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل = {$\frac{٣}{٢}$}

⑥ عندما س ≥ −٢ : ∴ س + ٢ = س − ١ (مرفوض)

عندما س < −٢ : ∴ − س − ٢ = س − ١

∴ ٢ س = −١ ∴ س = − $\frac{١}{٢}$ ∉]− ∞ ، −٢[

∴ مجموعة الحل = ∅

(٧) عندما س ≤ -٢ : ∴ س + ٢ = -س + ٢
∴ ٢ س = ٠   ∴ س = ٠ ∈ [-٢ ، ∞[
عندما س < -٢ :
∴ -س - ٢ = -س + ٢ (مرفوض)
∴ مجموعة الحل = {٠}

(٨) ∵ ٢ |س| = ٥ س - ٢١
عندما س ≤ ٠ : ∴ ٢ س = ٥ س - ٢١
∴ ٣ س = ٢١   ∴ س = ٧ ∈ [٠ ، ∞[
عندما س < ٠ : ∴ -٢ س = ٥ س - ٢١
∴ ٧ س = ٢١   ∴ س = ٣ ∉]-∞ ، ٠[
∴ مجموعة الحل = {٧}

(٩) |س + ٥| = |س - ٣|
∴ س + ٥ = ± (س - ٣)
∴ س + ٥ = س - ٣ (مرفوض)
أ، س + ٥ = -س + ٣   ∴ ٢ س = -٢
∴ س = -١ (تحقق)   ∴ مجموعة الحل = {-١}

(١٠) ∵ ٢ |(س - ٣)| = |س - ٣|
∴ ٢ |س - ٣| = |س - ٣|
∴ |س - ٣| = ٠   ∴ س - ٣ = ٠
∴ س = ٣   ∴ مجموعة الحل = {٣}

(١١) |س - ١| = ٢ |س - ٢|
∴ س - ١ = ± ٢ (س - ٢)
∴ س - ١ = ٢ س - ٤   ∴ س = ٣ (تحقق)
أ، س - ١ = -٢ س + ٤   ∴ ٣ س = ٥
∴ س = $\frac{٥}{٣}$ (تحقق)
∴ مجموعة الحل = {٣ ، $\frac{٥}{٣}$}

(١٢) عندما س ≤ ٠ : ∴ س^{٢} - ٥ س + ٦ = ٠
∴ (س - ٢) (س - ٣) = ٠
∴ س = ٢ ∈ [٠ ، ∞[أ، س = ٣ ∈ [٠ ، ∞[
عندما س < ٠ : ∴ س^{٢} + ٥ س + ٦ = ٠
∴ (س + ٢) (س + ٣) = ٠
∴ س = -٢ ∈]-∞ ، ٠[
أ، س = -٣ ∈]-∞ ، ٠[
∴ مجموعة الحل = {٢ ، ٣ ، -٢ ، -٣}

(١٣) ∵ √س^{٢} - ٢ س = ٦
∴ |س| - ٢ س = ٦
عندما س ≤ ٠ : ∴ س - ٢ س = ٦
∴ س = -٦ ∉ [٠ ، ∞[
عندما س < ٠ : ∴ -س - ٢ س = ٦
∴ ٣ س = -٦   ∴ س = -٢ ∈]-∞ ، ٠[
∴ مجموعة الحل = {-٢}

(١٤) ∵ √(س^{٢} - ٤ س + ٤) = ٤
∴ √(س - ٢)^{٢} = ٤   ∴ |س - ٢| = ٤
∴ س - ٢ = ± ٤
∴ س - ٢ = ٤   ∴ س = ٦
أ، س - ٢ = -٤   ∴ س = -٢
∴ مجموعة الحل = {-٢ ، ٦}

(١٥) |س| + س = ٠
عندما س ≤ ٠ : ∴ س + س = ٠
∴ ٢ س = ٠   ∴ س = ٠ ∈ [٠ ، ∞[
عندما س < ٠ : ∴ -س + س = صفر
∴ صفر = صفر وذلك متحقق لجميع قيم س < ٠
∴ مجموعة الحل =]-∞ ، ٠]

(١٦) عندما س ≤ -٣ : س + ٣ + ٢ س = ٠
∴ ٣ س = -٣   ∴ س = -١ ∈ [-٣ ، ∞[
عندما س < -٣ : ∴ -س - ٣ + ٢ س = ٠
∴ س = ٣ ∉]-∞ ، -٣[
∴ مجموعة الحل = {-١}

(١٧) ∴ √(س^{٢} - ٦ س + ٩) + ٢ س = ٩
∴ √(س - ٣)^{٢} + ٢ س = ٩
∴ |س - ٣| + ٢ س = ٩
عندما س ≤ ٣ : ∴ س - ٣ + ٢ س = ٩
∴ ٣ س = ١٢   ∴ س = ٤ ∈ [٣ ، ∞[
عندما س < ٣ : ∴ -س + ٣ + ٢ س = ٩
∴ س = ٦ ∉]-∞ ، ٣[
∴ مجموعة الحل = {٤}

(١٨) |س - ٢| (|س - ٣| - ١) = ٠
∴ |س - ٢| = ٠ ، ومنها س = ٢
أ، |س - ٣| - ١ = ٠   ∴ |س - ٣| = ١
∴ س - ٣ = ± ١ ومنها س = ٢ أ، س = ٤
∴ مجموعة الحل = {٣ ، ٢ ، ٤}

(١٩) ∵ ٥ |س - ٣| - ٢ √(س - ٣)^{٢} = ١٢
∴ ٥ |س - ٣| - ٢ |س - ٣| = ١٢
∴ ٣ |س - ٣| = ١٢   ∴ |س - ٣| = ٤
∴ س - ٣ = ± ٤ ومنها س = ٧ أ، س = -١
∴ مجموعة الحل = {٧ ، -١}

(٢٠) |س - ١| |س + ١| = |س - ١|
∴ |س - ١| (|س + ١| - ١) = ٠
∴ |س - ١| = ٠ ، ومنها س = ١
أ، |س + ١| - ١ = ٠   ∴ |س + ١| = ١
∴ س + ١ = ± ١
ومنها س = ٠ ، أ، س = -٢
∴ مجموعة الحل = {١ ، ٠ ، -٢}

(٢١) |س^{٢} - ١| = ٢٦   ∴ س^{٢} - ١ = ± ٢٦
∴ س^{٢} = -٢٥ (مرفوض) أ، س^{٢} = ٢٧
ومنها س = ± ٣ √٣
∴ مجموعة الحل = {٣ √٣ ، -٣ √٣}

(٢٢) (|س + ١| + ٢) (|س + ١| - ٥) = ٠
∴ |س + ١| + ٢ = ٠
∴ |س + ١| = -٢ (مرفوض)
أ، |س + ١| - ٥ = ٠   ∴ |س + ١| = ٥
∴ س + ١ = ± ٥ ومنها س = ٤ أ، س = -٦
∴ مجموعة الحل = {٤ ، -٦}

(٢٣) |س - ٥|^{٢} = ٢ |س - ٥|
∴ |س - ٥| (|س - ٥| - ٢) = ٠
∴ |س - ٥| = ٠ ، ومنها س = ٥
أ، |س - ٥| - ٢ = ٠   ∴ |س - ٥| = ٢
ومنها س - ٥ = ± ٢
∴ س = ٧ أ، س = ٣
∴ مجموعة الحل = {٥ ، ٧ ، ٣}

(٢٤) ∵ س |س| - س = ٠
∴ س (|س| - ١) = ٠
∴ س = ٠ أ، |س| - ١ = ٠
∴ |س| = ١   ∴ س = ± ١
∴ مجموعة الحل = {٠ ، ١ ، -١}

(٢٥) س |س - ٥| - ٦ = ٠
عندما س ≤ ٥ : ∴ س^{٢} - ٥ س - ٦ = ٠
∴ (س - ٦) (س + ١) = ٠
∴ س = ٦ ∈ [٥ ، ∞[أ، س = -١ ∉ [٥ ، ∞[

عندما س < ٥ : − س^٢ + ٥ س − ٦ = ٠
∴ س^٢ − ٥ س + ٦ = ٠
∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠
∴ س = ٢ ∈]− ∞ ، ٥[
أ، س = ٣ ∈]− ∞ ، ٥[
∴ مجموعة الحل = {٦ ، ٢ ، ٣}

(٢٦) س^٢ + س − ١٠ = ± ١٠
∴ س^٢ + س − ١٠ = −١٠
∴ س^٢ + س = ٠   ∴ س (س + ١) = ٠
∴ س = ٠ ، أ، س = −١
أ، س^٢ + س − ١٠ = ١٠
∴ س^٢ + س − ٢٠ = ٠
∴ (س + ٥) (س − ٤) = ٠
∴ س = −٥ أ، س = ٤
∴ مجموعة الحل = {٠ ، −١ ، −٥ ، ٤}

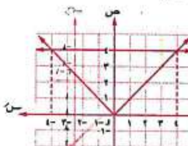
(٢٧) س|س − ٢| = ٤ س − ٨
عندما س > ٢ : ∴ س (س − ٢) = ٤ س − ٨
∴ س^٢ − ٢ س − ٤ س + ٨ = ٠
∴ س^٢ − ٦ س + ٨ = ٠
∴ (س − ٢) (س − ٤) = ٠
∴ س = ٢ ∉]٢ ، ∞[
أ، س = ٤ ∈]٢ ، ∞[
عندما س < ٢ : ∴ س (− س + ٢) = ٤ س − ٨
∴ − س^٢ + ٢ س = ٤ س − ٨
∴ س^٢ + ٢ س − ٨ = ٠
∴ (س + ٤) (س − ٢) = ٠
∴ س = −٤ ∈]− ∞ ، ٢[
أ، س = ٢ ∉]− ∞ ، ٢[
∴ مجموعة الحل = {٤ ، −٤}

(٢٨) س^٢ |س| = ٨ س
عندما س ≥ ٠ : ∴ س^٢ × س = ٨ س
∴ س^٤ − ٨ س = ٠
∴ س (س^٣ − ٨) = ٠
∴ س = ٠ ∈ [٠ ، ∞[
أ، س^٣ − ٨ = ٠   ∴ س^٣ = ٨
∴ س = ٢ ∈ [٠ ، ∞[
عندما س < ٠ : ∴ س^٢ × − س = ٨ س
∴ س^٤ + ٨ س = ٠
∴ س (س^٣ + ٨) = ٠
∴ س = ٠ ∉]− ∞ ، ٠[
أ، س^٣ + ٨ = ٠
∴ س^٣ = −٨
∴ س = −٢ ∈]− ∞ ، ٠[
∴ مجموعة الحل = {−٢ ، ٠ ، ٢}

٢

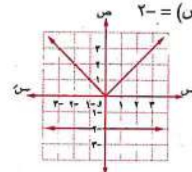
* تم الحل بيانيًا وعليك التحقق جبريًا بنفسك.
* نرسم منحنيى الدالتين د (س) ، ر (س) فتكون الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين هى مجموعة حل المعادلة.

(١) ∵ |س| = ٤   ∴ د (س) = |س|
، ر (س) = ٤



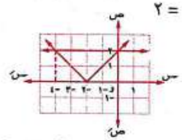
من الرسم : مجموعة الحل = {٤ ، −٤}

(٢) ∵ |س| = −٢   ∴ د (س) = |س|
، ر (س) = −٢



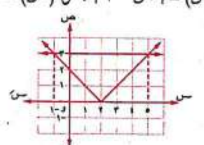
من الرسم : مجموعة الحل = ∅

(٣) ∵ |س + ٢| = ٢   ∴ د (س) = |س + ٢|
، ر (س) = ٢



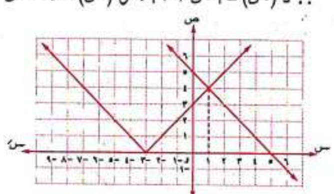
من الرسم : مجموعة الحل = {٠ ، −٤}

(٤) ∵ $\sqrt{(س − ٢)^٢}$ = ٣   ∴ |س − ٢| = ٣
∴ د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = ٣



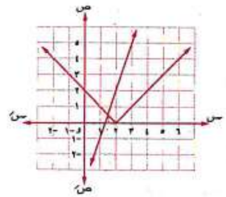
من الرسم : مجموعة الحل = {٥ ، −١}

(٥) ∵ |س + ٣| = ٥ − س
∴ د (س) = |س + ٣| ، ر (س) = ٥ − س



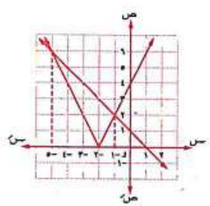
من الرسم : مجموعة الحل = {١}

(٦) د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = ٣ س − ٤



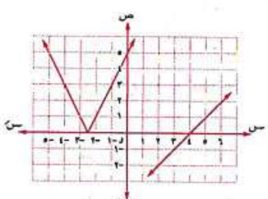
من الرسم : مجموعة الحل = {١$\frac{١}{٢}$}

(٧) د (س) = ٢ |س + ٢|
، ر (س) = ١ − س



من الرسم : مجموعة الحل = {−١ ، −٥}

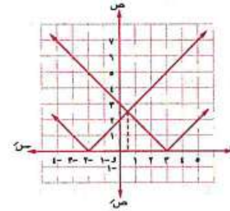
(٨) د (س) = ٢ |س + $\frac{٥}{٢}$|
، ر (س) = س − ٤



من الرسم : مجموعة الحل = ∅

⑨ د (س) = |س + ٢|

، ر (س) = |س − ٣|

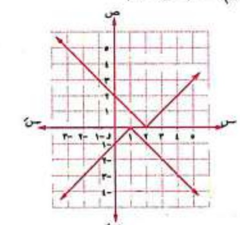


من الرسم : مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٢}\}$

⑩ ∵ |س − ٢| = −|س − ١|

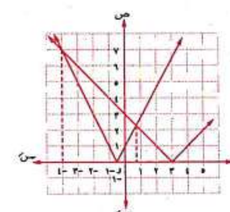
∴ د (س) = |س − ٢|

، ر (س) = −|س − ١|



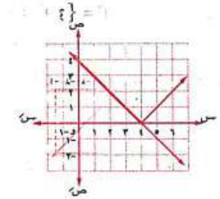
من الرسم : مجموعة الحل = ∅

⑪ د (س) = |س − ٣| ، ر (س) = |٢ س + ١|



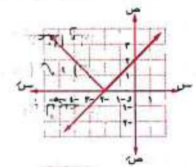
من الرسم : مجموعة الحل = $\{-٤ ، \frac{٢}{٣}\}$

⑫ د (س) = |س − ٤| ، ر (س) = ٤ − س



من الرسم : مجموعة الحل =]− ∞ ، ٤]

⑬ د (س) = |س + ٢| ، ر (س) = س + ٢

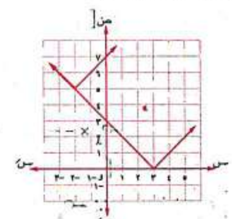


من الرسم : مجموعة الحل = [−٢ ، ∞[

⑭ ∵ |س − ٣| = |س + ٢| + ٥

∴ د (س) = |س − ٣|

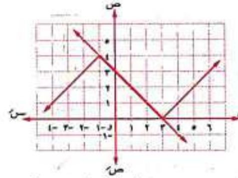
، ر (س) = |س + ٢| + ٥



من الرسم : مجموعة الحل =]− ∞ ، −٢]

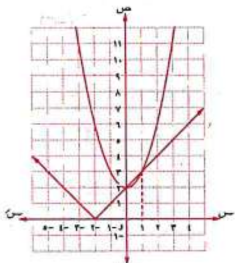
⑮ د (س) = |س − ٣|

، ر (س) = ٤ − |س + ١|



من الرسم : مجموعة الحل = [−١ ، ٣]

⑯ د (س) = |س + ٢| ، ر (س) = $س^٢$ + ٢



من الرسم : مجموعة الحل = {٠ ، ١}

٣

د (−س) = $\frac{١٢}{|-س| + ٢} = \frac{١٢}{|س| + ٢}$ = د (س)

∴ الدالة زوجية.

∵ د (س) = ٢ ∴ $\frac{١٢}{|س| + ٢} = ٢$

∴ |س| + ٢ = ٦ ∴ |س| = ٤

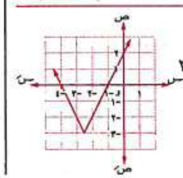
∴ س = ± ٤ ∴ مجموعة الحل = {−٤ ، ٤}

٤

د (س) = ٢ |س + $\frac{٥}{٢}$| − ٣

من الرسم :

* المدى = [−٣ ، ∞[



* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، − $\frac{٥}{٢}$]

، وتزايدية فى [− $\frac{٥}{٢}$ ، ∞[

* مجموعة الحل = {−١ ، −٤}

الحل الجبرى : ∵ |٢ س + ٥| = ٣

∴ ٢ س + ٥ = ± ٣

∴ ٢ س + ٥ = ٣ ومنها س = −١

أ، ٢ س + ٥ = −٣ ومنها س = −٤

٥

من الرسم :

* المدى =]− ∞ ، ١]

* الدالة تزايدية فى

]− ∞ ، ٠]

، وتناقصية فى [٠ ، ∞[



* الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات.

* مجموعة الحل = {−٢ ، ٢} ويمكنك التحقق منها جبريًا.

٦

د (−س) = $\frac{١ - |-س|}{|-س|} = \frac{١ - |س|}{|س|}$ = د (س)

∴ الدالة زوجية.

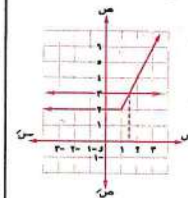


∴ د (س) = $\frac{١ - |س|}{|س|} = \frac{١}{|س|} - ١$

من الرسم : مجموعة الحل = {−١ ، ١}

٧

$د(س) = \begin{cases} ٢س & ، س \geq ١ \\ ٢ & ، س < ١ \end{cases}$



من الرسم :

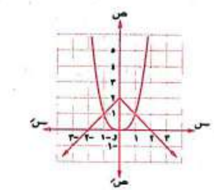
* المدى = [٢ ، ∞[

* الدالة ثابتة في]−∞ ، ١[، وتزايدية في]١ ، ∞[

* مجموعة الحل = $\{\frac{٣}{٢}\}$

٨

$د(س) = \begin{cases} س^٣ & ، س \geq ٠ \\ -س^٣ & ، س < ٠ \end{cases}$



من الرسم : مجموعة الحل = {−١ ، ١}

تمارين على حل متباينات القيمة المطلقة

٩

(١) $-٥ \leq س - ٣ \leq ٥$

$\therefore -٢ \leq س \leq ٨$

$\therefore$ مجموعة الحل = [−٢ ، ٨]

(٢) $س - ٣ \geq ٥$ ومنها $س \geq ٨$

أ، $س - ٣ \leq -٥$ ومنها $س \leq -٢$

$\therefore$ مجموعة الحل = ح −]−٢ ، ٨[

(٣) $٢س + ٥ > ٣$ ومنها $س > -١$

أ، $٢س + ٥ < -٣$ ومنها $س < -٤$

مجموعة الحل = ح − [−٤ ، −١]

(٤) $\therefore |س - ٣| < ٧ \quad \therefore -٧ < س - ٣ < ٧$

$\therefore -٤ < س < ١٠$

$\therefore$ مجموعة الحل =]−٤ ، ١٠[

(٥) $-١ \leq \frac{س - ٣}{٤} \leq ١$

$\therefore -٤ \leq س - ٣ \leq ٤ \quad \therefore -١ \leq س \leq ٧$

$\therefore$ مجموعة الحل = [−١ ، ٧]

(٦) $|٢س + ٢| < -١ \quad \therefore$ مجموعة الحل = ∅

(٧) $\because \frac{١}{|٢س|} \geq ٥ \quad \therefore |٢س| \leq \frac{١}{٥}$

$\therefore -\frac{١}{٥} \leq ٢س \leq \frac{١}{٥} \quad \therefore -\frac{١}{١٠} \leq س \leq \frac{١}{١٠}$

، $\because |٢س| = ٠$ عندما س = ٠

$\therefore$ مجموعة الحل = $[-\frac{١}{١٠} ، \frac{١}{١٠}] - \{٠\}$

(٨) $\because \frac{١}{|٢س - ٣|} > ٢ \quad \therefore |٢س - ٣| < \frac{١}{٢}$

$\therefore -\frac{١}{٢} < ٢س - ٣ < \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{٥}{٢} < ٢س < \frac{٧}{٢} \quad \therefore \frac{٥}{٤} < س < \frac{٧}{٤}$

، $\because |٢س - ٣| = ٠$ عندما $س = \frac{٣}{٢}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $]\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}[- \{\frac{٣}{٢}\}$

(٩) $|٢س - ٣| > ٤$

$\therefore ٢س - ٣ > ٤$ ومنها $س > \frac{٧}{٢}$

أ، $٢س - ٣ < -٤$ ومنها $س < -\frac{١}{٢}$

$\therefore$ مجموعة الحل = ح − $[-\frac{١}{٢} ، \frac{٧}{٢}]$

(١٠) $\because \sqrt{(س - ١)^٢} \geq ٤ \quad \therefore |س - ١| \geq ٤$

$\therefore س - ١ \geq ٤$ ومنها $س \geq ٥$

أ، $س - ١ \leq -٤$ ومنها $س \leq -٣$

$\therefore$ مجموعة الحل = ح −]−٣ ، ٥[

(١١) $\because \sqrt{(٢س - ٣)^٢} \leq ٩$

$\therefore |٢س - ٣| \leq ٩$

$\therefore -٩ \leq ٢س - ٣ \leq ٩$

$\therefore -٦ \leq ٢س \leq ١٢$

$\therefore -٣ \leq س \leq ٦$

$\therefore$ مجموعة الحل = [−٣ ، ٦]

(١٢) $٢|س - ٢| < ٦ \quad \therefore |س - ٢| < ٣$

$\therefore -٣ < س - ٢ < ٣$

$\therefore -١ < س < ٥$

$\therefore$ مجموعة الحل =]−١ ، ٥[

(١٣) $|س + ٢| + |س + ٢| + |س + ٢| \geq ٦$

$\therefore ٣|س + ٢| \geq ٦$

$\therefore |س + ٢| \geq ٢$

$\therefore س + ٢ \geq ٢$ ومنها $س \geq ٠$

أ، $س + ٢ \leq -٢$ ومنها $س \leq -٤$

$\therefore$ مجموعة الحل = ح −]−٤ ، ٠[

١٠

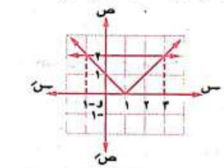
(١)]−٤ ، ٠] (٢) ح − [−١ ، ٥]

(٣) [−٥ ، −١]

١١

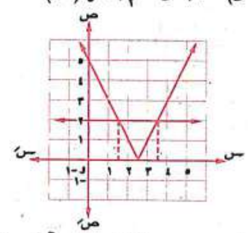
تم الحل بيانيًا وعليك التحقق جبريًا بنفسك

(١) $د(س) = |س - ١|$ ، $ر(س) = ٢$



من الرسم : مجموعة الحل =]−١ ، ٣[

(٢) $د(س) = ٢|س - \frac{٥}{٢}|$ ، $ر(س) = ٢$



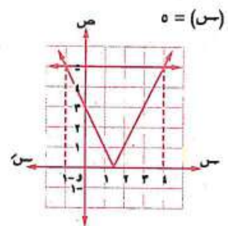
من الرسم : مجموعة الحل = ح − $]\frac{٣}{٢} ، \frac{٧}{٢}[$

(٣) $\because \sqrt{٤س^٢ - ١٢س + ٩} = \sqrt{(٢س - ٣)^٢}$

$= |٢س - ٣|$

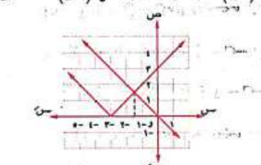
$\therefore د(س) = |٢س - ٣| = ٢|س - \frac{٣}{٢}|$

، $ر(س) = ٥$



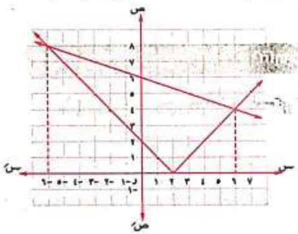
من الرسم : مجموعة الحل = ح − [−١ ، ٤]

④ د (س) = |س + ٣| ، ر (س) = − س



من الرسم : مجموعة الحل =]− ∞ ، − $\frac{٣}{٢}$]

⑤ د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٦

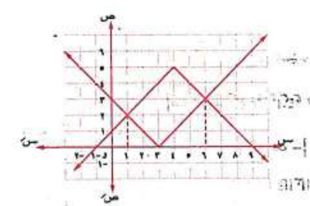


من الرسم : مجموعة الحل =]−٦ ، ٦[

⑥ ∵ |س − ٣| > ٥ − |س − ٤|

∴ د (س) = |س − ٣|

ر (س) = ٥ − |س − ٤|



من الرسم : مجموعة الحل = ع − [١ ، ٦]

١٢

① ∵ − ٤ ≤ س ≤ ٤ ∴ |س| ≤ ٤

② ∵ ٠ < س < ٦ بإضافة (−٣) إلى أطراف المتباينة.

∴ − ٣ < س − ٣ < ٣ ∴ |س − ٣| < ٣

③ ∵ س ≤ − ٢ ، أ س ≥ ٢ ∴ |س| ≥ ٢

④ ∵ س ∈ ع − [−٢ ، ٦]

∴ س > ٦ ، س < −٢

وبإضافة (−٢) إلى أطراف المتباينة

∴ س − ٢ > ٤ ، س − ٢ < −٤

∴ |س − ٢| > ٤

١٣

① نفرض أن درجة الطالب = س درجة

∴ ٦٠ < س < ١٠٠

وبإضافة (− ٨٠) إلى أطراف المتباينة

∴ − ٢٠ < س − ٨٠ < ٢٠

∴ |س − ٨٠| < ٢٠

② نفرض أن درجة الحرارة = س درجة

∴ ٣٥ < س < ٤٢

وبإضافة (− ٣٨,٥) إلى أطراف المتباينة

∴ − ٣,٥ < س − ٣٨,٥ < ٣,٥

∴ |س − ٣٨,٥| < ٣,٥

③ نفرض أن العمق الذى تعيش فيه الطحالب الخضراء = س مترًا

∴ ٠ ≤ س ≤ ٣٠

وبإضافة (−١٥) إلى أطراف المتباينة

∴ −١٥ ≤ س − ١٥ ≤ ١٥

∴ |س − ١٥| ≤ ١٥

تمارين متنوعة

١٤

① بوضع |س| − ١ = ٠ ∴ |س| = ١

∴ س = ± ١

∴ المجال = ع − {١ ، −١}

② بوضع |س| + ١ = ٠ ∴ |س| = −١ (تعارض)

∴ المجال = ع

③ بوضع |س − ٢| − ٥ = ٠

∴ |س − ٢| = ٥

∴ س − ٢ = ٥ ومنها س = ٧

أ، س − ٢ = −٥ ومنها س = −٣

∴ المجال = ع − {٧ ، −٣}

④ بوضع ٥ − |س| ≥ ٠ ∴ |س| ≤ ٥

∴ −٥ ≤ س ≤ ٥ ∴ المجال = [−٥ ، ٥]

⑤ بوضع |س| − ٥ ≥ ٠ ∴ |س| ≥ ٥

∴ س ≥ ٥ أ، س ≤ −٥

∴ المجال = ع −]−٥ ، ٥[

⑥ بوضع ٥ − |س| > ٠ ∴ |س| < ٥

∴ −٥ < س < ٥ ∴ المجال =]−٥ ، ٥[

١٥

① د (− س) = − س |− س| = − س |س|

= − د (س) ∴ الدالة فردية.

② د (− س) = $(−س)^٢$ − |− س| − ١

= $س^٢$ − |س| − ١ = د (س) ∴ الدالة زوجية.

③ د (− س) = $\frac{|− س − ١| + |− س + ١|}{|− س − ١| − |− س + ١|}$ = − د (س)

∴ الدالة فردية.

④ د (− س) = $\frac{(− س)^٢ ظا (− ٢ س)}{٥ + |− ٢ س|}$

= $\frac{− س^٢ ظا ٢ س}{٥ + |٢ س|}$ = د (س)

∴ الدالة زوجية.

⑤ د (− س)

= ٢ |− س| ظا (− س) + ٢ (− س) | ظا (− س)|

= ٢ |س| (− ظا س) − ٢ س | − ظا س|

= −٢ |س| ظا س − ٢ س | ظا س|

= − د (س) ∴ الدالة فردية.

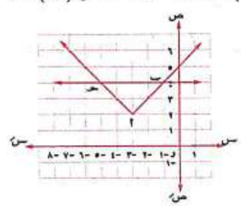
⑥ د (− س) = $\sqrt{|− س| + (− س)}$ = $\sqrt{|س| − س}$

≠ د (س) ≠ − د (س)

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

١٦

① د (س) = |س + ٣| + ٢ ، ر (س) = ٤

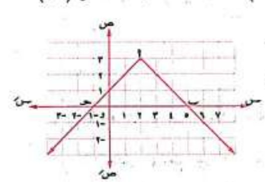


∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المثلث أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٢

= ٤ وحدة مربعة.

② د (س) = − |س − ٢| + ٣ ، ر (س) = صفر



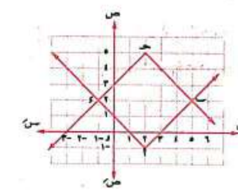
∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المثلث أ ب حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٩ وحدة مربعة.

(٣) د(س) = |س − ٢| − ١

(٤) ر(س) = ٥ − |س − ٢|



∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المربع أ ب حـ ء = $\frac{١}{٢}$ (ب ء)^{٢}

= $\frac{١}{٢}$ × ٦^{٢} = ١٨ وحدة مربعة.

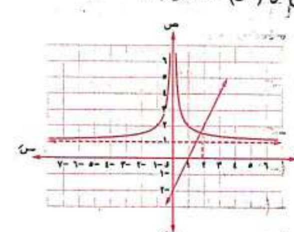
١٧

د(−س) = $\frac{|−س| + ١}{|−س|}$ = $\frac{|س| + ١}{|س|}$ = د(س)

∴ الدالة زوجية. ∵ د(س) = $\frac{|س| + ١}{|س|}$ = ١ + $\frac{١}{|س|}$

بيانيًا :

وبوضع ر(س) = ٢ س − ٢



من الرسم : س ≈ ١٫٨

∴ مجموعة الحل = {١٫٨}

جبريًا : ∵ د(س) = { $\frac{١}{س}$ + ١ ، س > ٠ ؛ $\frac{−١}{س}$ + ١ ، س < ٠ }

عندما س > ٠ : ∴ $\frac{١}{س}$ + ١ = ٢ س − ٢

∴ $\frac{١}{س}$ = ٢ س − ٣ (بالضرب في س)

∴ ١ = ٢ س^{٢} − ٣ س

∴ ٢ س^{٢} − ٣ س − ١ = ٠

∴ س = $\frac{٣ ± \sqrt{٩ − ٤ × ٢ × −١}}{٢ × ٢}$ = $\frac{٣ ± \sqrt{١٧}}{٤}$

∴ س ≈ ١٫٨ ∈]٠ ، ∞[

أو س ≈ −٠٫٣ ∉]٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ $\frac{−١}{س}$ + ١ = ٢ س − ٢

∴ $\frac{−١}{س}$ = ٢ س − ٣ (بالضرب في س)

∴ −١ = ٢ س^{٢} − ٣ س

∴ ٢ س^{٢} − ٣ س + ١ = ٠

∴ (٢ س − ١) (س − ١) = ٠

∴ س = $\frac{١}{٢}$ ∉]−∞ ، ٠[

أو س = ١ ∉]−∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {١٫٨}

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (د) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (جـ) (٥) (د)

(٦) (أ) (٧) (أ) (٨) (جـ) (٩) (ب)

إرشادات لحل رقم ١

(١) ∵ |س + ١| + |٢ س + ٣| = ٠

∴ س + ١ = ٠ ومنها س = −١

وفى نفس الوقت يكون ٢ س + ٣ = ٠ ومنها س = $\frac{−٣}{٢}$

∴ وهذا تعارض.

∴ مجموعة الحل = ∅

(٢) ∵ |(س − ١) (س − ٣)| = |س − ٣|

∴ |س − ٣| |س − ١| − |س − ٣| = ٠

∴ |س − ٣| (|س − ١| − ١) = ٠

∴ |س − ٣| = ٠ ومنها س = ٣

أو |س − ١| = ١

∴ س − ١ = ±١ ومنها س = ٠ أو ٢

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٢ ، ٣}

(٣) ∵ |س| + |ص| ≤ |س + ص|

∴ $\frac{|س| + |ص|}{|س + ص|}$ ≤ ١

∴ أصغر قيمة للمقدار $\frac{|س| + |ص|}{|س + ص|}$ هى ١

(٤) ∵ ٣٢ < ٦١ < ٦٤

∴ ٢^{٥} < ٢^{س} < ٢^{٦} ∴ ٥ < س < ٦

∴ |س − ٦| = −س + ٦

، |س − ٥| = س − ٥

∴ |س − ٦| + |س − ٥|

= −س + ٦ + س − ٥ = ١

(٥) ∵ أ^{٢} ب > ٠ ∴ ب موجبة.

، ∵ $\frac{أ}{ب}$ < ٠ ∴ أ سالبة.

∴ $\sqrt{أ^{٢}}$ = |أ| = −أ ، $\sqrt{ب^{٢}}$ = |ب| = ب

∴ $\sqrt{أ^{٢}}$ + $\sqrt{ب^{٢}}$ − (ب − أ)

= −أ + ب − ب + أ = صفر

(٦) ∵ −٤ ≤ س ≤ ٦

∴ −١٦ ≤ ٤ س ≤ ٢٤

∴ −٢٤ ≤ ٤ س − ٨ ≤ ١٦

∴ ٠ ≤ |٤ س − ٨| ≤ ٢٤

∴ أ = صفر ، ب = ٢٤

∴ أ + ب = ٢٤

(٧) ∵ س^{٢} − ٣ |س| − ١٠ = ٠

∴ |س|^{٢} − ٣ |س| − ١٠ = ٠

∴ (|س| − ٥) (|س| + ٢) = ٠

∴ |س| = ٥ ومنها س = ±٥

أو |س| = −٢ (مرفوض)

∴ جذرا المعادلة هما ±٥

∴ حاصل ضرب جذرى المعادلة يساوى −٢٥

(٨) ∵ ٣ < |س| < ٨ ∴ ٣ < س < ٨

∴ س = ٤ أو ٥ أو ٦ أو ٧

أو −٨ < س < −٣

∴ س = −٤ أو −٥ أو −٦ أو −٧

∴ عدد قيم س الصحيحة هو ٨

(٩) ∵ (ر ∘ د) (س) = ٣

∴ ر (د (س)) = ٣

∴ ||٢ س − ٥| + ١| = ٣

∴ |٢ س − ٥| + ١ = ±٣

∴ |٢ س − ٥| = ±٣ − ١

∴ |٢ س − ٥| = −٤ (مرفوض)

أو |٢ س − ٥| = ٢ ∴ ٢ س − ٥ = ±٢

∴ ٢ س = ٥ ± ٢

∴ ٢ س = ٧ ومنها س = $\frac{٧}{٢}$

أو ٢ س = ٣ ومنها س = $\frac{٣}{٢}$

∴ مجموعة الحل = {$\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$}

٢

(١) (س + ١) (|س| − ١) + $\frac{١}{٢}$ = صفر

عندما س ≥ ٠ :

∴ (س + ١) (س − ١) + $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ س^{٢} − ١ + $\frac{١}{٢}$ = ٠ ∴ س^{٢} − $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∈ [٠ ، ∞[

أ، س = $-\frac{١}{\sqrt{٢}} \notin]٠ ، \infty[$

، عندما س < ٠ :

∴ (س + ١)(−س − ١) + $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ −(س + ١)^{٢} + $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ (س + ١)^{٢} = $\frac{١}{٢}$ ∴ س + ١ = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ س = $\left(-١ + \frac{١}{\sqrt{٢}}\right) \in]-\infty ، ٠[$

∴ س = $\left(-١ - \frac{١}{\sqrt{٢}}\right) \in]-\infty ، ٠[$

∴ مجموعة الحل

= $\left\{\frac{١}{\sqrt{٢}} ، -١ - \frac{١}{\sqrt{٢}} ، -١ + \frac{١}{\sqrt{٢}}\right\}$

(٢) ∵ ||٢س + ٣| − ٨| = ٥

∴ |٢س + ٣| − ٨ = ±٥

∴ |٢س + ٣| = ٨ ± ٥

∴ |٢س + ٣| = ١٣ أ، |٢س + ٣| = ٣

∴ ٢س + ٣ = ±١٣ | ٢س + ٣ = ±٣

∴ ٢س = −٣ ± ١٣ | ∴ ٢س = −٣ ± ٣

∴ س = −٨ أ، ٥ | ∴ س = صفر أ، −٣

∴ مجموعة الحل = {−٨ ، ٥ ، صفر ، −٣}

(٣) |س|^{٢} − ٣|س| + ٢ = ٠

∴ (|س| − ٢)(|س| − ١) = ٠

∴ |س| = ٢ ومنها س = ±٢

أ، |س| = ١ ومنها س = ±١

∴ مجموعة الحل = {٢ ، −٢ ، ١ ، −١}

(٤) $\sqrt{\left(س - \frac{١}{س}\right)^{٢} + ٤} = ٢$

∴ $\sqrt{س^{٢} - ٢ + \frac{١}{س^{٢}} + ٤} = ٢$

∴ $\sqrt{س^{٢} + ٢ + \frac{١}{س^{٢}}} = ٢$

∴ $\sqrt{\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٢}} = ٢$ ∴ $\left|س + \frac{١}{س}\right| = ٢$

∴ س + $\frac{١}{س}$ = ±٢ ∴ س + $\frac{١}{س}$ = ٢

ومنها س^{٢} − ٢س + ١ = ٠

∴ (س − ١)^{٢} = ٠ ∴ س = ١

أ، س + $\frac{١}{س}$ = −٢

ومنها س^{٢} + ٢س + ١ = ٠

∴ (س + ١)^{٢} = ٠ ∴ س = −١

∴ مجموعة الحل = {١ ، −١}

(٥) ∵ |س^{٢} − ٣| + $\frac{٢}{|س^{٢} - ٣|}$ = ٣

∴ |س^{٢} − ٣|^{٢} − ٣|س^{٢} − ٣| + ٢ = ٠

∴ (|س^{٢} − ٣| − ١)(|س^{٢} − ٣| − ٢) = ٠

∴ |س^{٢} − ٣| − ١ = ٠ أ، |س^{٢} − ٣| − ٢ = ٠

∴ |س^{٢} − ٣| = ١
∴ س^{٢} − ٣ = ±١
∴ س^{٢} = ٣ ± ١
∴ س^{٢} = ٤
ومنها س = ±٢
أ، س^{٢} = ٢
ومنها س = ±$\sqrt{٢}$

∴ |س^{٢} − ٣| = ٢
∴ س^{٢} − ٣ = ±٢
∴ س^{٢} = ٣ ± ٢
∴ س^{٢} = ٥
ومنها س = ±$\sqrt{٥}$
أ، س^{٢} = ١
ومنها س = ±١

∴ مجموعة الحل = {±٢ ، ±$\sqrt{٢}$ ، ±$\sqrt{٥}$ ، ±١}

(٦) |س − ٤| + |س − ٢| = ١٠

	(٤)	(٢)	
س − ٤	٤ − س	٤ − س	
س − ٢	س − ٢	٢ − س	
٢س − ٦	٢	٦ − ٢س	

∴ عندما س > ٤ ∴ ٢س − ٦ = ١٠

∴ س = ٨ (يحقق)

، عندما س < ٢ ∴ ٦ − ٢س = ١٠

∴ س = −٢ (يحقق)

عندما ٢ < س < ٤ ∴ ٢ = ١٠ تعارض

∴ مجموعة الحل = {٨ ، −٢}

(٧) ∵ (|٢س − ٣| − ٥)(|٢س − ٣| + ٥) > ١١

∴ |٢س − ٣|^{٢} − ٢٥ > ١١

∴ |٢س − ٣|^{٢} > ٣٦

∴ |٢س − ٣| > ٦

∴ ٢س − ٣ > ٦ ومنها س > $\frac{٩}{٢}$

أ، ٢س − ٣ < −٦ ومنها س < $\frac{-٣}{٢}$

∴ مجموعة الحل = ح − $\left[\frac{-٣}{٢} ، \frac{٩}{٢}\right]$

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الأولى

١

(١) ع(١٠) = ٨ × ١٠ = ٨٠ سم/ث

(٢) ع(١٥٠) = ٨٠ سم/ث

(٣) ع(٢١٠) = −٤ × ٢١٠ + ٨٨٠ = ٤٠ سم/ث

٢

ح(ل) = ٤ ل

(١) ح(٣) = ٤ × ٣ = ١٢ وحدة طول.

(٢) ح$\left(\frac{١٥}{٤}\right)$ = ٤ × $\frac{١٥}{٤}$ = ١٥ وحدة طول.

٣

م(نق) = π نق^{٢}

(١) م$\left(\frac{١}{٢}\right)$ = $\frac{١}{٤}$ π وحدة مربعة.

(٢) م(٥) = ٢٥ π وحدة مربعة.

٤

(١) د(س) = ٠,٣ س + ٨ × ٧

(٢) نعم دالة أحادية لأنه بفرض أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د(أ) = ٠,٣ أ + ٨ × ٧

، د(ب) = ٠,٣ ب + ٨ × ٧

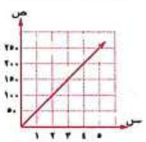
وبفرض أن د(أ) = د(ب)

∴ ٠,٣ أ + ٨ × ٧ = ٠,٣ ب + ٨ × ٧

∴ ٠,٣ أ = ٠,٣ ب ∴ أ = ب

٥

د(س) = ٥٠ س



٦

* ∵ ف = ع × ن

، ∵ ن = ٣ دقائق ، ع = ٣٠ مترًا/دقيقة

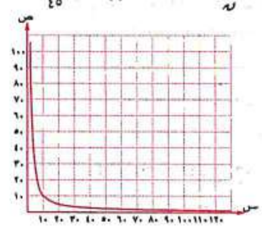
∴ ف = ٣ × ٣٠ = ٩٠ ∴ ع = $\frac{٩٠}{ن}$

∴ ع ∝ $\frac{١}{ن}$

∴ ع تتغير عكسيًا بتغير الزمن.

* ع = $\frac{٩٠}{ن}$ * عندما ع = ٤٥ مترًا/دقيقة.

∴ ٤٥ = $\frac{٩٠}{ن}$ ∴ ن = $\frac{٩٠}{٤٥}$ = ٢ دقيقة.



٧

(١) ∵ النقطة (٠ ، ٣) تنتمى لمنحنى الدالة

∴ (٠ ، ٣) تحقق معادلة الدالة.

د (س) = أ (س − ٢)^{٢} + ٤

∴ ٣ = أ (٠ − ٢)^{٢} + ٤

∴ ٣ = ٤ أ + ٤

∴ ٤ أ = −١

∴ أ = −$\frac{١}{٤}$

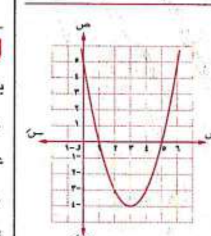
(٢) ∵ نقطة رأس المنحنى هى : (٢ ، ٤)

∴ أقصى ارتفاع للبوابة = ٤ أمتار.

(٣) عرض البوابة = ٢ + ٢ = ٤ أمتار.

٨

(١)



من الرسم :

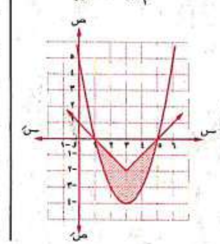
ل = ٤ وحدة طول.

، ع = ٤ وحدة طول.

∴ المساحة المطلوبة

= $\frac{٢}{٣}$ ل ع = $\frac{٢}{٣}$ × ٤ × ٤ = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

(٢)



المساحة المطلوبة

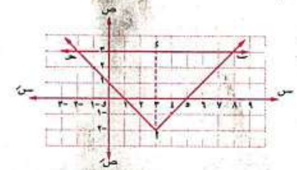
= $\frac{٣٢}{٣}$ − ($\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٢)

= $\frac{٣٢}{٣}$ − ٤

= $\frac{٢٠}{٣}$ وحدة مربعة.

٩

د (س) = | س − ٣ | − ٢ ، ر (س) = ٣



∵ طول الوحدة = ٨ أمتار.

، ∵ ب حـ = ١٠ وحدات.

∴ طول القاعدة = ١٠ × ٨ = ٨٠ متر.

، ∵ أ ء = ٥ وحدات.

∴ الارتفاع = ٥ × ٨ = ٤٠ متر.

∴ مساحة الأرض = مساحة △ أ ب حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٨٠ × ٤٠ = ١٦٠٠ متر مربع.

١٠

يتقاطع الطريقان عندما د (س) = ر (س)

∴ | س − ٥ | = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

عندما س ≥ ٥ : س − ٥ = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

∴ ١$\frac{٢}{٣}$ س = ١٠ ∴ س = ٦ ∈ [٥ ، ∞[

، عندما س < ٥ : ∴ −س + ٥ = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

∴ $\frac{١}{٣}$ س = ٠ ∴ س = ٠ ∈]−∞ ، ٥[

، ∵ د (٦) = | ٦ − ٥ | = ١

∴ أ (٦ ، ١) نقطة تقاطع المنحنيين.

، د (٠) = | ٠ − ٥ | = ٥

∴ ب (٠ ، ٥) نقطة تقاطع المنحنيين.

∴ أ ب = $\sqrt{(٦ - ٠)^{٢} + (١ - ٥)^{٢}}$ = ٢ $\sqrt{١٣}$

، ∵ وحدة الأطوال تمثل ٥ كيلو مترات

∴ أ ب = ٥ × ٢ $\sqrt{١٣}$ = ١٠ $\sqrt{١٣}$ = $\sqrt{١٣٠٠}$ ≈ ٣٦ كم

١١

بفرض أن طول المتقدم لشغل الوظيفة = س سم

∴ ١٧٨ ≤ س ≤ ١٩٢ وبإضافة (− ١٨٥)

إلى أطراف المتباينة.

∴ −٧ ≤ س − ١٨٥ ≤ ٧

∴ | س − ١٨٥ | ≤ ٧

١٢

(١) بعد ثانيتين : ف = ٨ | ٥ − ٢ | = ٢٤ سم.

[فى اتجاه الحركة من أ إلى ب]

، بعد ٨ ثوان : ف = ٨ | ٥ − ٨ | = ٢٤ سم.

[فى اتجاه الحركة من ب إلى حـ]

(٢) ∵ ٨ | ٥ − ن | = ١٦ ∴ | ن − ٥ | = ٢

∴ ن − ٥ = −٢ ومنها ن = ٣

[فى اتجاه الحركة من أ إلى ب]

أو ن − ٥ = ٢ ومنها ن = ٧

[فى اتجاه الحركة من ب إلى حـ]

(٣) ∵ ٨ | ن − ٥ | < ٨ ∴ | ن − ٥ | < ١

∴ −١ < ن − ٥ < ١ ∴ ٤ < ن < ٦

∴ ن ∈]٤ ، ٦[

١٣

∵ ب = (٨ ، ٤)

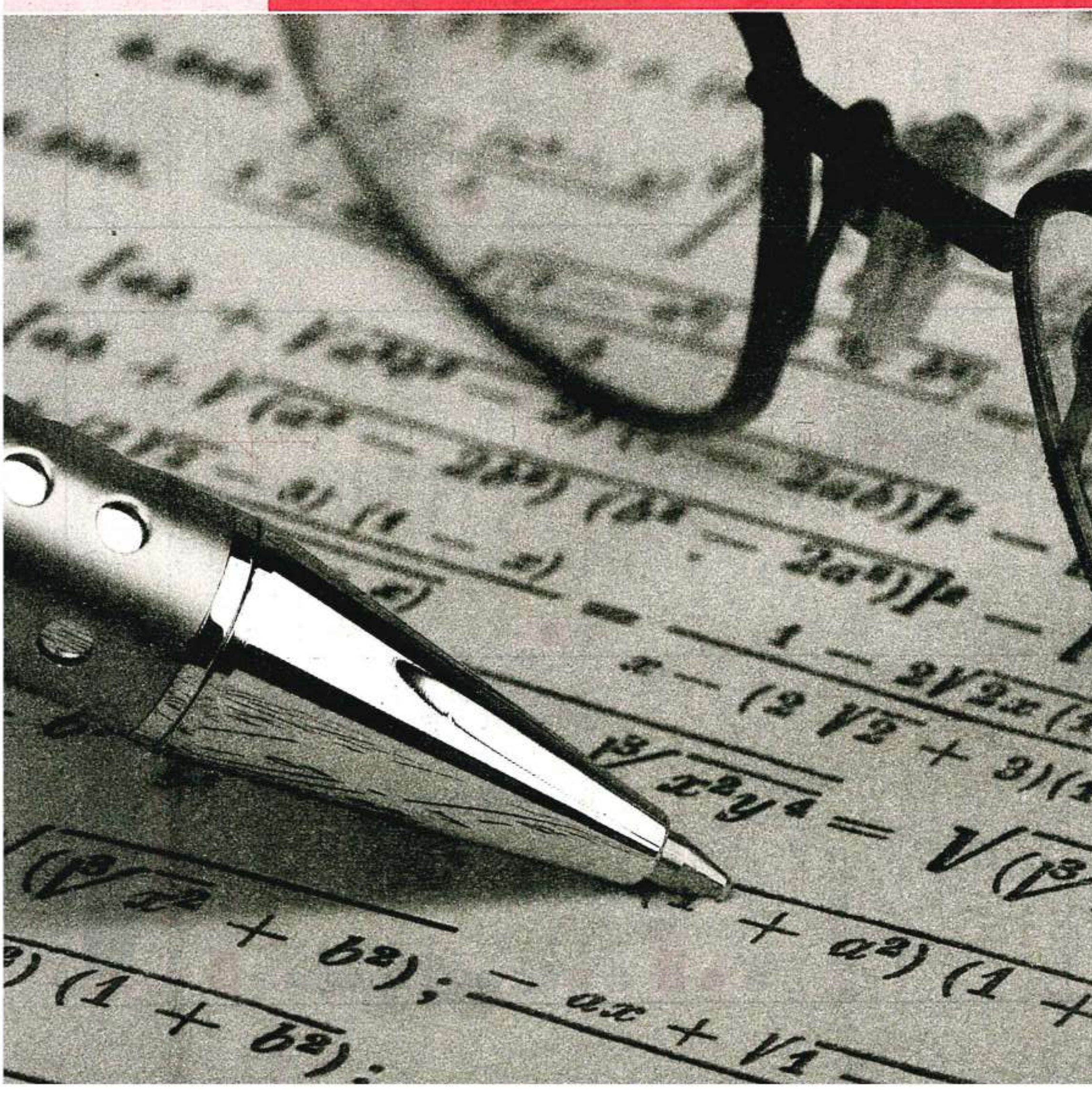
، ∵ د (٨) = $\frac{٤}{٣}$ | ٨ − ٥ | = ٤

∴ ب تقع على منحنى الدالة د

∴ الكرة السوداء سوف تسقط فى الجيب ب

إجابات تمارين الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات
وتطبيقات عليها



إجابات الوحدة الثانية

إجابات تمارين 7

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (جـ)
(٥) (ب) (٦) (جـ) (٧) (ب) (٨) (جـ)
(٩) (ب) (١٠) (أ) (١١) (جـ) (١٢) (د)
(١٣) (ب) (١٤) (د) (١٥) (جـ) (١٦) (جـ)
(١٧) (جـ) (١٨) (ب) (١٩) (ب) (٢٠) (ب)
(٢١) (د) (٢٢) (جـ) (٢٣) (أ) (٢٤) (أ)
(٢٥) (جـ) (٢٦) (أ) (٢٧) (ب) (٢٨) (جـ)
(٢٩) (أ) (٣٠) (د) (٣١) (ب) (٣٢) (أ)
(٣٣) (ب) (٣٤) (ب) (٣٥) (ب) (٣٦) (د)
(٣٧) (جـ) (٣٨) (د) (٣٩) (أ) (٤٠) (أ)
(٤١) (أ) (٤٢) (د) (٤٣) (جـ) (٤٤) (د)
(٤٥) (أ) (٤٦) (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① $\frac{(٢٧)^{-٣}\times(١٢)^{٢}}{١٦\times(٨١)^{-٢}} = \frac{(٣^{٣})^{-٣}\times(٣)^{٢}\times(٢^{٢})^{٢}}{٢^{٤}\times(٣^{٤})^{-٢}}$

$= \frac{٣^{-٩}\times ٣^{٢}\times ٢^{٤}}{٢^{٤}\times ٣^{-٨}} = ٣^{-٩+٢+٨} = ٣$

② $\frac{٩^{٤ن+١}\times ٤^{٢-٢ن}}{٣^{٩ن+١}\times ٤٨^{١-ن}}$

$= \frac{(٣^{٢})^{٤ن+١}\times(٢^{٢})^{٢-٢ن}}{٣^{٩ن+١}\times ٣^{١-ن}\times(٢^{٤})^{١-ن}}$

$= \frac{٣^{٨ن+٢}\times ٢^{٤-٤ن}}{٣^{٩ن+١}\times ٣^{١-ن}\times ٢^{٤-٤ن}}$

$= ٣^{٨ن+٢-٩ن-١-١+ن}\times ٢^{٤-٤ن-٤+٤ن}$

$= ٣^{٠}\times ٢^{٠} = ١\times ١ = ١$

③ $\frac{١٢٥\times(١٥)^{ن-٣}\times(٢٥)^{م+ن}}{(٧٥)^{ن}\times(٥)^{ن+٢م}}$

$= \frac{٥^{٣}\times ٥^{ن-٣}\times ٣^{ن-٣}\times(٥^{٢})^{م+ن}}{٣^{ن}\times(٥^{٢})^{ن}\times ٥^{ن+٢م}}$

$= \frac{٥^{٣}\times ٥^{ن-٣}\times ٣^{ن-٣}\times ٥^{٢م+٢ن}}{٣^{ن}\times ٥^{٢ن}\times ٥^{ن+٢م}}$

$= ٥^{٣+ن-٣+٢م+٢ن-٢ن-ن-٢م}\times ٣^{ن-٣-ن}$

$= ٥^{٠}\times ٣^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$

④ $(١٨)^{\frac{١}{٢}}\times(١٢)^{\frac{٣}{٢}}\times\frac{١}{(٢٤)^{\frac{١}{٢}}}$

$= ٢^{\frac{١}{٢}}\times(٣^{٢})^{\frac{١}{٢}}\times ٣^{\frac{٣}{٢}}\times(٢^{٢})^{\frac{٣}{٢}}\times\frac{١}{(٢^{٣})^{\frac{١}{٢}}\times ٣^{\frac{١}{٢}}}$

$= ٢^{\frac{١}{٢}}\times ٣\times ٣^{\frac{٣}{٢}}\times ٢^{٣}\times ٢^{-\frac{٣}{٢}}\times ٣^{-\frac{١}{٢}}$

$= ٢^{\frac{١}{٢}+٣-\frac{٣}{٢}}\times ٣^{١+\frac{٣}{٢}-\frac{١}{٢}}$

$= ٢^{٢}\times ٣^{٢} = ٣٦$

٢

① الطرف الأيمن

$= \frac{(٣^{٢})^{ص-\frac{١}{٢}}\times ٧^{\frac{ص(ص+٢)}{ص}}}{(٣^{٤})^{ص-١}\times ٣^{٥-ص}\times ٧^{٥-ص}\times(٧^{٢})^{ص-١}}$

$= \frac{٣^{٢ص-١}\times ٧^{ص+٢}}{٣^{٤ص-٤}\times ٣^{٥-ص}\times ٧^{٥-ص}\times ٧^{٢ص-٢}}$

$= ٣^{٢ص-١-٤ص+٤-٥+ص}$ [illegible]

$\times ٧^{ص+٢-٥+ص-٢ص+٢}$

$= ٣^{-٢}\times ٧^{صفر} = ٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$

② الطرف الأيمن $= \frac{(٧^{٣})^{٢س-\frac{١}{٣}}\times(٢^{٢})^{٣س+١}}{(٢^{٢})^{٣س}\times(٧^{٢})^{٣س}\times ٢^{٢}}$

$= \frac{٧^{٦س-١}\times ٢^{٦س+٢}}{٢^{٦س}\times ٧^{٦س}\times ٢^{٢}}$

$= ٢^{٦س+٢-٦س-٢}$

$\times ٧^{٦س-١-٦س}$

$= ٢^{صفر}\times ٧^{-١} = \frac{١}{٧}$

③ الطرف الأيمن

$= \frac{٥^{٣}\times(٢^{٢})^{\frac{٣}{٨}}\times ٢^{-\frac{١}{٤}}\times ٥^{-\frac{١}{٤}}}{(٢^{٢})^{\frac{٥}{٨}}\times ٢^{-\frac{٣}{٤}}\times ٣^{-\frac{٣}{٤}}\times ٣^{\frac{٣}{٤}}\times ٥^{\frac{٣}{٤}}}$

$= \frac{٥^{٣}\times ٢^{\frac{٣}{٤}}\times ٢^{-\frac{١}{٤}}\times ٥^{-\frac{١}{٤}}}{٢^{\frac{٥}{٤}}\times ٢^{-\frac{٣}{٤}}\times ٣^{-\frac{٣}{٤}}\times ٣^{\frac{٣}{٤}}\times ٥^{\frac{٣}{٤}}}$

$= ٥^{٣-\frac{١}{٤}-\frac{٣}{٤}}\times ٢^{\frac{٣}{٤}-\frac{١}{٤}-\frac{٥}{٤}+\frac{٣}{٤}}\times ٣^{\frac{٣}{٤}-\frac{٣}{٤}}$

$= ٥^{٢}\times ٢^{٠}\times ٣^{٠} = ٢٥\times ١\times ١ = ٢٥$

④ الطرف الأيمن

$= \frac{٣\times ٢^{س+٢}+٢^{س+٢}}{٢^{س+٣}-٢\times ٣\times ٢^{س}}$

$= \frac{٢^{س+٢}(٣+١)}{٢^{س+١}(٢^{٢}-٣)} = \frac{٢^{س+٢}\times ٢^{٢}}{٢^{س+١}\times ١} = ٢^{٣} = ٨$

٣

① $\because$ س$^{\frac{٧}{٢}} = ٢^{٧}$ $\therefore$ س $= (٢^{٧})^{\frac{٢}{٧}} = ٤$

$\therefore$ م.ح $= \{٤\}$

② $\because$ س$^{-\frac{٥}{٢}} = ٢^{\frac{٥}{٢}}$ $\therefore$ س $= (٢^{\frac{٥}{٢}})^{-\frac{٢}{٥}}$

$\therefore$ س $= ٢^{-١} = \frac{١}{٢}$ $\therefore$ م.ح $= \{\frac{١}{٢}\}$

③ (س $-$ ١)$^{\frac{٥}{٣}} = ٢^{٥}$

$\therefore$ س $- ١ = (٢^{٥})^{\frac{٣}{٥}} = ٢^{٣} = ٨$

$\therefore$ س $= ٩$ $\therefore$ م.ح $= \{٩\}$

④ ٢ س $+ ٣ = \pm(٣^{٤})^{\frac{٣}{٤}}$ $\therefore$ ٢ س $+ ٣ = \pm ٢٧$

$\therefore$ ٢ س $= ٢٤$ أ، ٢ س $= -٣٠$

$\therefore$ س $= ١٢$ أ، س $= -١٥$

$\therefore$ م.ح $= \{١٢ ، -١٥\}$

⑤ س $+ ١ = (٣٢^{-\frac{١}{٢}})^{-\frac{٢}{٥}} = ٣٢^{\frac{١}{٥}} = (٢^{٥})^{\frac{١}{٥}}$

$\therefore$ س $+ ١ = ٢$ $\therefore$ س $= ١$

$\therefore$ م.ح $= \{١\}$

⑥ س$^{٢} - ٥$ س $+ ٩ = (٣^{٥})^{\frac{٢}{٥}}$

$\therefore$ س$^{٢} - ٥$ س $+ ٩ = ٩$

$\therefore$ س$^{٢} - ٥$ س $= ٠$ $\therefore$ س (س $- ٥) = ٠$

$\therefore$ س $= ٠$ أ، س $= ٥$ $\therefore$ م.ح $= \{٠ ، ٥\}$

⑦ $\because \sqrt{س} + ٢ = ٩$ $\therefore \sqrt{س} = ٧$

$\therefore$ س $= ٤٩$ $\therefore$ م.ح $= \{٤٩\}$

⑧ (س$^{\frac{٢}{٥}} - ١$) (س$^{\frac{٢}{٥}} - ٤$) $= ٠$

$\therefore$ س$^{\frac{٢}{٥}} = ١$ ومنها س $= \pm ١$

أ، س$^{\frac{٢}{٥}} = ٤$ ومنها س $= \pm(٢^{٢})^{\frac{٥}{٢}} = \pm ٣٢$

$\therefore$ م.ح $= \{١ ، -١ ، ٣٢ ، -٣٢\}$

⑨ (س$^{\frac{٢}{٣}} - ١$) (س$^{\frac{٢}{٣}} - ٩$) $= ٠$

$\therefore$ س$^{\frac{٢}{٣}} = ١$ $\therefore$ س $= \pm ١$

أ، س$^{\frac{٢}{٣}} = ٩$ $\therefore$ س $= \pm(٣^{٢})^{\frac{٣}{٢}} = \pm ٢٧$

$\therefore$ م.ح $= \{١ ، -١ ، ٢٧ ، -٢٧\}$

⑩ (س$^{\frac{١}{٢}} - ١$) (س$^{\frac{١}{٢}} - ٢$) $= ٠$

$\therefore$ س$^{\frac{١}{٢}} = ١$ $\therefore$ س $= ١$

أ، س$^{\frac{١}{٢}} = ٢$ $\therefore$ س $= (٢)^{٢} = ٤$

$\therefore$ م.ح $= \{١ ، ٤\}$

⑪ س $- ٨\sqrt{س} + ١٥ = ٠$

$\therefore (\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} - ٥) = ٠$

$\therefore \sqrt{س} = ٣$ ومنها س $= ٩$

أ، $\sqrt{س} = ٥$ ومنها س $= ٢٥$

$\therefore$ م.ح $= \{٩ ، ٢٥\}$

⑫ س$^{\frac{٥}{٢}} -$ س$^{\frac{٥}{٤}} - ٦ = ٠$

$\therefore$ (س$^{\frac{٥}{٤}} - ٣$) (س$^{\frac{٥}{٤}} + ٢$) $= ٠$

∴ $س^{\frac{٥}{٦}} = ٣$ ∴ $س = ٣^{\frac{٦}{٥}} \simeq ٣,٧$

أ، $س^{\frac{٥}{٦}} = -٢$ (مرفوض)

∴ م.ح = $\{٣,٧\}$

(١٣) $س^{\frac{٤}{٥}} - ٣ س^{\frac{٢}{٥}} - ٤ = ٠$

∴ $(س^{\frac{٢}{٥}} + ١)(س^{\frac{٢}{٥}} - ٤) = ٠$

∴ $س^{\frac{٢}{٥}} = -١$ (مرفوض)

أ، $س^{\frac{٢}{٥}} = ٤$

∴ $س = \pm (٢^{٢})^{\frac{٥}{٢}} = \pm ٢^{٥} = \pm ٣٢$

∴ م.ح = $\{-٣٢ ، ٣٢\}$

(١٤) بالضرب × $\sqrt[٥]{س}$

∴ $(\sqrt[٥]{س})^{٢} - ٣\sqrt[٥]{س} + ٢ = ٠$

∴ $س^{\frac{٢}{٥}} - ٣ س^{\frac{١}{٥}} + ٢ = ٠$

∴ $(س^{\frac{١}{٥}} - ١)(س^{\frac{١}{٥}} - ٢) = ٠$

∴ $س^{\frac{١}{٥}} = ١$ ومنها س = ١

أ، $س^{\frac{١}{٥}} = ٢$ ومنها س = ٣٢

∴ مجموعة الحل = $\{١ ، ٣٢\}$

٤

(١) $٥^{٢س-١} = \frac{١}{١٢٥}$ ∴ $٥^{٢س-١} = \frac{١}{٥^{٣}}$

∴ $٥^{٢س-١} = ٥^{-٣}$ ∴ $٢س - ١ = -٣$

∴ $٢س = -٢$ ∴ $س = -١$

∴ م.ح = $\{-١\}$

(٢) $٥^{س+٢} = س^{س+٢}$ ∴ إما س = ٥

أ، $س + ٢ = ٠$ ∴ $س = -٢$

∴ م.ح = $\{-٢ ، ٥\}$

(٣) $٢^{س^{٢}-٩} = ١$ ∴ $س^{٢} - ٩ = ٠$

∴ $س^{٢} = ٩$ ∴ $س = \pm ٣$

∴ م.ح = $\{٣ ، -٣\}$

(٤) $(٣\sqrt{٣})^{|س|} = ٢٧$

∴ $(٣\sqrt{٣})^{|س|} = (٣\sqrt{٣})^{٢}$

∴ $|س| = ٢$ ∴ $س = \pm ٢$

∴ م.ح = $\{٢ ، -٢\}$

(٥) ∵ $٣^{|٣س-٤|} = ٣^{٤س-٤}$

∴ $|٣س - ٤| = ٤س - ٤$

عند $س \geq \frac{٤}{٣}$

∴ $٣س - ٤ = ٤س - ٤$

∴ $س = ٠$ (لا يحقق) ، عند $س < \frac{٤}{٣}$

∴ $-٣س + ٤ = ٤س - ٤$

∴ $٧س = ٨$ ∴ $س = \frac{٨}{٧}$ (يحقق)

∴ م.ح = $\{\frac{٨}{٧}\}$

(٦) $(\frac{٣}{٥})^{٢س-١} = \frac{٢٧}{١٢٥}$

∴ $(\frac{٣}{٥})^{٢س-١} = (\frac{٣}{٥})^{٣}$

∴ $٢س - ١ = ٣$ ∴ $٢س = ٤$

∴ $س = ٢$ ∴ م.ح = $\{٢\}$

(٧) $٥^{س-١} \times ٧^{-(س-١)} = \frac{٢٥}{٤٩}$

∴ $٥^{س-١} \times ٧^{-(س-١)} = (\frac{٥}{٧})^{٢}$

∴ $(\frac{٥}{٧})^{س-١} = (\frac{٥}{٧})^{٢}$

∴ $س - ١ = ٢$ ∴ $س = ٣$

∴ م.ح = $\{٣\}$

(٨) ∵ $\frac{٩^{س+١} \times ٤^{س-١}}{٣٦^{س}} = \frac{٣^{٢س+٢} \times ٢^{٢س-٢}}{٣^{٢س} \times ٢^{٢س}}$

$= ٣^{٢س+٢-٢س} \times ٢^{٢س-٢-٢س}$

$= ٣^{٢} \times ٢^{-٢} = (\frac{٣}{٢})^{٢}$

∴ $(\frac{٣}{٢})^{٢} = (\frac{٣}{٢})^{س}$ ∴ $س = ٢$

∴ م.ح = $\{٢\}$

(٩) $\frac{١٢^{٣س-٢} \times ٩^{س+١}}{١٨^{٢س} \times ٤^{٢س-٢}} = ٩$

∴ $\frac{(٣ \times ٢^{٢})^{٣س-٢} \times (٣^{٢})^{س+١}}{(٢ \times ٣^{٢})^{٢س} \times (٢^{٢})^{٢س-٢}} = ٩$

∴ $\frac{٣^{٣س-٢} \times ٢^{٦س-٤} \times ٣^{٢س+٢}}{٢^{٢س} \times ٣^{٤س} \times ٢^{٤س-٤}} = ٩$

∴ $٣^{٣س-٢+٢س+٢-٤س}$

$\times ٢^{٦س-٤-٢س-٤س+٤} = ٩$

∴ $٣^{س} \times ٢^{٠} = ٣^{٢}$ ∴ $٣^{س} = ٣^{٢}$

∴ $س = ٢$ ∴ م.ح = $\{٢\}$

(١٠) $\frac{١}{٢٧}(\sqrt{٣})^{س+٢} = ١$

∴ $\frac{١}{(\sqrt{٣})^{٦}} \times (\sqrt{٣})^{س+٢} = ١$

∴ $(\sqrt{٣})^{س+٢} = (\sqrt{٣})^{٦}$

∴ $س + ٢ = ٦$ ∴ $س = ٤$

∴ م.ح = $\{٤\}$

(١١) $(\sqrt{٣})^{س^{٢}-٥س} = ١$ ∴ $س^{٢} - ٥س = ٠$

∴ $س(س - ٥) = ٠$ ∴ $س = ٠$ أ، $س = ٥$

∴ م.ح = $\{٠ ، ٥\}$

(١٢) ∵ $٥^{س^{٢}-٥س} = \frac{١٦}{١٠٠٠٠} = \frac{١}{٦٢٥}$

∴ $٥^{س^{٢}-٥س} = ٥^{-٤}$ ∴ $س^{٢} - ٥س = -٤$

∵ $س^{٢} - ٥س + ٤ = ٠$

∴ $(س - ١)(س - ٤) = ٠$

∴ $س = ١$ أ، $س = ٤$ ∴ م.ح = $\{١ ، ٤\}$

(١٣) $٥^{س^{٢}} = ٢٥^{س+٤}$ ∴ $٥^{س^{٢}} = ٥^{٢س+٨}$

∴ $س^{٢} = ٢س + ٨$ ∴ $س^{٢} - ٢س - ٨ = ٠$

∴ $(س + ٢)(س - ٤) = ٠$

∴ $س = -٢$ أ، $س = ٤$

∴ م.ح = $\{-٢ ، ٤\}$

(١٤) $٣^{س^{٢}-٤٢} = (\frac{١}{٣})^{س}$ ∴ $٣^{س^{٢}-٤٢} = ٣^{-س}$

∴ $س^{٢} - ٤٢ = -س$

∴ $س^{٢} + س - ٤٢ = ٠$

∴ $(س - ٦)(س + ٧) = ٠$

∴ $س - ٦ = ٠$ ومنها س = ٦

أ، $س + ٧ = ٠$ ومنها $س = -٧$

∴ م.ح = $\{٦ ، -٧\}$

(١٥) $(\sqrt{٧})^{|س+٢|} = ٤٩$

∴ $(\sqrt{٧})^{|س+٢|} = (\sqrt{٧})^{٤}$

∴ $|س + ٢| = ٤$ ∴ $س + ٢ = \pm ٤$

∴ إما $س + ٢ = ٤$ ومنها س = ٢

أ، $س + ٢ = -٤$ ومنها $س = -٦$

∴ م.ح = $\{٢ ، -٦\}$

(١٦) $٣^{٢س-٣} \times ٧^{٦-٤س} = ١$

∴ $٣^{٢س-٣} \times ٧^{-٢(٢س-٣)} = ١$

∴ $٣^{٢س-٣} \times \frac{١}{(٧^{٢})^{٢س-٣}} = ١$

∴ $٣^{٢س-٣} = (٤٩)^{٢س-٣}$

∴ $٢س - ٣ = ٠$ ∴ $س = \frac{٣}{٢}$

∴ م.ح = $\{\frac{٣}{٢}\}$

(١٧) $\sqrt{٩^{س} - ٢ \times ٣^{س+١} + ٩} = ٢٤$

∴ $\sqrt{٣^{٢س} - ٢ \times ٣ \times ٣^{س} + ٩} = ٢٤$

∴ $\sqrt{(٣^{س} - ٣)^{٢}} = ٢٤$ ∴ $|٣^{س} - ٣| = ٢٤$

∴ $٣^{س} = ٢٧$ ∴ $٣^{س} = ٣^{٣}$

∴ $س = ٣$ أ، $٣^{س} - ٣ = -٢٤$

∴ $٣^{س} = -٢١$ (مرفوض)

∴ م.ح = $\{٣\}$

٥

① $٥^{س+١}+٥^{س-١}=٢٦$

∴ $٥^{س}(٥+٥^{-١})=٢٦$

∴ $٥^{س}\times\frac{٢٦}{٥}=٢٦$

∴ $٥^{س}=٥$ ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {١}

② $٣^{س+٣}-٣^{س+٢}=١٦٢$

∴ $٣^{س}(٣^{٣}-٣^{٢})=١٦٢$

∴ $٣^{س}\times١٨=١٦٢$

∴ $٣^{س}=٩$ ∴ $٣^{س}=٣^{٢}$

∴ س = ٢ ∴ م.ح = {٢}

③ $٧^{٢-س}+٧^{-س}=٥٠$

∴ $٧^{-س}(٧^{٢}+١)=٥٠$

∴ $٧^{-س}\times٥٠=٥٠$ ∴ $٧^{-س}=١$

∴ س = ٠ ∴ م.ح = {٠}

④ $٥^{٢س}+٢٥=٢٦\times٥^{س}$

∴ $٥^{٢س}-٢٦\times٥^{س}+٢٥=٠$

∴ $(٥^{س}-٢٥)(٥^{س}-١)=٠$

∴ $٥^{س}=٢٥$ ومنها س = ٢

، $٥^{س}=١$ ومنها س = ٠

∴ م.ح = {٢ ، ٠}

⑤ $٢^{س}+٢^{٥-س}=١٢$

∴ $٢^{س}+\frac{٢^{٥}}{٢^{س}}=١٢$ بالضرب × $٢^{س}$

∴ $٢^{٢س}+٣٢=١٢\times٢^{س}$

∴ $٢^{٢س}-١٢\times٢^{س}+٣٢=٠$

∴ $(٢^{س}-٤)(٢^{س}-٨)=٠$

∴ $٢^{س}=٤$ ومنها س = ٢

أ، $٢^{س}=٨$ ومنها س = ٣

∴ م.ح = {٢ ، ٣}

⑥ $(\frac{١}{٢})^{س+١}+(\frac{١}{٢})^{س+٣}+(\frac{١}{٢})^{س+٥}=٨٤$

∴ $(\frac{١}{٢})^{س}(\frac{١}{٢}+(\frac{١}{٢})^{٣}+(\frac{١}{٢})^{٥})=٨٤$

∴ $(\frac{١}{٢})^{س}\times\frac{٢١}{٣٢}=٨٤$ ∴ $(\frac{١}{٢})^{س}=٨٤\times\frac{٣٢}{٢١}$

∴ $(\frac{١}{٢})^{س}=١٢٨$ ∴ $(\frac{١}{٢})^{س}=(\frac{١}{٢})^{-٧}$

∴ س = −٧ ∴ م.ح = {−٧}

⑦ $٢^{٢س+١}-٣٣(٢)^{س}+١٦=٠$

∴ $٢(٢)^{٢س}-٣٣(٢)^{س}+١٦=٠$

∴ $[٢(٢)^{س}-١][٢^{س}-١٦]=٠$

∴ إما $٢(٢)^{س}=١$ ∴ $٢^{س+١}=١$

∴ س + ١ = ٠ ∴ س = −١

أ، $٢^{س}=١٦$ ∴ $٢^{س}=٢^{٤}$ ∴ س = ٤

∴ مجموعة الحل = {−١ ، ٤}

⑧ $٥^{٢س-٢}-٦(٥)^{س-١}+٥=٠$

∴ $٥^{٢(س-١)}-٦(٥)^{س-١}+٥=٠$

∴ $(٥^{س-١}-١)(٥^{س-١}-٥)=٠$

∴ إما $٥^{س-١}=١$ ومنها س − ١ = ٠

∴ س = ١ أ، $٥^{س-١}=٥$

∴ س − ١ = ١ ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}

⑨ $٩^{س^{٢}-١}-٣٦(٣)^{س^{٢}-٢}+٣=٠$

∴ $(٣)^{٢(س^{٢}-١)}-\frac{٣٦}{٩}(٣)^{س^{٢}-١}+٣=٠$

∴ $(٣)^{٢(س^{٢}-١)}-٤(٣)^{س^{٢}-١}+٣=٠$

∴ $(٣^{س^{٢}-١}-١)(٣^{س^{٢}-١}-٣)=٠$

∴ إما $٣^{س^{٢}-١}=١$

∴ $س^{٢}-١=٠$ ∴ $س^{٢}=١$

∴ س = ±١ أ، $٣^{س^{٢}-١}=٣$

∴ $س^{٢}-١=١$ ∴ $س^{٢}=٢$

∴ $س=\pm\sqrt{٢}$

∴ مجموعة الحل = {١ ، −١ ، $\sqrt{٢}$ ، $-\sqrt{٢}$}

⑩ $١٠^{س}-٥^{س-١}\times٢^{س-٢}=٩٥٠$

∴ $١٠^{س}-\frac{٥^{س}}{٥}\times\frac{٢^{س}}{٤}=٩٥٠$

∴ $١٠^{س}-\frac{١}{٢٠}(١٠)^{س}=٩٥٠$

وبالضرب × ٢٠

∴ $٢٠(١٠)^{س}-(١٠)^{س}=٩٥٠\times٢٠$

∴ $١٩(١٠)^{س}=٩٥٠\times٢٠$

∴ $١٠^{س}=١٠٠٠$ ∴ $١٠^{س}=١٠^{٣}$

∴ س = ٣ ∴ مجموعة الحل = {٣}

٦

① $س^{\frac{٣}{٢}}=٢٧$ ∴ $س=(٣^{٣})^{\frac{٢}{٣}}=٣^{٢}=٩$

، $٣ص^{\frac{٢}{٣}}=٢٧$ ∴ $ص^{\frac{٢}{٣}}=٩$

∴ $ص=\pm(٣^{٢})^{\frac{٣}{٢}}=\pm٢٧$

∴ س + ص = ٩ + ٢٧ = ٣٦

أ، س + ص = ٩ − ٢٧ = −١٨

② ∵ $س^{\frac{٤}{٣}}=٣^{٤}$

∴ $س=\pm(٣^{٤})^{\frac{٣}{٤}}=\pm٢٧$

، ∵ $٩ص^{\frac{-٢}{٣}}=٨١$ ∴ $ص^{\frac{-٢}{٣}}=٩=٣^{٢}$

∴ $ص^{\frac{٢}{٣}}=٣^{-٢}$

∴ $ص=\pm(٣^{-٢})^{\frac{٣}{٢}}=\pm(٣)^{-٣}=\pm\frac{١}{٢٧}$

∴ $|٢\,س\,ص|=|٢\times(\pm٢٧)\times(\pm\frac{١}{٢٧})|=٢$

٧

① خطأ لأن $(-٩)^{\frac{٢}{٢}}\neq\sqrt{(-٩)^{٢}}$ لوجود عامل مشترك بين البسط والمقام للأس.

② خطأ لأن س = ± ٣ لأن الأس زوجي.

٨

① ∵ $٢^{٢س+٢ص}=٢^{٧}$

∴ ٢ س + ٢ ص = ٧ (١)

، ∵ $٥^{س-٢ص-٣}=١$

∴ س − ٢ ص = ٣ (٢)

بجمع (١) ، (٢):

∴ ٣ س = ١٠ ∴ $س=\frac{١٠}{٣}$

، بالتعويض في (١): ∴ $ص=\frac{١}{٦}$

∴ مجموعة الحل = $\{(\frac{١٠}{٣} ، \frac{١}{٦})\}$

② $٣^{س}\times٥^{ص}=٧٥$ (١) ، $٣^{ص}\times٥^{س}=٤٥$ (٢)

وبقسمة (١) على (٢):

∴ $(\frac{٣}{٥})^{س}\times(\frac{٥}{٣})^{ص}=\frac{٧٥}{٤٥}$

∴ $(\frac{٥}{٣})^{-س}\times(\frac{٥}{٣})^{ص}=\frac{٥}{٣}$

∴ $(\frac{٥}{٣})^{ص-س}=\frac{٥}{٣}$ ∴ ص − س = ١ (٣)

وبضرب (١) × (٢):

∴ $(١٥)^{س}\times(١٥)^{ص}=٧٥\times٤٥$

∴ $(١٥)^{س+ص}=١٥^{٣}$ ∴ س + ص = ٣ (٤)

بجمع (٣) ، (٤) نجد أن: ٢ ص = ٤

∴ ص = ٢ وبالتعويض في (٣): ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٢)}

③ $٣^{س}\times٣^{ص}=٣^{٣}$ ∴ $٣^{س+ص}=٣^{٣}$

∴ س + ص = ٣ ∴ ص = ٣ − س

، ∵ $٣^{س}+٣^{ص}=١٢$

∴ $٣^{س}+٣^{٣-س}=١٢$ وبالضرب × $٣^{س}$

∴ $٣^{٢س}+٢٧=١٢(٣)^{س}$

∴ $٣^{٢س}-١٢(٣)^{س}+٢٧=٠$

∴ $(٣^{س}-٣)(٣^{س}-٩)=٠$

∴ إما $٣^{س}=٣$ ∴ س = ١ ومنها ص = ٢

أ، $٣^{س}=٩$ ∴ $٣^{س}=٣^{٢}$

∴ س = ٢ ومنها ص = ١

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ١)}

٩

$\because 9^{\text{س}+1} - (3^{\text{س}+3} + 3^{\text{س}}) + 3 = 0$

$\therefore 9^{\text{س}} \times 9 - 3^{\text{س}}(3^3 + 1) + 3 = 0$

$\therefore 9 \times 3^{2\text{س}} - 28 \times 3^{\text{س}} + 3 = 0$

$\therefore (9 \times 3^{\text{س}} - 1)(3^{\text{س}} - 3) = 0$

$\therefore 9 \times 3^{\text{س}} - 1 = 0$ ومنها $3^{\text{س}} = \frac{1}{9}$

$\therefore 3^{\text{س}} = 3^{-2}$ $\therefore \text{س} = -2$

أو $3^{\text{س}} - 3 = 0$ ومنها $3^{\text{س}} = 3$ $\therefore \text{س} = 1$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{-2 ، 1\}$

١٠

$\because \text{س}^{\text{ن}+1} = \text{ص}^{\text{ن}-1}$

$\therefore (\text{س}^{\text{ن}+1})^3 = (\text{ص}^{\text{ن}-1})^3$

$\therefore (\text{س}^3)^{\text{ن}+1} = \text{ص}^{3\text{ن}-3}$

، $\because \text{س}^3 = \text{ص}^2$ $\therefore (\text{ص}^2)^{\text{ن}+1} = \text{ص}^{3\text{ن}-3}$

$\therefore \text{ص}^{2\text{ن}+2} = \text{ص}^{3\text{ن}-3}$

$\therefore 2\text{ن} + 2 = 3\text{ن} - 3$ $\therefore \text{ن} = 5$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (ب)	② (د)	③ (جـ)	④ (جـ)
⑤ (جـ)	⑥ (د)	⑦ (د)	

إرشادات لحل رقم ١

① $\because \sqrt{\text{س}^2} = |\text{س}| = -\text{س}$ لأن (س < ٠)

، $\sqrt[3]{\text{س}^3} = \text{س}$

، $\sqrt{\text{س}^2 - 2\text{س} + 1} = \sqrt{(\text{س} - 1)^2}$

$= |\text{س} - 1| = 1 - \text{س}$

(لأن س < ٠)

$\therefore \sqrt{\text{س}^2} - \sqrt[3]{\text{س}^3} - \sqrt{\text{س}^2 - 2\text{س} + 1} + 1$

$= -\text{س} - \text{س} - (1 - \text{س}) + 1 = -\text{س}$

② $\because \text{أ} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{7}}}$ $\therefore \text{أ}^4 = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{7}}$

$\therefore (\text{أ}^4)^6 = \frac{4}{343}$ عدد نسبى.

$\therefore \text{أ}^{24}$ عدد نسبى.

③ $\because \text{س}^{\frac{2}{3}} = \text{س}^{\frac{3}{2}}$ $\therefore \text{س}^{\frac{2}{3}} - \text{س}^{\frac{3}{2}} = 0$

$\therefore \text{س}^{\frac{2}{3}}\left(1 - \text{س}^{\frac{5}{6}}\right) = 0$

$\therefore \text{س}^{\frac{2}{3}} = 0$

ومنها س = ٠ أو $1 - \text{س}^{\frac{5}{6}} = 0$

ومنها $\text{س}^{\frac{5}{6}} = 1$ $\therefore \text{س} = 1$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{0 ، 1\}$

④ $\sqrt[5]{\frac{2}{27}} = \sqrt[5]{\frac{2 \times 3 \times 3}{27 \times 3 \times 3}} = \sqrt[5]{\frac{18}{243}} = \frac{\sqrt[5]{18}}{3}$

⑤ $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}^{\text{م}}} = \left(\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}\right)^{\text{م}}$ صحيحة لكل $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} \in ح$

، $\text{ن} \in \text{ص}^+ - \{1\}$

⑥ $\because \text{س}^{\frac{2}{3}} = \text{أ}$ $\therefore \text{س} = \text{أ}^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{\text{أ}})^3$

$\therefore$ لابد وأن تكون أ ≥ ٠

أى أن : $\text{أ} \in ح^+ \cup \{0\}$

⑦ $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} \times \sqrt[\text{م}]{\text{أ}} = \text{أ}^{\frac{1}{\text{ن}}} \times \text{أ}^{\frac{1}{\text{م}}} = \text{أ}^{\frac{1}{\text{ن}} + \frac{1}{\text{م}}}$

$= \text{أ}^{\frac{\text{م}+\text{ن}}{\text{م}\text{ن}}}$

$= \sqrt[\text{م}\text{ن}]{\text{أ}^{\text{م}+\text{ن}}}$

٢

① $\frac{5^{\text{س}-1} \times \text{س}^{2-\text{س}}}{5} = 1$

$\therefore 5^{\text{س}-2} \times \text{س}^{2-\text{س}} = 1$

$\therefore 5^{\text{س}-2} = \text{س}^{\text{س}-2}$

$\therefore$ س = ٥ أو س = ٢

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{5 ، 2\}$

② $\because (\text{س} - 3)^{\text{س}-5} = 1$

$\therefore$ إما س − ٥ = ٠ ومنها س = ٥

أو س − ٣ = ١ ومنها س = ٤

أو س − ٣ = −١ (إذا كان الأس زوجيًا)

ومنها س = ٢ (مرفوض) لأن الأس (٢ − ٥) فردى.

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{5 ، 4\}$

③ $\because (\text{س} - 3)^{(\text{س}-6)} = 1$

$\therefore$ إما س − ٦ = ٠ ومنها س = ٦

أو س − ٣ = ١ ومنها س = ٤

أو س − ٣ = −١ (إذا كان الأس زوجيًا)

ومنها س = ٢ (يتحقق) (لأن الأس (٢ − ٦) زوجى)

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{6 ، 4 ، 2\}$

إجابات تمارين 8

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (د)	③ (أ)	④ (ب)
⑤ (جـ)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (أ)	⑩ (جـ)	⑪ (أ)	⑫ (جـ)
⑬ (ب)	⑭ (جـ)	⑮ (جـ)	⑯ (أ)
⑰ (د)	⑱ (جـ)	⑲ (د)	⑳ (جـ)
㉑ (جـ)	㉒ (أ)	㉓ (أ)	㉔ (ب)
㉕ (ب)	㉖ (جـ)	㉗ (جـ)	㉘ (ب)
㉙ (د)	㉚ (ب)	㉛ (ب)	㉜ (جـ)
㉝ (د)	㉞ (جـ)	㉟ (أ)	㊱ (د)
㊲ (ب)	㊳ (ب)	㊴ (ب)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

① ليست أسية

② دالة أسية ، أساسها = ٥ ، أسها = س

③ ليست أسية ④ ليست أسية

⑤ دالة أسية ، أساسها = $\frac{2}{3}$ ، أسها = س − ١

⑥ ليست أسية

٢

$\frac{\text{د}(\text{س}+4) - \text{د}(\text{س}+3)}{\text{د}(\text{س}+5) - \text{د}(\text{س}+4)} = \frac{5^{\text{س}+4} - 5^{\text{س}+3}}{5^{\text{س}+5} - 5^{\text{س}+4}}$

$= \frac{5^{\text{س}+3}(5 - 1)}{5^{\text{س}+4}(5 - 1)} = \frac{1}{5}$

٣

$\because \text{د}(2\text{س} - 1) + \text{د}(\text{س} - 2) = 50$

$\therefore 7^{(2\text{س}-1)+1} + 7^{(\text{س}-2)+1} = 50$

$\therefore 7^{2\text{س}} + 7^{\text{س}-1} = 50$

$\therefore 7^{2\text{س}} + 7^{-1} \times 7^{\text{س}} = 50$

$\therefore 7^{2\text{س}} + \frac{1}{7} \times 7^{\text{س}} = 50$ (بالضرب × ٧)

$\therefore 7 \times 7^{2\text{س}} + 7^{\text{س}} - 350 = 0$

$\therefore (7 \times 7^{\text{س}} + 50)(7^{\text{س}} - 7) = 0$

$\therefore 7 \times 7^{\text{س}} + 50 = 0$ ومنها $7^{\text{س}} = \frac{-50}{7}$ (مرفوض)

أو $7^{\text{س}} - 7 = 0$ $\therefore 7^{\text{س}} = 7$ $\therefore \text{س} = 1$

٤

$\because \text{د}_1(2\text{س} - 1) + \text{د}_2(\text{س} + 1) = 756$

$\therefore 3^{2\text{س}-1} + 9^{\text{س}+1} = 756$

$\therefore 3^{2\text{س}-1} + 3^{2\text{س}+2} = 756$

$\therefore 3^{2\text{س}}(3^{-1} + 3^2) = 756$

$\therefore ٣^{٢س} \times \frac{٢٨}{٣} = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢س} = ٧٥٦ \times \frac{٣}{٢٨}$

$\therefore ٣^{٢س} = ٨١ \quad \therefore ٣^{٢س} = ٣^{٤}$

$\therefore ٢س = ٤ \quad \therefore س = ٢$

٥

الطرف الأيمن $= \frac{ص^{س+١} + ص^{س+٢}}{ص^{س+١} + ص^{س}} = \frac{ص^{س+١}(١ + ص)}{ص^{س}(ص + ١)} = ص$

٦

الطرف الأيمن $= \frac{٣^{٢س+٢} + ٣^{٢س-١}}{٥ \times ٣^{٢س} - ٧ \times ٣^{٢س-١}} = \frac{٣^{٢س-١}(٣^{٣} + ١)}{٣^{٢س-١}(٥ \times ٣ - ٧)} = \frac{٢٨}{٨} = \frac{٧}{٢}$

٧

الطرف الأيمن $= \frac{٣^{٢(س+١)-١} \times ٣^{٢(س+٢)-١}}{٣^{٢(س+٣)-١}}$

$= \frac{٣^{٢س+١} \times ٣^{٢س+٣}}{٣^{٢س+٥}}$

$= ٣^{٢س+١+٢س+٣-٢س-٥-٨}$

$= ٣^{٢س-١} = د(س)$

٨

الطرف الأيمن $= \frac{٢^{س+١}}{٢^{س-١}} + \frac{٢^{س-١}}{٢^{س+١}} = ٢^{٢} + \frac{١}{٢^{٢}} = \frac{١٧}{٤}$

٩

$\because ٧^{٢س-١} + ٧^{٢س+١} = \frac{٥٠}{٤٩}$

$\therefore ٧^{٢س-١}(١ + ٤٩) = \frac{٥٠}{٤٩}$

$\therefore ٧^{٢س-١} = ٧^{-٢} \quad \therefore ٢س - ١ = -٢$

$\therefore ٢س = -١ \quad \therefore س = -\frac{١}{٢}$

١٠

$\because \frac{٢^{س+١} - ٢^{س}}{٢^{س} - ٢^{س-١}} = ٢^{س-٢}$

$\therefore \frac{٢^{س}(٢ - ١)}{٢^{س-١}(٢ - ١)} = ٢^{س-٢}$

$\therefore ٢ = ٢^{س-٢}$

$\therefore س - ٢ = ١ \quad \therefore س = ٣$

١١

$\because \frac{٣^{-٢س-١}}{٣^{-س+١}} = ٧٢٩$

$\therefore ٣^{-٢س-١+س-١} = ٣^{٦}$

$\therefore -س - ٢ = ٦ \quad \therefore س = -٨$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{-٨\}$

١٢

$\because ٣^{س+١} + ٣^{٢-س} = ٣٠$ وبالضرب $\times ٣^{س-١}$

$\therefore ٣^{٢س} + ٣^{٢} - ١٠ \times ٣ \times ٣^{س-١} = ٠$

$\therefore ٣^{٢س} - ١٠ \times ٣^{س} + ٩ = ٠$

$\therefore (٣^{س} - ١)(٣^{س} - ٩) = ٠$

$\therefore ٣^{س} = ١$ ومنها س = ٠

أ، $٣^{س} = ٩$ ومنها س = ٢

١٣

$\because ٢^{٢س} - ٦ \times ٢^{س} + ٨ = ٠$

$\therefore (٢^{س} - ٢)(٢^{س} - ٤) = ٠$

$\therefore ٢^{س} = ٢$ ومنها س = ١ أ، $٢^{س} = ٤$ ومنها س = ٢

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{١ ، ٢\}$

١٤

$\because ٣^{س} + ٣^{\frac{س}{٢}} = ١٢$ وبوضع $٣^{\frac{س}{٢}} = ص$

$\therefore ص^{٢} + ص - ١٢ = ٠$

$\therefore (ص + ٤)(ص - ٣) = ٠$

$\therefore ص = -٤$ (مرفوض) أ، ص = ٣ ومنها $٣^{\frac{س}{٢}} = ٣$

$\therefore \frac{س}{٢} = ١ \quad \therefore س = ٢$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{٢\}$

١٥

$\because د(س - ٢) = ٣^{س} \quad \therefore د(س) = ٣^{س+٢}$

، $\because د(٣س + ١) - د(٣س - ١) = ٢٤$

$\therefore ٣^{٣س+٣} - ٣^{٣س+١} = ٢٤$

$\therefore ٣^{٣س+١}(٣^{٢} - ١) = ٢٤$

$\therefore ٣^{٣س+١} \times ٨ = ٢٤ \quad \therefore ٣^{٣س+١} = ٣$

$\therefore ٣س + ١ = ١ \quad \therefore ٣س =$ صفر

$\therefore س =$ صفر

١٦

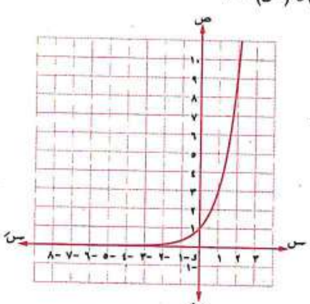
① شكل (٧) ② شكل (٢) ③ شكل (٥)

④ شكل (١) ⑤ شكل (٦) ⑥ شكل (٣)

⑦ شكل (٤) ⑧ شكل (٨)

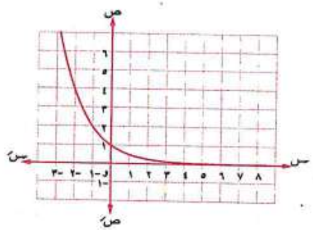
١٧

① $د(س) = ٣^{س}$



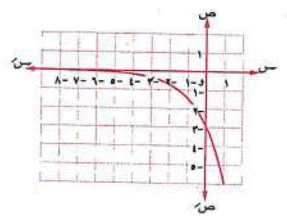
المجال = ح ، المدى = $ح^{+}$ ، الدالة تزايدية على مجالها.

② $د(س) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$



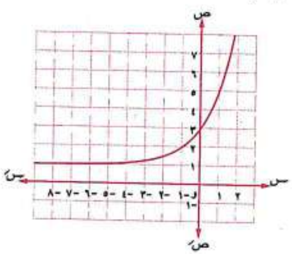
المجال = ح ، المدى = $ح^{+}$ ، الدالة تناقصية على مجالها.

③ $د(س) = -٣(٢)^{س}$



المجال = ح ، المدى = $ح^{-}$ ، الدالة تناقصية على مجالها

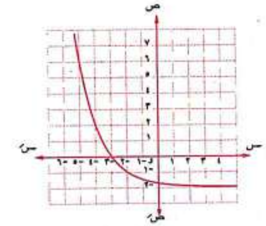
④ $د(س) = ٢^{س+١} + ١$



المجال = ح ، المدى =]١ ، ∞[

، الدالة تزايدية على مجالها.

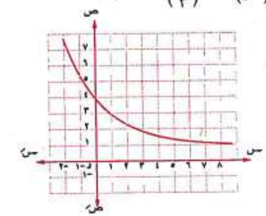
⑤ د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س+٢} - ٢$



المجال = ح ، المدى =]−٢ ، ∞[

، الدالة تناقصية على مجالها.

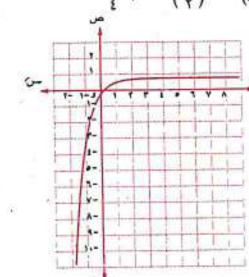
⑥ د (س) = $٢\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س-١} + ١$



المجال = ح ، المدى =]١ ، ∞[

، الدالة تناقصية على مجالها.

⑦ د (س) = $-\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢س} + \frac{٣}{٤}$



المجال = ح ، المدى =]−∞ ، $\frac{٣}{٤}$[

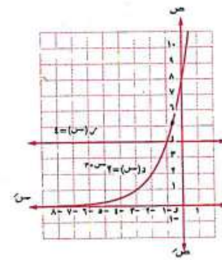
، الدالة تزايدية على مجالها.

١٨

① من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٢^{س+٣}$ ، ر : ر (س) = ٤

∴ مجموعة الحل = {−١}



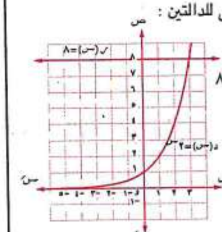
② من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٢^{س}$

، ر : ر (س) = ٨

∴ مجموعة

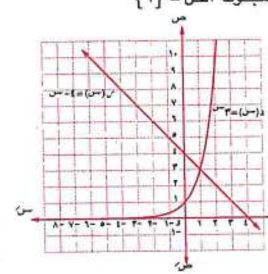
الحل = {٣}



③ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٣^{س}$ ، ر : ر (س) = ٤ − س

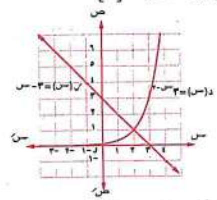
∴ مجموعة الحل = {١}



④ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٣^{س-٢}$ ، ر : ر (س) = ٣ − س

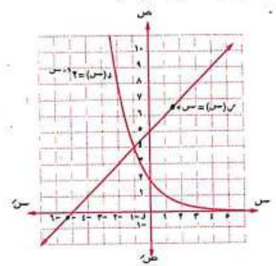
∴ مجموعة الحل = {٢}



⑤ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٢^{١-س}$ ، ر : ر (س) = س + ٥

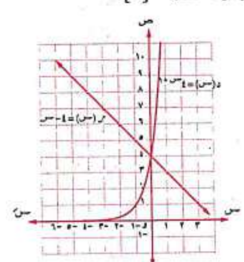
∴ مجموعة الحل = {−١}



⑥ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٤^{س+١}$ ، ر : ر (س) = ٤ − س

∴ مجموعة الحل = {٠}

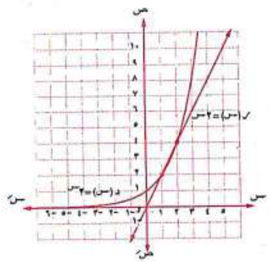


⑦ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٢^{س}$

، ر : ر (س) = ٢ س

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}



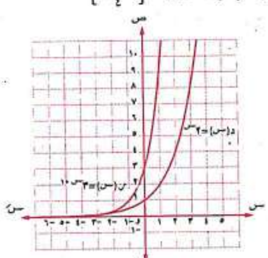
⑧ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٢^{س}$

، ر : ر (س) = $٣^{س+١}$

∴ س = $\frac{-٣}{٤}$ ٢

∴ مجموعة الحل = {$-\frac{٣}{٤}$ ٢}



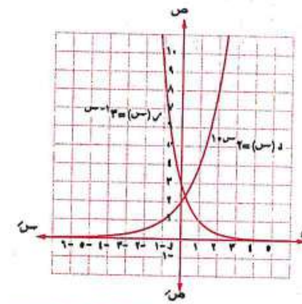
⑨ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٢^{س+١}$

، ر : ر (س) = $٢^{١-س}$

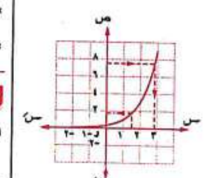
∴ س = $\frac{١}{٤}$

∴ مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٤}\}$



١٩

س	٢-	١-	٠	١	٢	٣
د (س)	$\frac{١}{٢٧}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩

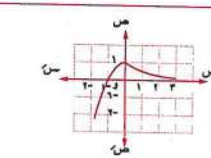


ومن الرسم :

① د $(\frac{٣}{٢}) \simeq ١,٧$

② عندما $٣^{س-١} = ٧\frac{١}{٢}$ فإن : س ≃ ٢,٨

٢٠



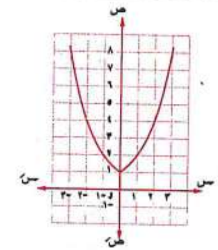
ومن الرسم :

* المجال = ح ، المدى =]− ∞ ، ١]
* الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠[
، وتناقصية فى]٠ ، ∞[

٢١

د (س) = $٢^{س}$ ، س ≥ ٠ | د (س) = $٢^{-س}$ ، س < ٠

س	٠	١	٢	٣	⓪	١-	٢-	٣-
د (س)	١	٢	٤	٨	①	٢	٤	٨

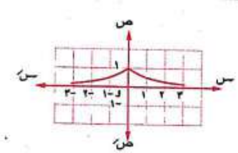


* المدى = [١ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[، وتزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات.

٢٢

د (س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ عندما س ≥ ٠ | د (س) = $(\frac{١}{٢})^{-س}$ عندما س < ٠

س	٠	١	٢	٣	⓪	١-	٢-	٣-
د (س)	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$	①	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$



* المدى =]٠ ، ١]
* الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠[، وتناقصية فى]٠ ، ∞[
* الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات.

٢٣

∵ $٥^{١+جا س} + ٥^{-١+جا س} = ٢٦$

∴ $٥^{جا س}(٥ + ٥^{-١}) = ٢٦$

∴ $٥^{جا س} = ٥$ ∴ جا س = ١

∴ س = $\frac{\pi}{٢} + ٢ ن \pi$ حيث ن ∈ ص

٢٤

المقدار = $\frac{١}{٢^{س}+١} + \frac{١}{٢^{-س}+١} \times \frac{٢^{س}}{٢^{س}}$

= $\frac{١}{٢^{س}+١} + \frac{٢^{س}}{١+٢^{س}} = \frac{١+٢^{س}}{١+٢^{س}} = ١$

∴ قيمة المقدار = ١ مهما كانت قيمة س

٢٥

∵ دالة الرصيد هى د (ن) = أ $(١ + ر)^{ن}$

∴ الرصيد بعد ١٠ سنوات = ٨٠٠٠٠ $(١ + \frac{١٠,٥}{١٠٠})^{١٠}$

= ٨٠٠٠٠ $(١,١٠٥)^{١٠}$

≃ ٢١٧١٢٦ جنيهًا.

٢٦

① عدد السكان بعد مرور ن سنة من عام ٢٠٠٠

= أ $(١ + ر)^{ن}$

= ٤٣,٣ $(١ + \frac{١,٥}{١٠٠})^{ن}$ = ٤٣,٣ $(١,٠١٥)^{ن}$

② عام ٢٠٢٠ يكون عدد السنين = ٢٠٢٠ − ٢٠٠٠

= ٢٠ سنة.

∴ عدد السكان = ٤٣,٣ $(١,٠١٥)^{٢٠}$

≃ ٥٨,٣ مليون نسمة.

٢٧

أ = ٣٦٤٠٠ ، ر = $\frac{٤}{١٠٠}$ = ٠,٠٤ ، ن = عدد المباريات

عدد الحضور (ص) = أ $(١ − ر)^{ن}$

= ٣٦٤٠٠ $(١ − ٠,٠٤)^{ن}$

= ٣٦٤٠٠ $(٠,٩٦)^{ن}$

، فى المباراة العاشرة :

يكون عدد الحضور (ص) = ٣٦٤٠٠ $(٠,٩٦)^{١٠}$

≃ ٢٤٢٠٠ مُشجع

٢٨

أ = ٨٠ ، ر = $\frac{١٨}{١٠٠}$ = ٠,١٨ ، ن = ٤ سنوات.

∴ عدد الأبقار = أ $(١ + ر)^{ن}$

، عدد الأبقار بعد ٤ سنوات = ٨٠ $(١ + ٠,١٨)^{٤}$

≃ ١٥٥ بقرة.

٢٩

أ = ٤,٦ ، ر = $\frac{٤}{١٠٠}$ = ٠,٠٤

① دالة النمو المستقبلى بعد ن سنة = أ $(١ + ر)^{ن}$

= ٤,٦ $(١ + ٠,٠٤)^{ن}$

= ٤,٦ $(١,٠٤)^{ن}$ مليون نسمة.

② بعد خمس سنوات :

عدد السكان = ٤,٦ $(١,٠٤)^{٥}$ ≃ ٥,٦ مليون نسمة.

٣٠

أ = ٢٥٤ ، ر = $\frac{٥}{١٠٠}$ = ٠,٠٥

، الفترة الزمنية ن = ٩ سنوات.

∴ دالة التضاؤل الأسى هى :

د (ن) = أ $(١ − ر)^{ن}$ = ٢٥٤ $(١ − ٠,٠٥)^{ن}$

= ٢٥٤ $(٠,٩٥)^{ن}$

∴ إنتاج المنجم فى السنة التاسعة = ٢٥٤ $(٠,٩٥)^{٩}$

≃ ١٦٠ كجم.

٣١

أ = ٢٠٠٠ ، ر = $\frac{٧}{١٠٠}$ = ٠,٠٧

، الفترة الزمنية ن = ١١ ساعة.

∴ دالة النمو الأسى هى د (ن) = أ $(١ + ر)^{ن}$

= $٢٠٠٠ (١ + ٠,٠٧)^{ن}$

= $٢٠٠٠ (١,٠٧)^{ن}$

∴ كمية البكتريا بعد ١١ ساعة = $٢٠٠٠ (١,٠٧)^{١١}$

≃ ٤٢١٠ بكتريا.

٣٢

باستخدام العلاقة جـ = أ $\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$

① العائد السنوى. ∴ س = ١

جـ = $٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٨)^{١٠}$ = ١٠٧٩٤,٦٢ جنيه.

② العائد الربع سنوى. ∴ س = ٤

جـ = $٥٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٨}{٤}\right)^{١٠ \times ٤}$ = ١١٠٤٠,٢ جنيه.

③ العائد الشهرى. ∴ س = ١٢

جـ = $٥٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٨}{١٢}\right)^{١٠ \times ١٢}$ = ١١٠٩٨,٢ جنيه.

ثالثا **مسائل تقيس مهارات التفكير**

① (د) ② (جـ) ③ (د) ④ (جـ)

⑤ (د) ⑥ (أ) ⑦ (د) ⑧ (أ)

إرشادات الحل :

① ∵ الدالة متناقصة إذا كان : ٠ < ٢أ < ١

∴ ٠ < أ < $\frac{١}{٢}$ ∴ أ ∈]٠ ، $\frac{١}{٢}$[

② ∵ الدالة تزايدية ∴ $\frac{أ}{٢}$ > ١ ∴ أ > ٢

③ ∵ د (س) = $(أ - ٢)^{س}$ دالة اسية.

∴ أ − ٢ > ٠ ، أ − ٢ ≠ ١

∴ أ > ٢ ، أ ≠ ٣

∴ أ ∈]٢ ، ∞[− {٣}

④ المنحنى يقطع محور السينات عندما ص = ٠.

وبالتعويض عن د (س) = ٠ فى الدوال المعطاة

لا نحصل على أى قيمة للمتغير س الا فى الحالة رقم (جـ)

$٣^{س} - ١ = ٠$ ∴ $٣^{س} = ١$ ∴ س = ٠

أى المنحنى يقطع محور السينات فى النقطة (٠ ، ٠)

⑤ بحل المعادلتين ص = ٨ ، ص = $٢^{س}$ معًا

∴ س = ٣

وبحل المعادلتين ص = ٨ ، ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ معًا

∴ س = −٣

∴ أ (٣ ، ٨) ، ب (−٣ ، ٨)

∴ طول $\overline{أب}$ = ٦ وحدات.

⑥ نعلم أن انعكاس منحنى الدالة د (س) = $٣^{س}$

حول محور الصادات يعطى منحنى الدالة

د (س) = $٣^{-س}$ ثم ازاحته ٥ وحدات

لأعلى يعطى المنحنى د (س) = ٥ + $٣^{-س}$

⑦ ∵ د (س) = $\frac{٩^{س}}{٩^{س} + ٣}$

∴ د (١ − س) = $\frac{٩^{١-س}}{٩^{١-س} + ٣}$

بالضرب بسطًا ومقامًا فى $٩^{س}$

∴ د (١ − س) = $\frac{٩}{٩ + ٣ \times ٩^{س}}$

= $\frac{٩}{٣(٣ + ٩^{س})} = \frac{٣}{٣ + ٩^{س}}$

∴ د (س) + د (١ − س)

= $\frac{٩^{س}}{٩^{س} + ٣} + \frac{٣}{٣ + ٩^{س}} = \frac{٩^{س} + ٣}{٩^{س} + ٣} = ١$

⑧ ∵ د (س) = $\frac{٤^{س}}{٤^{س} + ٢}$

∴ د (١ − س) = $\frac{٤^{١-س}}{٤^{١-س} + ٢}$

بالضرب بسطًا ومقامًا فى $٤^{س}$

∴ د (١ − س) = $\frac{٤}{٤ + ٢ \times ٤^{س}}$

= $\frac{٤}{٢(٢ + ٤^{س})} = \frac{٢}{٢ + ٤^{س}}$

∴ د (س) + د (١ − س)

= $\frac{٤^{س}}{٤^{س} + ٢} + \frac{٢}{٢ + ٤^{س}} = \frac{٤^{س} + ٢}{٤^{س} + ٢} = ١$

∴ د $\left(\frac{١}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{١٠}{١١}\right)$ = ١

، د $\left(\frac{٢}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٩}{١١}\right)$ = ١

، د $\left(\frac{٣}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٨}{١١}\right)$ = ١

، د $\left(\frac{٤}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٧}{١١}\right)$ = ١

، د $\left(\frac{٥}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٦}{١١}\right)$ = ١

∴ المقدار المطلوب = ٥

إجابات تمارين 9

أولا **أسئلة الاختيار من متعدد**

① (جـ) ② (د) ③ (د) ④ (جـ)

⑤ (جـ) ⑥ (ب) ⑦ (جـ) ⑧ (ب)

⑨ (ب) ⑩ (جـ) ⑪ (ب) ⑫ (ب)

⑬ (ب) ⑭ (ب) ⑮ (جـ) ⑯ (جـ)

⑰ (جـ) ⑱ (ب) ⑲ (ب) ⑳ (جـ)

㉑ (د) ㉒ (جـ) ㉓ (أ) ㉔ (أ)

㉕ (ب) ㉖ (جـ) ㉗ (أ) ㉘ (أ)

㉙ (أ)

ثانيا **الأسئلة المقالية**

1

①

س	٧	٤	١	−١
$د^{-١}$ (س)	−٢	١	٢	٥

② $د^{-١}$ = {(٢ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ٣)}

③ بوضع س = ٢ ص + ٥

∴ ص = $\frac{س - ٥}{٢}$

∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{س - ٥}{٢}$

④ بوضع س = $\frac{١}{٢}$ ص + ٤

∴ ص = ٢ س − ٨

∴ $د^{-١}$ (س) = ٢ س − ٨

⑤ بوضع س = ٥ + $\frac{٤}{ص}$ ∴ $\frac{٤}{ص}$ = س − ٥

∴ ص = $\frac{٤}{س - ٥}$ ∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{٤}{س - ٥}$

⑥ بوضع س = ٨ $ص^{٣}$ − ١

∴ ٨ $ص^{٣}$ = س + ١

∴ $ص^{٣}$ = $\frac{١}{٨}$ (س + ١)

∴ ص = $\frac{١}{٢} \sqrt[٣]{س + ١}$

∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٢} \sqrt[٣]{س + ١}$

⑦ بوضع س = $\sqrt{ص + ١}$

∴ ص + ١ = $س^{٢}$ ∴ ص = $س^{٢}$ − ١

∴ $د^{-١}$ (س) = $س^{٢}$ − ١

(٨) بوضع $س = \sqrt[3]{٤ - ص}$ ∴ $٤ - ص = س^{٣}$

∴ $ص = ٤ - س^{٣}$

∴ $د^{-١}(س) = ٤ - س^{٣}$

(٩) ∵ $ص = ٢ + \sqrt{٣ - س}$ حيث $س \le ٣$ ، $ص \ge ٢$

وبتبديل المتغيرين

∴ $س = ٢ + \sqrt{٣ - ص}$

حيث $ص \le ٣$ ، $س \ge ٢$

∴ $\sqrt{٣ - ص} = س - ٢$

∴ $٣ - ص = (س - ٢)^{٢}$

∴ $ص = ٣ - (س - ٢)^{٢}$

∴ $د^{-١}(س) = ٣ - (س - ٢)^{٢}$ لكل $س \ge ٢$

(١٠) ∵ $ص = س^{٢}$ حيث $س \ge ٠$ ، $ص \ge ٠$

وبتبديل المتغيرين

∴ $س = ص^{٢}$ حيث $ص \ge ٠$ ، $س \ge ٠$

∴ $ص = \sqrt{س}$

∴ $د^{-١}(س) = \sqrt{س}$ لكل $س \ge ٠$

(١١) ∵ $ص = (س + ٢)^{٢}$ حيث $س \le -٢$ ، $ص \ge ٠$

وبتبديل المتغيرين

∴ $س = (ص + ٢)^{٢}$ حيث $ص \le -٢$ ، $س \ge ٠$

∴ $ص + ٢ = -\sqrt{س}$

∴ $ص = -\sqrt{س} - ٢$

∴ $د^{-١}(س) = -\sqrt{س} - ٢$ لكل $س \ge ٠$

(١٢) ∵ $ص = (س - ١)^{٢} + ٢$ حيث $س \ge ١$

، $ص \ge ٢$ وبتبديل المتغيرين

∴ $س = (ص - ١)^{٢} + ٢$ حيث $ص \ge ١$ ، $س \ge ٢$

∴ $(ص - ١)^{٢} = س - ٢$

∴ $ص - ١ = \sqrt{س - ٢}$

∴ $ص = \sqrt{س - ٢} + ١$

∴ $د^{-١}(س) = \sqrt{س - ٢} + ١$ لكل $س \ge ٢$

(١٣) ∵ $ص = س^{٢} + ٨ س + ٧ = (س + ٤)^{٢} - ٩$

حيث $س \ge -٤$ ، $ص \ge -٩$ وبتبديل المتغيرين

∴ $س = ص^{٢} + ٨ ص + ٧$ حيث $ص \ge -٤$

، $س \ge -٩$

∴ $س = ص^{٢} + ٨ ص + ١٦ - ٩$

∴ $س = (ص + ٤)^{٢} - ٩$

∴ $(ص + ٤)^{٢} = س + ٩$

∴ $ص + ٤ = \sqrt{س + ٩}$

∴ $ص = \sqrt{س + ٩} - ٤$

∴ $د^{-١}(س) = \sqrt{س + ٩} - ٤$ لكل $س \ge -٩$

(١٤) ∵ $ص = \sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث $-٣ \le س \le ٠$

، $٠ \le ص \le ٣$ وبتبديل المتغيرين

∴ $س = \sqrt{٩ - ص^{٢}}$ ، $-٣ \le ص \le ٠$

، $٠ \le س \le ٣$

∴ $س^{٢} = ٩ - ص^{٢}$

∴ $ص^{٢} = ٩ - س^{٢}$

∴ $ص = -\sqrt{٩ - س^{٢}}$

∴ $د^{-١}(س) = -\sqrt{٩ - س^{٢}}$

لكل $٠ \le س \le ٣$

(١٥) ∵ $ص = \sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث $٠ \le س \le ٣$

، $٠ \le ص \le ٣$ وبتبديل المتغيرين

∴ $س = \sqrt{٩ - ص^{٢}}$ ، $٠ \le ص \le ٣$

، $٠ \le س \le ٣$

∴ $س^{٢} = ٩ - ص^{٢}$

∴ $ص^{٢} = ٩ - س^{٢}$

∴ $ص = \sqrt{٩ - س^{٢}}$

∴ $د^{-١}(س) = \sqrt{٩ - س^{٢}}$ لكل $٠ \le س \le ٣$

(١٦) ∵ $ص = \frac{١}{س^{٢} + ٢}$ ، $س \in ع^{+}$

، $ص \in]٠ ، \frac{١}{٢}[$

وبتبديل المتغيرين

∴ $س = \frac{١}{ص^{٢} + ٢}$ ، $ص \in ع^{+}$

، $س \in]٠ ، \frac{١}{٢}[$

∴ $ص^{٢} + ٢ = \frac{١}{س}$ ∴ $ص^{٢} = \frac{١}{س} - ٢$

∴ $ص = \sqrt{\frac{١}{س} - ٢}$

∴ $د^{-١}(س) = \sqrt{\frac{١}{س} - ٢}$ ، $س \in]٠ ، \frac{١}{٢}[$

٢

(١) لها دالة عكسية (٢) ليس لها دالة عكسية

(٣) ليس لها دالة عكسية (٤) ليس لها دالة عكسية

٣

(١) ∵ $(د \circ ر)(س) = د\,(ر(س))$

$= د\left(\frac{س + ٣}{٢}\right) = ٢\left(\frac{س + ٣}{٢}\right) - ٣$

$= س + ٣ - ٣ = س$

، $(ر \circ د)(س) = ر\,(د(س))$

$= ر(٢ س - ٣) = \frac{(٢ س - ٣) + ٣}{٢} = س$

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

(٢) ∵ $(د \circ ر)(س) = د\,(ر(س))$

$= د\left(\sqrt{س - ٤}\right) = \left(\sqrt{س - ٤}\right)^{٢} + ٤$

$= س - ٤ + ٤ = س$

، ∵ $(ر \circ د)(س) = ر\,(د(س))$

$= ر(س^{٢} + ٤) = \sqrt{س^{٢} + ٤ - ٤}$

$= \sqrt{س^{٢}} = |س|$

، ∵ $س \ge ٠$ ∴ $(ر \circ د)(س) = س$

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

(٣) $ر(س) = \frac{٥ س - ٢}{س}$

∴ $ر(س) = ٥ - \frac{٢}{س}$

∴ $(د \circ ر)(س) = د\,(ر(س))$

$= د\left(٥ - \frac{٢}{س}\right) = \frac{-٢}{٥ - \frac{٢}{س} - ٥} = س$

، $(ر \circ د)(س) = ر\,(د(س))$

$= ر\left(\frac{-٢}{س - ٥}\right) = ٥ - \frac{٢}{\frac{-٢}{س - ٥}}$

$= ٥ + س - ٥ = س$

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

(٤) $(د \circ ر)(س) = د\,(ر(س))$

$= د\left(\frac{س^{٣}}{٤}\right) = \sqrt[3]{٤ \times \frac{س^{٣}}{٤}} = س$

، (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

$= ر\left(\sqrt[3]{٤ س}\right)$

$= \frac{\left(\sqrt[3]{٤ س}\right)^٣}{٤}$

$= \frac{٤ س}{٤} = س$

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

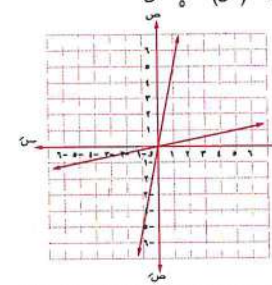
٤

① ∵ ص = ٥ س بتبديل المتغيرين.

∴ س = ٥ ص

∴ $ص = \frac{١}{٥} س$

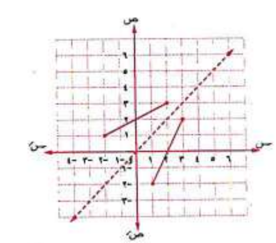
∴ $د^{-١} (س) = \frac{١}{٥} س$



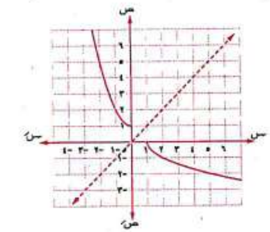
② $د^{-١} (ب) + ٢ د^{-١} (ح) = ٣ + ٢ × ٤ = ١١$

٥

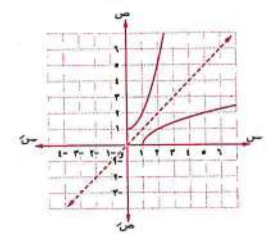
①



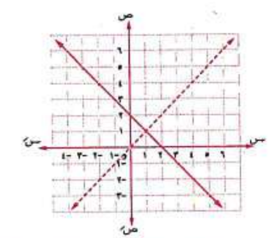
②



③



④



٦

① ∵ د (س) = ٢ س

∴ ص = ٢ س

بتبديل المتغيرين ∴ س = ٢ ص

∴ $ص = \frac{١}{٢} س$

∴ $د^{-١} (س) = \frac{١}{٢} س \neq د (س)$

∴ د معكوسها ليس نفسها.

② ∵ د (س) = − س ∴ ص = − س

بتبديل المتغيرين

∴ س = − ص

∴ ص = − س

∴ $د^{-١} (س) = − س = د (س)$

∴ د معكوسها هو نفسها.

③ ∵ $د (س) = \frac{٢}{س}$ ∴ $ص = \frac{٢}{س}$

بتبديل المتغيرين ∴ $س = \frac{٢}{ص}$

∴ $ص = \frac{٢}{س}$

∴ $د^{-١} (س) = \frac{٢}{س} = د (س)$

∴ د معكوسها هو نفسها.

④ ∵ د (س) = ٧ − س ∴ ص = ٧ − س

بتبديل المتغيرين

∴ س = ٧ − ص

∴ ص = ٧ − س

∴ $د^{-١} (س) = ٧ − س = د (س)$

∴ د معكوسها هو نفسها.

⑤ ∵ $د (س) = \frac{١}{س - ٣} + ٥$

∴ $ص = \frac{١}{س - ٣} + ٥$ بتبديل المتغيرين

∴ $س = \frac{١}{ص - ٣} + ٥$

∴ $س - ٥ = \frac{١}{ص - ٣}$

∴ $ص - ٣ = \frac{١}{س - ٥}$

∴ $ص = \frac{١}{س - ٥} + ٣$

∴ $د^{-١} (س) = \frac{١}{س - ٥} + ٣ \neq د (س)$

∴ د معكوسها ليس نفسها.

⑥ ∵ $د (س) = \frac{١}{س - ك} + ك$

∴ $ص = \frac{١}{س - ك} + ك$

بتبديل المتغيرين

∴ $س = \frac{١}{ص - ك} + ك$

∴ $س - ك = \frac{١}{ص - ك}$

∴ $ص - ك = \frac{١}{س - ك}$

∴ $ص = \frac{١}{س - ك} + ك$

∴ $د^{-١} (س) = \frac{١}{س - ك} + ك = د (س)$

∴ د معكوسها هو نفسها.

٧

إجابة رنا هى الصواب لأن :

$د^{-١} (س) \neq \frac{١}{د (س)}$ كما فى إجابة وائل

٨

① ∵ $د (س) = س^٢$

∴ د ليست أحادية على مجالها = ح

وتكون أحادية إذا كانت س ∈ [٠ ، ∞[

أو س ∈]− ∞ ، ٠]

∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية

= [٠ ، ∞[أو]− ∞ ، ٠]

② ∵ $د (س) = س^٣$

∴ د دالة أحادية على مجالها ح

∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية = ح

③ ∵ $د (س) = \frac{١}{٢} س$

∴ د دالة أحادية على مجالها ح

∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية = ح

٩

$\because$ ص = $\frac{س - ١}{س + ٥}$ بتبديل المتغيرين

$\therefore$ س = $\frac{ص - ١}{ص + ٥}$

$\therefore$ س ص + ٥ س = ص − ١

$\therefore$ س ص − ص = −٥ س − ١

$\therefore$ ص (س − ١) = −٥ س − ١

$\therefore$ ص = $\frac{-٥ س - ١}{س - ١}$

$\therefore$ $د^{-١}$(س) = $\frac{-٥ س - ١}{س - ١}$

١٠

$\because$ د(س) = ٢ س + أ $\therefore$ ص = ٢ س + أ

وبتبديل المتغيرين $\therefore$ س = ٢ ص + أ

$\therefore$ ص = $\frac{س - أ}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{أ}{٢}$

$\therefore$ $د^{-١}$(س) = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{أ}{٢}$

$\because$ $د^{-١}$(س) = ر(س)

$\therefore$ $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{أ}{٢}$ = ب س + ٣

$\therefore$ ب = $\frac{١}{٢}$ ، − $\frac{أ}{٢}$ = ٣ $\therefore$ أ = −٦

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (أ)	② (جـ)	③ (أ)	④ (أ)
⑤ (جـ)	⑥ (د)	⑦ (ب)	⑧ (أ)

إرشادات الحل :

① $\because$ $د^{-١}$(٩) = ٣

$\therefore$ النقطة (٣ ، ٩) ∈ منحنى الدالة.

، $\because$ $د^{-١}$(٥) = ٢

$\therefore$ النقطة (٢ ، ٥) ∈ منحنى الدالة

، $\because$ د(س) = أ س + ب

$\therefore$ ٣ أ + ب = ٩ (١)

، ٢ أ + ب = ٥ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

$\therefore$ أ = ٤ ، ب = −٣

$\therefore$ أ × ب = ٤ × −٣ = −١٢

② $\because$ ر(س) = س − ٣

$\therefore$ $ر^{-١}$(س) = س + ٣

، $\because$ ر(د(س)) = ر($س^٢$) = $س^٢$ − ٣

، $\because$ ر(د(س)) = $ر^{-١}$(س)

$\therefore$ $س^٢$ − ٣ = س + ٣

$\therefore$ $س^٢$ − س − ٦ = ٠

$\therefore$ (س + ٢)(س − ٣) = ٠

$\therefore$ س = −٢ أ، س = ٣

$\therefore$ م.ح = {٣ ، −٢}

③ نضع د(س) = ٣ ونوجد قيمة س

$\therefore$ س = $\frac{د(س) + ١}{٢ - د(س)}$ = $\frac{٣ + ١}{٢ - ٣}$ = −٤

$\therefore$ د(−٤) = ٣ $\therefore$ $د^{-١}$(٣) = −٤

④ $\because$ المجال ح − {١} $\therefore$ ب = ١

$\therefore$ د(س) = $\frac{أ س + ٣}{س - ١}$ = أ + $\frac{٣ + أ}{س - ١}$

من قاعدة الدالة نجد أن نقطة تماثل المنحنى هي (١ ، أ)

ومن المجال والمجال المقابل نجد أن نقطة تماثل المنحنى هي (١ ، ٣)

$\therefore$ أ = ٣

$\therefore$ د(س) = $\frac{٣ س + ٣}{س - ١}$ وبتبديل المتغيرين

$\therefore$ س = $\frac{٣ ص + ٣}{ص - ١}$

$\therefore$ س ص − س = ٣ ص + ٣

(س − ٣) ص = س + ٣ $\therefore$ ص = $\frac{س + ٣}{س - ٣}$

$\therefore$ $د^{-١}$(س) = $\frac{س + ٣}{س - ٣}$

$\therefore$ $د^{-١}$(١) = −٢

إجابات تمارين 10

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (ب)	③ (جـ)	④ (ب)
⑤ (د)	⑥ (د)	⑦ (د)	⑧ (أ)
⑨ (أ)	⑩ (جـ)	⑪ (أ)	⑫ (ب)
⑬ (د)	⑭ (جـ)	⑮ (أ)	⑯ (جـ)
⑰ (جـ)	⑱ (ب)	⑲ (ب)	⑳ (ب)
㉑ (ب)	㉒ (د)	㉓ (ب)	㉔ (ب)
㉕ (ب)	㉖ (د)	㉗ (أ)	㉘ (جـ)
㉙ (أ)	㉚ (ب)	㉛ (جـ)	㉜ (جـ)
㉝ (ب)	㉞ (جـ)	㉟ (أ)	㊱ (ب)
㊲ (أ)	㊳ (جـ)	㊴ (أ)	㊵ (أ)
㊶ (د)	㊷ (ب)	㊸ (أ)	㊹ (جـ)
㊺ (د)			

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① $٢^٧$ = ١٢٨ ② $(\frac{٢}{٥})^٢$ = $\frac{٤}{٢٥}$

③ $(٢)^{\frac{٥}{٢}}$ = ٤ $\sqrt{٢}$

٢

① $لو_٥$ ١ = صفر ② $لو_{١٠}$ ٠٫٠٠٠١ = −٤

③ $لو_٥ \frac{١}{١٢٥}$ = −٣

٣

① بفرض : $لو_٢$ ١٦ = س

$\therefore$ $٢^س$ = ١٦ $\therefore$ $٢^س$ = $٢^٤$

$\therefore$ س = ٤ $\therefore$ $لو_٢$ ١٦ = ٤

② بفرض : $لو_٨$ ١ = س

$\therefore$ $٨^س$ = ١ = $٨^٠$ $\therefore$ س = صفر

$\therefore$ $لو_٨$ ١ = صفر

⑤ $\because$ د(س) = $\sqrt[٣]{س - ٥}$ وبتبديل المتغيرين

$\therefore$ س = $\sqrt[٣]{ص - ٥}$

$\therefore$ ص = $س^٣$ + ٥

$\therefore$ $د^{-١}$(س) = $س^٣$ + ٥

$\therefore$ (ر ∘ $د^{-١}$)(س) = ر($د^{-١}$(س))

= ر($س^٣$ + ٥)

= ٢($س^٣$ + ٥) − ٧

= ٢ $س^٣$ + ٣

⑥ $\because$ د(س) = ٣ س − ٤ وبتبديل المتغيرين

$\therefore$ س = ٣ ص − ٤

$\therefore$ ص = $\frac{س + ٤}{٣}$

$\therefore$ $د^{-١}$(س) = $\frac{س + ٤}{٣}$

$\therefore$ $د^{-١}$(س + ٢) = $\frac{س + ٢ + ٤}{٣}$ = $\frac{س + ٦}{٣}$

⑦ $\because$ د(س) = $س^٣$ + ٣ $س^٢$ + ٣ س + ١

= ($س^٣$ + ١) + (٣ $س^٢$ + ٣ س)

= (س + ١)($س^٢$ − س + ١) + ٣ س (س + ١)

= (س + ١)($س^٢$ − س + ١ + ٣ س)

= (س + ١)($س^٢$ + ٢ س + ١)

= (س + ١)$(س + ١)^٢$ = $(س + ١)^٣$

وبتبديل المتغيرين

$\therefore$ س = $(ص + ١)^٣$

$\therefore$ ص = $\sqrt[٣]{س}$ − ١

$\therefore$ $د^{-١}$(س) = $\sqrt[٣]{س}$ − ١

⑧ $\because$ منحنى $د^{-١}$ يمر بالنقطتين (−٢ ، ٠) ، (−٣ ، −٢)

$\therefore$ $د^{-١}$(−٢) = ٠ $\therefore$ د(٠) = −٢

، $د^{-١}$(−٣) = −٢ $\therefore$ د(−٢) = −٣

$\therefore$ (د ∘ د)(صفر) = د(د(صفر)) = د(−٢) = −٣

③ بفرض: لو ٠,٠٠٠٠١ = س

∴ $١٠^{س}$ = ٠,٠٠٠٠١ ∴ $١٠^{س} = \frac{١}{١٠٠٠٠٠}$

∴ $١٠^{س} = ١٠^{-٥}$ ∴ س = -٥

∴ لو ٠,٠٠٠٠١ = -٥

④ بفرض: $لو_{\frac{١}{٢}}$ ١٢٨ = س

∴ $(\frac{١}{٢})^{س} = ١٢٨ = ٢^{٧}$

∴ $(\frac{١}{٢})^{س} = (\frac{١}{٢})^{-٧}$ ∴ س = -٧

∴ $لو_{\frac{١}{٢}}$ ١٢٨ = -٧

⑤ بفرض: $لو_{٢} \frac{١}{٨}$ = س ∴ $٢^{س} = \frac{١}{٨}$

∴ $٢^{س} = ٢^{-٣}$ ∴ س = -٣

∴ $لو_{٢} \frac{١}{٨}$ = -٣

⑥ بفرض: $لو_{\sqrt{٢}} ٨\sqrt{٢}$ = س

∴ $(\sqrt{٢})^{س} = ٨\sqrt{٢} = (\sqrt{٢})^{٧}$

∴ س = ٧ ∴ $لو_{\sqrt{٢}} ٨\sqrt{٢}$ = ٧

⑦ بفرض: $لو_{٣} \sqrt[٤]{٢٧}$ = س

∴ $٣^{س} = \sqrt[٤]{٢٧}$ ∴ $٣^{س} = (٣)^{\frac{٣}{٤}}$

∴ س = $\frac{٣}{٤}$ ∴ $لو_{٣} \sqrt[٤]{٢٧} = \frac{٣}{٤}$

⑧ بفرض: $لو_{٢}$ جتا ٤٥° = $لو_{٢} \frac{١}{\sqrt{٢}}$ = س

∴ $٢^{س} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ $٢^{س} = ٢^{-\frac{١}{٢}}$

∴ س = $-\frac{١}{٢}$ ∴ $لو_{٢}$ جتا ٤٥° = $-\frac{١}{٢}$

٤

① $٢^{٧}$ = س ∴ س = ١٢٨

② $٥^{-٢}$ = س ∴ س = $\frac{١}{٢٥}$

③ $٣^{٤} = س^{٢}$ ∴ $س^{٢}$ = ٨١ ∴ س = ±٩

④ $(٨١)^{\frac{٣}{٤}}$ = س ∴ س = ٢٧

⑤ $٢^{-٥} = س^{-١}$ ∴ $\frac{١}{٢^{٥}} = \frac{١}{س}$ ∴ س = ٣٢

⑥ ٢ = $لو_{٣}$ س ∴ س = $٣^{٢}$ = ٩

⑦ $(٣)^{٠}$ = ٢س - ٥ ∴ ١ = ٢س - ٥

∴ س = ٣

⑧ $٨^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{س^{٢} + ٤٨}$ ∴ $٨^{٢} = س^{٢} + ٤٨$

∴ $س^{٢}$ = ١٦ ∴ س = ±٤

⑨ $لو_{٢} (س^{٢} - ٢س)$ = ٣

∴ $٢^{٣} = س^{٢} - ٢س$

∴ $س^{٢}$ - ٢س - ٨ = ٠

∴ (س - ٤) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = -٢

⑩ ٥ = |٢س + ١|

∴ ٢س + ١ = ٥ أ، ٢س + ١ = -٥

∴ س = ٢ أ، س = -٣

⑪ $٢^{٤}$ = س (س + ٦)

∴ $س^{٢}$ + ٦س - ١٦ = ٠

∴ (س - ٢) (س + ٨) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = -٨

⑫ ٣ = $س^{٢}$ - ٢س

∴ $س^{٢}$ - ٢س - ٣ = ٠

∴ (س - ٣) (س + ١) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = -١

⑬ ($لو_{٣}$ س - ٤) ($لو_{٣}$ س - ٥) = ٠

∴ $لو_{٣}$ س = ٤ ومنها س = $٣^{٤}$ = ٨١

أ، $لو_{٣}$ س = ٥ ومنها س = $٣^{٥}$ = ٢٤٣

⑭ $٣^{س} - ٣^{س-٢} = ٢^{٣}$

∴ $٣^{س-٢} (٣^{٢} - ١)$ = ٨ ∴ $٣^{س-٢}$ = ١

∴ س - ٢ = ٠ ∴ س = ٢

⑮ $٣^{لو_{٤}(س + ١,٢٥)} = ٣^{-١}$

∴ $لو_{٤}$ (س + ١,٢٥) = -١

∴ $٤^{-١}$ = س + ١,٢٥ ∴ س = -١

⑯ $لو_{١٠}$ س - ٢ = ±٢

∴ $لو_{١٠}$ س - ٢ = ٢ ومنها $لو_{١٠}$ س = ٤

∴ س = $١٠^{٤}$ أ، $لو_{١٠}$ س - ٢ = -٢

ومنها $لو_{١٠}$ س = ٠ ∴ س = ١

٥

① $س^{٣} = ١٢٥ = ٥^{٣}$ ∴ س = ٥

∴ مجموعة الحل = {٥}

② $س^{٥}$ = ٢ ∴ س = $\sqrt[٥]{٢}$

∴ مجموعة الحل = {$\sqrt[٥]{٢}$}

③ $س^{-٢}$ = ٢ ∴ $س^{٢} = \frac{١}{٢}$

∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (ويرفض الحل السالب)

∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{\sqrt{٢}}$}

④ $س^{-\frac{٣}{٤}} = \frac{١}{١٠٠٠}$

∴ س = $(١٠^{-٣})^{-\frac{٤}{٣}}$ = ١٠٠٠٠

∴ مجموعة الحل = {١٠٠٠٠}

⑤ $(-س)^{٤} = ٨١ = ٣^{٤}$

∴ س = -٣ (ويرفض الحل الموجب)

∴ مجموعة الحل = {-٣}

⑥ $(س - ١)^{٣} = ٢٧ = ٣^{٣}$ ∴ س - ١ = ٣

∴ س = ٤ ∴ مجموعة الحل = {٤}

⑦ $(س - ١)^{٢}$ = ٧ - س

∴ $س^{٢}$ - ٢س + ١ = ٧ - س

∴ $س^{٢}$ - س - ٦ = ٠

∴ (س + ٢) (س - ٣) = ٠

∴ س = -٢ (مرفوض) أ، س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

⑧ $(\frac{٢}{س})^{-٢}$ = ٦٤ ، ∴ $(\frac{س}{٢})^{٢} = ٤^{٢}$

∴ $\frac{س}{٢}$ = ٤ ∴ س = ٨

∴ مجموعة الحل = {٨}

⑨ $س^{٢}$ = ٥س ∴ $س^{٢}$ - ٥س = ٠

∴ س (س - ٥) = ٠ ∴ س = ٠ (مرفوض)

أ، س = ٥

∴ مجموعة الحل = {٥}

⑩ $س^{٥س} = س^{٦}$ ∴ ٥س = ٦

∴ س = $\frac{٦}{٥}$ مع ملاحظة أن س ∈ $ح^{+}$ - {١}

∴ مجموعة الحل = {$\frac{٦}{٥}$}

⑪ $لو_{٣} لو_{س}$ ٢٧ = $٩^{٠}$ = ١ ∴ $لو_{س}$ ٢٧ = ٣

∴ $س^{٣} = ٢٧ = ٣^{٣}$ ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

⑫ س = $س^{٢}$ - ١٢

∴ $س^{٢}$ - س - ١٢ = ٠

∴ (س - ٤) (س + ٣) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = -٣ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٤}

⑬ س = $\sqrt{س - ٢}$ + ٢

∴ $\sqrt{س - ٢}$ = س - ٢ وبتربيع الطرفين

∴ س - ٢ = $س^{٢}$ - ٤س + ٤

∴ $س^{٢}$ - ٥س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٢ ، ٣}

(١٤) $(لو_٣ س)^٢$ − ٨ $لو_٣$ س + ١٥ = ٠

∴ ($لو_٣$ س − ٥) ($لو_٣$ س − ٣) = ٠

∴ $لو_٣$ س = ٥ أ، $لو_٣$ س = ٣

∴ س = $٣^٥$ = ٢٤٣ أ، س = $٣^٣$ = ٢٧

∴ مجموعة الحل = {٢٤٣ ، ٢٧}

٦

(١) $٤^{س}$ = ٨ $\sqrt{٢}$ ∴ $٢^{٢س} = ٢^{\frac{٧}{٢}}$

∴ ٢ س = $\frac{٧}{٢}$ ∴ س = $\frac{٧}{٤}$

(٢) $(\sqrt{٥})^{س^٢}$ = ٦٢٥ $\sqrt{٥}$ = $(\sqrt{٥})^٩$

∴ $س^٢$ = ٩ ∴ س = ± ٣

(٣) $(٠,٣)^{س^{-٢}}$ = ٠,٠٩ = $(٠,٣)^٢$

∴ $س^{-٢}$ = ٢ ∴ $س^٢ = \frac{١}{٢}$

∴ س = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(٤) $لو_٢$ ($٢^{س}$ − ٤) = ٥ − س

∴ $٢^{٥ - س}$ = $٢^{س}$ − ٤ بالضرب × $٢^{س}$

∴ $٢^٥$ = $٢^{٢س}$ − ٤ × $٢^{س}$

∴ $٢^{٢س}$ − ٤ × $٢^{س}$ − ٣٢ = ٠

∴ ($٢^{س}$ − ٨) ($٢^{س}$ + ٤) = ٠

∴ $٢^{س}$ = ٨ أ، $٢^{س}$ = −٤ (مرفوض)

∴ $٢^{س} = ٢^٣$ ∴ س = ٣

(٥) $٤^٢$ = ١٣ + $لو_٢$ (س − ١)

∴ $لو_٢$ (س − ١) = ٣ ∴ $٢^٣$ = س − ١

∴ س = ٩

(٦) ٣ = $\frac{س^٢}{٢ س - ٣}$ ∴ $س^٢$ − ٦ س + ٩ = ٠

∴ $(س - ٣)^٢$ = ٠ ∴ س = ٣

٧

(١) ٠,٤٩٨٣ (٢) ٤,٧٥٤٩ (٣) −٢,١٨٩٣

٨

(١) ١,٧١٥٩ (٢) ٢٥,٨٢٢٦ (٣) ٠,٥٠١٢

٩

(١) ∵ $لو_{س}$ ١٦ = ص ∴ $س^{ص}$ = ١٦

وبالتعويض فى المعادلة الأولى

∴ ١٦ = ٥ س − ٤ ∴ س = ٤

∴ $لو_٤$ ١٦ = ص ∴ $٤^{ص}$ = ١٦ = $٤^٢$

∴ ص = ٢

∴ مجموعة الحل = {(٤ ، ٢)}

(٢) ∵ $لو_{ص}$ ٩ = ١ ∴ ص = ٩

∴ $لو_{س}$ $لو_٣$ $لو_{س}$ ٩ = ٠

∴ $لو_٣$ $لو_{س}$ ٩ = $س^٠$ = ١ ∴ $لو_{س}$ ٩ = ٢

∴ $س^٢$ = ٩ ∴ س = ٣ (ويرفض الحل السالب)

∴ مجموعة الحل = {(٣ ، ٩)}

١٠

∵ $لو_{١٦}$ ٤٩ = أ ∴ $(١٦)^{أ}$ = ٤٩

∴ $(٤^٢)^{أ} = ٧^٢$ ∴ $(٤^{أ})^٢ = ٧^٢$

∴ $٤^{أ}$ = ٧

، ∵ $لو_٧$ ٢,٥ = ب ∴ $٧^{ب}$ = ٢,٥

∴ $٤^{أب + ١}$ = $٤^{أب}$ × ٤ = $(٤^{أ})^{ب}$ × ٤ = $٧^{ب}$ × ٤

= ٢,٥ × ٤ = ١٠

١١

(١) ٢ س + ١ > ٠ ∴ س > $-\frac{١}{٢}$

∴ مجال الدالة =]$-\frac{١}{٢}$ ، ∞[

(٢) س > ٠ ∴ مجال الدالة =]٠ ، ∞[

(٣) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن {س > ٠ ، س ≠ ١}

أى أن : مجال الدالة =]٠ ، ∞[− {١}

(٤) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

{س > ٠ ، س − ٢ > ٠ ، س − ٢ ≠ ١} أى أن : {س > ٠ ، س > ٢ ، س ≠ ٣}

أى أن : مجال الدالة =]٢ ، ∞[− {٣}

(٥) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

{س > ٠ ، ٢ − س > ٠ ، ٢ − س ≠ ١} أى أن : {س > ٠ ، س < ٢ ، س ≠ ١}

أى أن : مجال الدالة =]٠ ، ٢[− {١}

(٦) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق

{س − ٣ > ٠ ، ٥ − س > ٠ ، ٥ − س ≠ ١} أى أن : {س > ٣ ، س < ٥ ، س ≠ ٤}

أى أن : مجال الدالة =]٣ ، ٥[− {٤}

(٧) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق

{$س^٢$ > ٠ ، س − ٣ > ٠ ، س − ٣ ≠ ١} أى أن : {$س^٢$ > ٠ ، س > ٣ ، س ≠ ٤}

أى أن : مجال الدالة =]٣ ، ∞[− {٤}

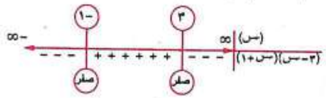
(٨) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق

{٢ س + ١ > ٠ ، س + ٢ > ٠ ، س + ٢ ≠ ١} أى أن : {س > $-\frac{١}{٢}$ ، س > −٢ ، س ≠ −١}

أى أن : مجال الدالة =]$-\frac{١}{٢}$ ، ∞[

(٩) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق

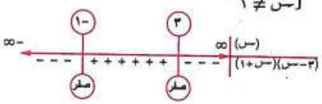
(٣ − س) (س + ١) > ٠



أى أن : مجال الدالة =]−١ ، ٣[

(١٠) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق

{(٣ − س) (س + ١) > ٠ ، س > ٠ ، س ≠ ١}



أى أن : مجال الدالة =]٠ ، ٣[− {١}

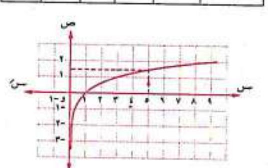
١٢

∵ منحنى الدالة يمر بالنقطة (٨١ ، ٤)

∴ ٤ = $لو_{أ}$ ٨١ ∴ $أ^٤$ = ٨١

∴ أ = ٣ (ويرفض الحل السالب)

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
د (س)	−٢	−١	٠	١	٢



من الرسم :

المجال = $ح^+$ ، المدى = ح

والدالة تزايدية على مجالها

، نقطة التقاطع مع محور السينات (١ ، ٠)

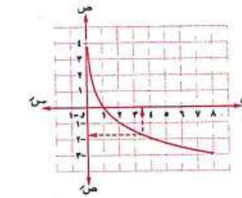
، $لو_٣$ ٥ ≃ ١,٥

١٣

∵ منحنى الدالة يمر بالنقطة ($\frac{1}{8}$ ، ٣)

∴ ٣ = لو$_{أ}$ $\frac{1}{8}$ ∴ أ^{3} = $\frac{1}{8}$ ∴ أ = $\frac{1}{2}$

س	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤
د (س)	٢	١	٠	−١	−٢



من الرسم :

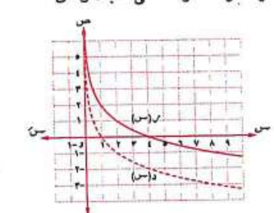
المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها

، نقطة التقاطع مع محور السينات = (١ ، ٠)

، لو$_{\frac{1}{2}}$ ٣ = −١,٨

١٤

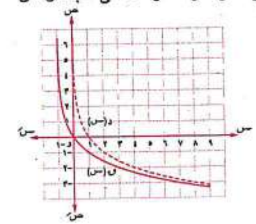
① منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة فى اتجاه و ص



من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها.

② منحنى الدالة ع هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها وحدة واحدة فى اتجاه و س

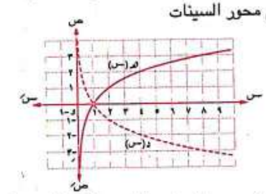


من الرسم : المجال =]−١ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تناقصية على مجالها.

③ منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د بالانعكاس فى محور السينات

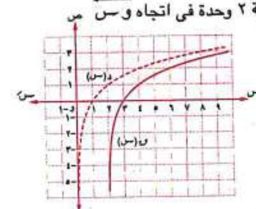


من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[، المدى = ح

، الدالة تزايدية على مجالها.

١٥

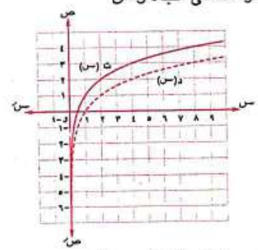
① منحنى الدالة ع هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية ٢ وحدة فى اتجاه و س



من الرسم : المجال =]٢ ، ∞[

، المدى ح ، الدالة تزايدية على مجالها.

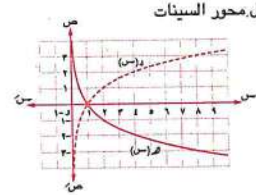
② منحنى الدالة ت هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة وحدة واحدة فى اتجاه و ص



من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح ، الدالة تزايدية على مجالها.

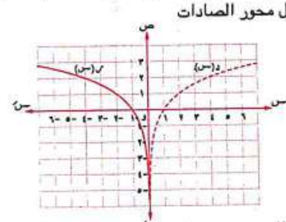
③ منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د بانعكاس حول محور السينات



من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها.

④ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بانعكاس حول محور الصادات

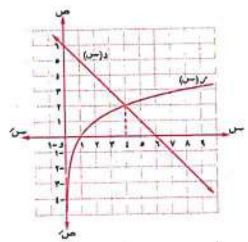


من الرسم :

، المجال =]−∞ ، ٠[

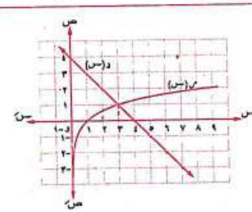
، المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها.

١٦



من الرسم نجد أن مجموعة الحل = {٤}

١٧



من الرسم نجد أن مجموعة الحل = {٣}

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (ب) ② (د) ③ (أ) ④ (ب)

⑤ (جـ) ⑥ (أ) ⑦ (ب) ⑧ (د)

إرشادات الحل :

① ∵ د$^{-1}$ (٥) = ١٤ ∴ د (١٤) = ٥

∴ لو$_{٢}$ (٢ × ١٤ + ٤) = ٥

∴ أ^{٥} = ٣٢ ∴ أ = ٢

② ∵ د$^{-1}$ (أ + ٣) = ٣٢

∴ د (٣٢) = أ + ٣ ∴ لو$_{٤}$ ٣٢ = أ + ٣

∴ ٤$^{أ+٣}$ = ٣٢ ∴ ٢$^{٢أ+٦}$ = ٢^{٥}

∴ ٢أ + ٦ = ٥ ∴ أ = −$\frac{1}{2}$

③ (د ∘ ر) (١٠) = د (ر (١٠))

= د (٧) = لو$_{٢}$ ٨ = ٣

④ ∵ لو (س − ٥) > صفر

∴ س − ٥ > ١   ∴ س > ٦

⑤ ∵ لو$_{٣}$ لو$_{٢}$ ||س − ١| + ٥| = ١

∴ لو$_{٢}$ ||س − ١| + ٥| = ٣

∴ ||س − ١| + ٥| = ٨

∴ |س − ١| + ٥ = ± ٨

∴ |س − ١| = −١٣ (مرفوض)

أ، |س − ١| = ٣

∴ س − ١ = ± ٣   ∴ س = ١ ± ٣

∴ س = ٤   أ، س = −٢

∴ مجموعة الحل = {−٢ ، ٤}

⑥ ∵ منحنى الدالة يمر بالنقطتين

(١١ ، ٣) ، (٤ ، ٠)

∴ د (٤) = صفر   ∴ لو$_{أ}$ (٤ + ب) = صفر

∴ ٤ + ب = ١   ∴ ب = −٣

، د (١١) = ٣   ∴ لو$_{أ}$ (١١ + ب) = ٣

∴ ١١ + ب = أ^{٣} ∴ أ^{٣} = ٨   ∴ أ = ٢

∴ د (س) = لو$_{٢}$ (س − ٣)

∴ د (٧) = لو$_{٢}$ (٧ − ٣) = ٢ ، د$^{-١}$ (٢) = ٧

∴ د (٧) + د$^{-١}$ (٢) = ٩

⑦ لإيجاد مجال الدالة د (س) = لو |س^{٢} − ٩|

نضع |س^{٢} − ٩| > ٠

أي أن: |(س − ٣) (س + ٣)| > ٠

س ∈ ح − {٣ ، −٣}

∴ مجال الدالة د = ح − {٣ ، −٣}

⑧ لإيجاد مجال الدالة د (س) = $\frac{\text{لو}_{٢} (\text{س} + ٣)}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٢}$

= $\frac{\text{لو}_{٢} (\text{س} + ٣)}{(\text{س} + ١) (\text{س} + ٢)}$

∴ س + ٣ > ٠   ∴ س > −٣

، س ≠ −١   ، س ≠ −٢

∴ المجال =]−٣ ، ∞[− {−١ ، −٢}

إجابات تمارين 11

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (جـ)	③ (ب)	④ (أ)
⑤ (جـ)	⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)
⑨ (جـ)	⑩ (أ)	⑪ (ب)	⑫ (جـ)
⑬ (جـ)	⑭ (جـ)	⑮ (جـ)	⑯ (جـ)
⑰ (ب)	⑱ (ب)	⑲ (د)	⑳ (ب)
㉑ (جـ)	㉒ (أ)	㉓ (ب)	㉔ (ب)
㉕ (جـ)	㉖ (ب)	㉗ (جـ)	㉘ (أ)
㉙ (د)	㉚ (جـ)	㉛ (أ)	㉜ (د)
㉝ (أ)	㉞ (أ)	㉟ (د)	㊱ (أ)
㊲ (جـ)	㊳ (د)	㊴ (د)	㊵ (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① لو$_{٣}$ ٨١ × لو$_{٩}$ ٣ = لو$_{٣}$ ٣^{٤} × لو$_{٩}$ ٩$^{\frac{١}{٢}}$ = ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٢

② لو$_{٢}$ $\frac{١٤ \times ١٥}{١٠٥}$ = لو$_{٢}$ ٢ = ١

③ لو$_{٤}$ لو$_{٢}$ لو$_{٢}$ ٢^{٢} = لو$_{٤}$ لو$_{٢}$ ٢ = لو$_{٤}$ ١ = صفر

④ ١ + لو ٣ − لو ٢ − لو ١٥

= ١ + لو $\left(\frac{٣}{١٥ \times ٢}\right)$ = ١ + لو $\frac{١}{١٠}$

= ١ + لو (١٠)$^{-١}$ = ١ − ١ = صفر

⑤ ٢ لو ٢٥ + لو $\left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٥}\right)$ + ٢ لو ٣ − لو ٣٠

= لو ٦٢٥ + لو $\frac{٨}{١٥}$ + لو ٩ − لو ٣٠

= لو $\left(٦٢٥ \times \frac{٨}{١٥} \times ٩ \times \frac{١}{٣٠}\right)$ = لو ١٠٠ = ٢

⑥ لو ٢٥ + $\frac{\text{لو } ٨ \times \text{لو } ١٦}{\text{لو } ٦٤}$ = لو ٢٥ + $\frac{٣ \text{ لو } ٢ \times ٤ \text{ لو } ٢}{٦ \text{ لو } ٢}$

= لو ٢٥ + ٢ لو ٢

= لو ٢٥ + لو ٤

= لو (٢٥ × ٤)

= لو ١٠٠ = ٢

⑦ $\frac{\text{لو}_{٢} ٢٥ + \text{لو}_{٢} ٤}{\text{لو}_{٢} ٣٠ - \text{لو}_{٢} ٣}$ = $\frac{\text{لو}_{٢} (٢٥ \times ٤)}{\text{لو}_{٢} \frac{٣٠}{٣}}$

= $\frac{\text{لو}_{٢} ١٠٠}{\text{لو}_{٢} ١٠}$ = $\frac{٢ \text{ لو}_{٢} ١٠}{\text{لو}_{٢} ١٠}$ = ٢

⑧ $\frac{(\text{لو } ٣)^{٢} - \text{لو } ٣^{٢}}{\text{لو } ٣ - \text{لو } ١٠٠}$ = $\frac{(\text{لو } ٣)^{٢} - ٢ \text{ لو } ٣}{\text{لو } ٣ - ٢ \text{ لو } ١٠}$

= $\frac{\text{لو } ٣ (\text{لو } ٣ - ٢)}{(\text{لو } ٣ - ٢)}$ = لو ٣

⑨ لو$_{٥}$ $\frac{\text{لو}_{٢} ٣ - \text{لو}_{٢} ٢}{\text{لو}_{٢} \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٥}}$ = لو$_{٥}$ $\frac{\text{لو}_{٢} \frac{٣}{٢}}{٥ \text{ لو}_{٢} \frac{٣}{٢}}$ = لو$_{٥}$ $\frac{١}{٥}$ = −١

⑩ لو$_{٣}$ $\frac{\text{لو س}^{١٨}}{\text{لو س}^{٢}}$ = لو$_{٣}$ $\frac{١٨ \text{ لو س}}{٢ \text{ لو س}}$ = لو$_{٣}$ ٩ = ٢

⑪ لو$_{\text{أب جـ}}$ أ + لو$_{\text{أب جـ}}$ ب + لو$_{\text{أب جـ}}$ جـ

= لو$_{\text{أب جـ}}$ أ ب جـ = ١

⑫ $\frac{١}{٢}$ لو$_{٢}$ أ + $\frac{١}{٢}$ لو$_{٢}$ ب + ٢ لو$_{٢}$ جـ

− لو$_{٢}$ $\sqrt{\text{أب}}$ − لو$_{٢}$ ٣ جـ^{٢}

= لو$_{٢}$ أ$^{\frac{١}{٢}}$ + لو$_{٢}$ ب$^{\frac{١}{٢}}$ + لو$_{٢}$ جـ^{٢} − لو$_{٢}$ $\sqrt{\text{أب}}$

− (لو$_{٢}$ ٣ + لو$_{٢}$ جـ^{٢})

= لو$_{٢}$ $\sqrt{\text{أ}}$ + لو$_{٢}$ $\sqrt{\text{ب}}$ + لو$_{٢}$ جـ^{٢} − لو$_{٢}$ $\sqrt{\text{أب}}$

− لو$_{٢}$ ٣ − لو$_{٢}$ جـ^{٢}

= لو$_{٢}$ $\sqrt{\text{أب}}$ − لو$_{٢}$ $\sqrt{\text{أب}}$ − ١ = −١

⑬ $\frac{١}{\text{لو}_{٢} ١٢}$ + $\frac{١}{\text{لو}_{٨} ١٢}$ + $\frac{١}{\text{لو}_{٩} ١٢}$

= لو$_{١٢}$ ٢ + لو$_{١٢}$ ٨ + لو$_{١٢}$ ٩

= لو$_{١٢}$ (٢ × ٨ × ٩) = لو$_{١٢}$ ١٤٤ = لو$_{١٢}$ (١٢)^{٢}

= ٢ لو$_{١٢}$ (١٢) = ٢

٢

① الطرف الأيمن = لو$_{٣}$ $\frac{(١٥)^{٢} \times ٧}{١٧٥ \times ٣}$ = لو$_{٣}$ ٣

= لو$_{٣}$ $(\sqrt{٣})^{٢}$ = ٢ لو$_{٣}$ $\sqrt{٣}$

② الطرف الأيمن = لو$_{٣}$ $\frac{٣ \times ٢٩٧}{١١ \times ٩٨}$ − ٢ لو$_{٣}$ $\frac{٩}{٧}$

= لو$_{٣}$ $\frac{٣ \times ٢٩٧ \times ٧^{٢}}{١١ \times ٩٨ \times ٩^{٢}}$ = لو$_{٣}$ $\frac{١}{٣}$ = −١

③ الطرف الأيمن = (لو ١٠ − لو ٥) (لو ١٠٠ − لو ٢٥)

= (لو $\frac{١٠}{٥}$) (لو $\frac{١٠٠}{٢٥}$) = (لو ٢) (لو ٤)

= (لو ٢) (٢ لو ٢) = ٢ (لو ٢)^{٢}

④ الطرف الأيمن = $\frac{\text{لو } ٣^{٦} - \text{لو } ٢^{٦}}{\text{لو } ٣^{٢} - \text{لو } ٢^{٢}}$ = $\frac{٦ \text{ لو } ٣ - ٦ \text{ لو } ٢}{٢ \text{ لو } ٣ - ٢ \text{ لو } ٢}$

= $\frac{٦ (\text{لو } ٣ - \text{لو } ٢)}{٢ (\text{لو } ٣ - \text{لو } ٢)}$ = ٣

⑤ الطرف الأيمن = $\frac{(\text{لو } ٥)^{٢} - ٢ \text{ لو } ٥}{\text{لو } ٥ - ٢}$

= $\frac{(\text{لو } ٥) (\text{لو } ٥ - ٢)}{\text{لو } ٥ - ٢}$ = لو ٥

، الطرف الأيسر = لو ١٠ − لو ٢ = لو $\frac{١٠}{٢}$ = لو ٥

∴ الطرفان متساويان.

⑥ الطرف الأيمن = $\frac{\text{لو}_{٣} \text{ لو}_{٥} \text{ لو}_{٣} ٣^{٥}}{\text{لو}_{٧} \text{ لو}_{٣} \text{ لو}_{٣} ٣^{٩}}$ = $\frac{\text{لو}_{٣} \text{ لو}_{٥} ٥}{\text{لو}_{٧} \text{ لو}_{٣} ٩}$

= $\frac{\text{لو}_{٣} ١}{\text{لو}_{٧} ٢}$ = صفر

٣

① (س + ٢) لو ٣ = لو ٦

∴ س = (لو ٦ − ٢ لو ٣) / (لو ٣) ≃ −٠,٣٧

② (٧ − ٢ س) لو ٣ = لو ١٣,٤

∴ س = (٧ لو ٣ − لو ١٣,٤) / (٢ لو ٣) ≃ ٢,٣٢

③ (س + ١) لو ٧ = (س − ٢) لو ٣

∴ س (لو ٧ − لو ٣) = −٢ لو ٣ − لو ٧

∴ س = (−٢ لو ٣ − لو ٧) / (لو ٧ − لو ٣) ≃ −٤,٨٩

④ (٢ س − ٣) لو ٣ = (١ − س) لو ١١

∴ س (٢ لو ٣ + لو ١١) = ٣ لو ٣ + لو ١١

∴ س = (٣ لو ٣ + لو ١١) / (٢ لو ٣ + لو ١١) ≃ ١,٢٤

⑤ س^(٨/٥) = ٩٤,٠ ∴ (٨/٥) لو |س| = لو ٩٤,٠

∴ لو |س| = (لو ٩٤,٠) / (٨/٥)

∴ |س| = (١٠)^(٥ لو ٩٤,٠ / ٨) ≃ ١٧,١٧

∴ س = ±١٧,١٧

⑥ ١٠^(٢س) = ٥/٧ ∴ ٢ س لو ١٠ = لو ٥/٧

∴ ٢ س = لو ٥/٧ ∴ س = ١/٢ لو ٥/٧ ≃ −٠,٠٧

⑦ ٧^(س − ١) (٧^٢ + ١) = ٣٠٠

∴ ٧^(س − ١) = ٦ ∴ (س − ١) لو ٧ = لو ٦

∴ س = (لو ٦ + لو ٧) / (لو ٧) ≃ ١,٩٢

⑧ بالقسمة على ٣^(س + ١)

∴ (٢/٣)^س = ٢ × ٣ ∴ س لو ٢/٣ = لو ٦

∴ س = (لو ٦) / (لو ٢/٣) ≃ −٤,٤٢

⑨ لو ٣ + (س − ١١) لو ٢ = لو ٨ + (٥ س − ١) لو ٦

∴ س (لو ٢ − ٥ لو ٦) = لو ٨ − لو ٣ + ١١ لو ٢ − لو ٦

∴ س = (لو ٨ − لو ٣ + ١١ لو ٢ − لو ٦) / (لو ٢ − ٥ لو ٦) ≃ −٠,٨٢

⑩ ٥^(٢س) − ٢٧ × ٥^س + ٥٠ = ٠

∴ (٥^س − ٢٥) (٥^س − ٢) = ٠

∴ إما ٥^س = ٥^٢ ∴ س = ٢

أ، ٥^س = ٢ ∴ س لو ٥ = لو ٢

∴ س = (لو ٢) / (لو ٥) ≃ ٠,٤٣

∴ س = ٢ أ، ٠,٤٣

⑪ (٣ − ٥ س) لو ٨ − (٤ + س) لو ٧ = لو ٢

∴ س (−٥ لو ٨ − لو ٧) = لو ٢ − ٣ لو ٨ + ٤ لو ٧

∴ س = (لو ٢ − ٣ لو ٨ + ٤ لو ٧) / (−٥ لو ٨ − لو ٧) ≃ −٠,١٨

⑫ لو_٥ (٤^(س + ١)) = س − ٢

∴ ٤^(س + ١) = ٥^(س − ٢)

∴ (س + ١) لو ٤ = (س − ٢) لو ٥

∴ س لو ٤ + لو ٤ = س لو ٥ − ٢ لو ٥

∴ س (لو ٤ − لو ٥) = − لو ٤ − ٢ لو ٥

∴ س = (لو ٤ + ٢ لو ٥) / (لو ٥ − لو ٤) ≃ ٢٠,٦٤

٤

① لو_٣ ١٥ = لو_٣ ٥ + لو_٣ ٣ = ١,٤٦٥ + ١ = ٢,٤٦٥

② لو_٣ ١٣٥ = لو_٣ ٢٧ + لو_٣ ٥ = ٣ لو_٣ ٣ + لو_٣ ٥

= ٣ + ١,٤٦٥ = ٤,٤٦٥

③ لو_٣ ٥/٩ = لو_٣ ٥ − لو_٣ ٩ = لو_٣ ٥ − ٢ لو_٣ ٣

= ١,٤٦٥ − ٢ = −٠,٥٣٥

٥

① لو ٦ = لو ٢ + لو ٣ = س + ص

② لو_١٨ ١٢ = (لو ١٢) / (لو ١٨) = (لو ٤ + لو ٣) / (لو ٢ + لو ٩)

= (٢ لو ٢ + لو ٣) / (لو ٢ + ٢ لو ٣) = (٢ س + ص) / (س + ٢ ص)

٦

① (خطأ) والتصحيح : لو_س س^س = س
لكل س ∈ ع^+ − {١}

② (خطأ) والتصحيح : لو س^ن = ن لو س لكل س ∈ ع^+

③ (خطأ) والتصحيح : لو_م س ص = لو_م س + لو_م ص

④ (خطأ) والتصحيح : لو_م س ص = لو_م س + لو_م ص

⑤ (صحيحة) ⑥ (صحيحة) ⑦ (صحيحة)

⑧ (خطأ) والتصحيح : لو_م س^٤ = ٤ لو_م |س|

٧

① لو_٣ (س + ٦) = لو_٣ س^٢ ∴ س + ٦ = س^٢

∴ س^٢ − س − ٦ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٢ (مرفوض) أ، س = ٣

∴ م.ح = {٣}

② لو_٤ س (س + ٦) = ٣

∴ ٤^٣ = س^٢ + ٦ س

∴ س^٢ + ٦ س − ٦٤ = ٠

∴ س = −٣ + √٧٣

أ، س = −٣ − √٧٣ (مرفوض)

∴ م.ح = {−٣ + √٧٣}

③ لو_٣ س^٣ = ٣ ∴ ٣ لو_٣ س = ٣

∴ لو_٣ س = ١ ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

④ لو_٣ (س − ١) (س + ١) = لو_٣ ٨

∴ س^٢ − ١ = ٨

∴ س^٢ = ٩ ∴ س = ٣

أ، س = −٣ (مرفوض) ∴ م.ح = {٣}

⑤ لو (س + ٨) / (س − ١) = ١ ∴ (س + ٨) / (س − ١) = ١٠

∴ ١٠ س − ١٠ = س + ٨

∴ ٩ س = ١٨ ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

⑥ لو_٤ س = لو_٤ ٤ − لو_٤ (س − ٣)

∴ لو_٤ س = لو_٤ ٤ / (س − ٣) ∴ س = ٤ / (س − ٣)

∴ س^٢ − ٣ س − ٤ = ٠

∴ (س + ١) (س − ٤) = ٠

∴ س = −١ (مرفوض) أ، س = ٤

∴ م.ح = {٤}

⑦ لو_٥ ٢ س^٢ = لو_٥ ١٨ ∴ ٢ س^٢ = ١٨

∴ س^٢ = ٩ ∴ س = ±٣

∴ مجموعة الحل = {٣ ، −٣}

⑧ لو_٣ (٧ س^٢ − ٤) = لو_٣ (س^٢ × ٣)

∴ ٧ س^٢ − ٤ = ٣ س^٢ ∴ ٤ س^٢ = ٤

∴ س = ١ أ، س = −١ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {١}

⑨ لو_٣ (س + ٢)^٥ / (س − ١)^٥ = لو_٣ ٢^٥ ∴ (س + ٢) / (س − ١) = ٢

∴ س + ٢ = ٢ س − ٢ ∴ س = ٤

∴ مجموعة الحل = {٤}

⑩ لو (٨ − س) (س − ٦) = ٠

∴ ١٤ س − س^٢ − ٤٨ = ١

∴ س^{٢} − ١٤ س + ٤٩ = ٠

∴ (س − ٧)^{٢} = ٠ ∴ س = ٧

∴ م.ح = {٧}

(١١) لو (س + ٢) (س − ٢) = لو ١٠ − لو ٢

∴ لو (س^{٢} − ٤) = لو $\frac{١٠}{٢}$ = لو ٥

∴ س^{٢} − ٤ = ٥ ∴ س^{٢} = ٩

∴ س = ٣ (والسالب مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٣}

(١٢) لو ٧ × لو ٣^{٦} = لو ٧^{٣} × لو س^{٣}

∴ ٦ لو ٧ لو ٣ = ٦ لو ٧ لو س

∴ لو ٣ = لو س ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

(١٣) لو$_{٢}$ $\frac{س^{٢} + ٦ س + ٩}{س − ١}$ = لو$_{٥}$ ٥^{٤} = ٤

∴ $\frac{س^{٢} + ٦ س + ٩}{س − ١}$ = ٢^{٤} = ١٦

∴ س^{٢} − ١٠ س + ٢٥ = ٠

∴ (س − ٥)^{٢} = صفر

∴ س = ٥ ∴ مجموعة الحل = {٥}

(١٤) لو$_{س}$ = $\frac{(لو ٣)^{٢} − ٣ لو ٣}{لو ٣ − لو ١٠٠٠}$ = $\frac{لو ٣ (لو ٣ − ٣)}{لو ٣ − ٣}$ = لو ٣

∴ س = ٣ ∴ مجموعة الحل = {٣}

(١٥) (لو س)^{٢} − لو س^{٢} − ٣ = ٠

∴ (لو س)^{٢} − ٢ لو س − ٣ = ٠

∴ (لو س + ١) (لو س − ٣) = ٠

∴ لو س = −١ أ، لو س = ٣

∴ س = ٠,١ أ، س = ١٠٠٠

∴ م.ح = {٠,١ ، ١٠٠٠}

(١٦) (لو س)^{٢} + ٢ لو س + ١ = (لو ٥)^{٢}

∴ (لو س + ١)^{٢} = (لو ٥)^{٢}

∴ لو س + ١ = ± لو ٥

∴ لو س = لو ٥ − ١ = لو ٥ − لو ١٠ = لو $\frac{١}{٢}$

∴ س = $\frac{١}{٢}$

أ، لو س = − لو ٥ − ١ = − لو ٥ − لو ١٠

= − لو ٥٠ = لو (٥٠)$^{-١}$

∴ س = $\frac{١}{٥٠}$

∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٥٠}$}

(١٧) لو$_{س}$ $\frac{٤ × ١٤}{٢٧}$ = ٣ لو$_{س}$ س + لو$_{س}$ ٧

= لو$_{س}$ (س^{٣} × ٧)

∴ ٧ س^{٣} = $\frac{٥٦}{٢٧}$ ∴ س^{٣} = $\frac{٨}{٢٧}$

∴ س = $\frac{٢}{٣}$

∴ مجموعة الحل = {$\frac{٢}{٣}$}

(١٨) لو (∛(٣ س − ١) × ∛(س − ٢)) = لو ٢٠ − لو ١٠

∴ لو ∛((٣ س − ١) (س − ٢)) = لو ٢

∴ ∛((٣ س − ١) (س − ٢)) = ٢

∴ (٣ س − ١) (س − ٢) = ٢^{٣}

∴ ٣ س^{٢} − ٧ س − ٦ = ٠

∴ (٣ س + ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = − $\frac{٢}{٣}$ (مرفوض) أ، س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

٨

(١) $\frac{لو س}{لو ٢}$ = $\frac{لو ٩}{لو ٤}$ ∴ $\frac{لو س}{لو ٢}$ = $\frac{٢ لو ٣}{٢ لو ٢}$

∴ لو س = لو ٣ ∴ س = ٣

∴ م.ح = {٣}

(٢) بأخذ لوغاريتم للطرفين

∴ لو ٣$^{لو س}$ = لو ٢$^{لو ٣}$

∴ لو س لو ٣ = لو ٣ لو ٢ ∴ لو س = لو ٢

∴ س = ٢ ∴ م.ح = {٢}

(٣) بأخذ لوغاريتم للطرفين

∴ لو س$^{لو س}$ = لو ١٠

∴ لو س لو س = ١ ∴ (لو س)^{٢} = ١

∴ لو س = ١ أ، لو س = −١

∴ س = ١٠ أ، س = ٠,١

∴ م.ح = {١٠ ، ٠,١}

(٤) $\frac{لو س}{لو ٣}$ = $\frac{لو ٣}{لو س}$ ∴ (لو س)^{٢} = (لو ٣)^{٢}

∴ لو س = لو ٣ ومنها س = ٣

أ، لو س = − لو ٣ = لو ٣$^{-١}$

ومنها س = $\frac{١}{٣}$ ∴ م.ح = {٣ ، $\frac{١}{٣}$}

(٥) (س)$^{٢ لو س}$ = ٩ لو ١٠ ∴ س^{٢} = ٩

∴ س = ٣ أ، س = −٣ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٣}

(٦) ٤$^{لو س}$ × ٥$^{لو س}$ = ٨٠٠٠

∴ ٢٠$^{لو س}$ = ٨٠٠٠ ∴ ٢٠$^{لو س}$ = ٢٠^{٣}

∴ لو س = ٣ ∴ س = ١٠٠٠

∴ مجموعة الحل = {١٠٠٠}

(٧) ٢$^{(لو س)^{٢}}$ × ٢^{٦} = ٢$^{٥ لو س}$

∴ (لو س)^{٢} + ٦ = ٥ لو س

∴ (لو س)^{٢} − ٥ لو س + ٦ = ٠

∴ (لو س − ٢) (لو س − ٣) = ٠

∴ لو س = ٢ ومنها س = ١٠٠

أ، لو س = ٣ ومنها س = ١٠٠٠

∴ مجموعة الحل = {١٠٠ ، ١٠٠٠}

(٨) بالضرب × ٢ لو س

∴ ٢ (لو س)^{٢} − ٣ لو س − ٢ = ٠

∴ (٢ لو س + ١) (لو س − ٢) = ٠

∴ لو س = − $\frac{١}{٢}$ ومنها س = $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$

أ، لو س = ٢ ومنها س = ١٠٠

∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ، ١٠٠}

(٩) بفرض أن لو$_{٢}$ س = ك ∴ لو$_{س}$ ٢ = $\frac{١}{ك}$

∴ ك + $\frac{١}{ك}$ = ٢ ∴ ك^{٢} − ٢ ك + ١ = ٠

∴ (ك − ١)^{٢} = ٠ ∴ ك = ١

∴ لو$_{٢}$ س = ١ ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

(١٠) بفرض أن لو س = ك ∴ لو$_{س}$ ١٠ = $\frac{١}{ك}$

∴ لو س − ٢ لو$_{س}$ ١٠ = ١

∴ ك − $\frac{٢}{ك}$ = ١ ∴ ك^{٢} − ك − ٢ = ٠

∴ (ك + ١) (ك − ٢) = ٠

∴ ك = −١ أ، ك = ٢

∴ لو س = −١ أ، لو س = ٢

∴ س = ١٠$^{-١}$ = $\frac{١}{١٠}$ أ، س = ١٠^{٢} = ١٠٠

∴ م.ح = {$\frac{١}{١٠}$ ، ١٠٠}

(١١) لو $\frac{س}{٢}$ × لو $\left(\frac{س}{٢}\right)^{-١}$ = −١

∴ − (لو $\frac{س}{٢}$)^{٢} = −١ ∴ (لو $\frac{س}{٢}$)^{٢} = ١

∴ لو $\frac{س}{٢}$ = ١ ومنها $\frac{س}{٢}$ = ١٠

∴ س = ٢٠

أ، لو $\frac{س}{٢}$ = −١ ومنها $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{١٠}$

∴ س = ٠,٢

∴ مجموعة الحل = {٠,٢ ، ٢٠}

(١٢) $(\text{لو س})^{٢} = ٩\ \text{لو س}$

∴ $(\text{لو س})^{٢} - ٩\ \text{لو س} = ٠$

∴ $\text{لو س}\left((\text{لو س})^{٢} - ٩\right) = ٠$

∴ $\text{لو س}\ (\text{لو س} - ٣)\ (\text{لو س} + ٣) = ٠$

∴ لو س = ٠ ومنها س = ١

أ، لو س = ٣ ومنها س = ١٠٠٠

أ، لو س = −٣ ومنها س = ٠,٠٠١

∴ مجموعة الحل = {١ ، ١٠٠٠ ، ٠,٠٠١}

(١٣) بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ لو س لو س = لو (١٠٠ س)

∴ $(\text{لو س})^{٢} = \text{لو } ١٠٠ + \text{لو س}$

∴ $(\text{لو س})^{٢} - \text{لو س} - ٢ = ٠$

∴ (لو س − ٢) (لو س + ١) = ٠

∴ لو س = ٢ أ، لو س = −١

∴ س = ١٠٠ أ، س = $\frac{١}{١٠}$

∴ م.ح = {١٠٠ ، $\frac{١}{١٠}$}

(١٤) (لو س + ٢) (لو س − لو ١٠٠) = ٥

∴ (لو س + ٢) (لو س − ٢) = ٥

∴ $(\text{لو س})^{٢} - ٤ = ٥$ ∴ $(\text{لو س})^{٢} = ٩$

∴ لو س = ٣ ومنها س = ١٠٠٠

أ، لو س = −٣ ومنها س = ٠,٠٠١

∴ مجموعة الحل = {١٠٠٠ ، ٠,٠٠١}

(١٥) $\frac{\text{لو س}}{\text{لو } ٣} + \frac{\text{لو س}^{٢}}{\text{لو } ٩} + ٢ = ٠$

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو } ٣} + \frac{\cancel{٢}\ \text{لو س}}{\cancel{٢}\ \text{لو } ٣} = -٢$

∴ $\frac{٢\ \text{لو س}}{\text{لو } ٣} = -٢$ ∴ لو س = $\frac{-٣}{٢}$ لو ٣

∴ لو س = $\text{لو } ٣^{-\frac{٣}{٢}} = \text{لو } \frac{١}{٣\sqrt{٣}}$

∴ س = $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$

∴ مجموعة الحل = $\left\{\frac{١}{٣\sqrt{٣}}\right\}$

(١٦) $\frac{\text{لو س}}{\text{لو } ٢} = \frac{\text{لو (س + ٦)}}{\text{لو } ٤}$

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو } ٢} = \frac{\text{لو (س + ٦)}}{٢\ \text{لو } ٢}$

∴ ٢ لو س = لو (س + ٦)

∴ $س^{٢} = س + ٦$ ∴ $س^{٢} - س - ٦ = ٠$

∴ (س − ٣) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = −٢ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٣}

(١٧) $\frac{\text{لو س}}{\text{لو } ٢} + \frac{\text{لو س}}{\text{لو } ٤} = \frac{-٣}{٢}$

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو } ٢} + \frac{\text{لو س}}{٢\ \text{لو } ٢} = \frac{-٣}{٢}$

∴ $\frac{٣\ \text{لو س}}{٢\ \text{لو } ٢} = \frac{-٣}{٢}$ ∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو } ٢} = -١$

∴ لو س = $\text{لو } ٢^{-١}$ ∴ س = $\frac{١}{٢}$

∴ م.ح = $\left\{\frac{١}{٢}\right\}$

(١٨) ∵ $\sqrt{\text{لو}_{٢}\ \text{س}} = \text{لو}_{٢} \sqrt{\text{س}}$ بالتربيع

∴ $\text{لو}_{٢}\ \text{س} = \text{لو}_{٢}\sqrt{\text{س}} \times \text{لو}_{٢}\sqrt{\text{س}}$

$= \text{لو}_{٢}\ \text{س}^{\frac{١}{٢}} \times \text{لو}_{٢}\ \text{س}^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\text{لو}_{٢}\ \text{س} = \frac{١}{٤}(\text{لو}_{٢}\ \text{س})^{٢}$

∴ $(\text{لو}_{٢}\ \text{س})^{٢} - ٤\ \text{لو}_{٢}\ \text{س} = ٠$

∴ $\text{لو}_{٢}\ \text{س}\ (\text{لو}_{٢}\ \text{س} - ٤) = ٠$

∴ $\text{لو}_{٢}\ \text{س} = ٠$ أ، $\text{لو}_{٢}\ \text{س} = ٤$

∴ $س = ٢^{٠} = ١$ أ، $س = ٢^{٤} = ١٦$

∴ م.ح = {١ ، ١٦}

(١٩) بالتربيع للطرفين

∴ $\text{س}^{\text{لو}\sqrt{\text{س}}} = ١٠٠$ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ لو $\sqrt{\text{س}}$ لو س = ٢

∴ $\frac{١}{٢}(\text{لو س})^{٢} = ٢$ ∴ $(\text{لو س})^{٢} = ٤$

∴ لو س = ٢ أ، لو س = −٢

∴ س = ١٠٠ أ، س = $\frac{١}{١٠٠}$

∴ م.ح = {١٠٠ ، $\frac{١}{١٠٠}$}

(٢٠) $\sqrt{\text{لو}\left(٩١ + ٣\sqrt{\frac{\text{س}}{٢}}\right)} = \sqrt{٢}$

∴ $\text{لو}\left(٩١ + ٣\sqrt{\frac{\text{س}}{٢}}\right) = ٢$

∴ $٩١ + ٣\sqrt{\frac{\text{س}}{٢}} = ١٠^{٢} = ١٠٠$

∴ $٣\sqrt{\frac{\text{س}}{٢}} = ٩ = ٣^{٢}$ ∴ $\sqrt{\frac{\text{س}}{٢}} = ٢$

∴ $\frac{\text{س}}{٢} = ٤$ ∴ س = ٨

∴ مجموعة الحل = {٨}

(٢١) لو ١ − لو ($٢^{س}$ + س − ١) = س (لو ٥ − لو ١٠)

∴ − لو ($٢^{س}$ + س − ١) = س لو $\frac{١}{٢}$

∴ − لو ($٢^{س}$ + س − ١) = − س لو ٢

∴ لو ($٢^{س}$ + س − ١) = لو $٢^{س}$

∴ $٢^{س}$ + س − ١ = $٢^{س}$

∴ س − ١ = ٠ ∴ س = ١

∴ م.ح = {١}

(٢٢) ∵ $\text{لو}_{٢٧}(\text{س} - ٢) + \text{لو}_{٣}(\text{س} - ٢) = ٤$

∴ $\frac{\text{لو (س − ٢)}}{\text{لو } ٢٧} + \frac{\text{لو (س − ٢)}}{\text{لو } ٣} = ٤$

∴ $\frac{\text{لو (س − ٢)}}{٣\ \text{لو } ٣} + \frac{\text{لو (س − ٢)}}{\text{لو } ٣} = ٤$

∴ $\frac{\text{لو (س − ٢)} + ٣\ \text{لو (س − ٢)}}{٣\ \text{لو } ٣} = ٤$

∴ ٤ لو (س − ٢) = ١٢ لو ٣

∴ لو (س − ٢) = ٣ لو ٣ = لو ٢٧

∴ س − ٢ = ٢٧ ∴ س = ٢٩

∴ مجموعة الحل = {٢٩}

٩

(١) من هندسة الشكل

$\frac{\text{لو س}}{\text{لو } ٦} = \frac{\text{لو } ٤٩}{\text{لو } ٧}$ ∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو } ٦} = \frac{٢\ \text{لو } ٧}{\text{لو } ٧}$

∴ ٢ لو ٦ = لو س ∴ س = ٣٦

(٢) $\text{م ء} = \text{لو}_{٨١}\ ٢٤٣ = \text{لو}_{٨١}(٨١)^{\frac{٥}{٤}} = \frac{٥}{٤}\ \text{لو}_{٨١}\ ٨١ = \frac{٥}{٤}$

، ∵ م ء = $\frac{١}{٣}$ ء أ

∴ ء أ = $\frac{١٥}{٤}$ ، ء أ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

∴ ب حـ = ٢ × $\frac{١٥}{٤}$ = ٧,٥ سم

(٣) ق(∠أ) = ٩٠° ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

∴ $(\text{أ حـ})^{٢}$ = حـ ء × حـ ب

∴ $(٥\sqrt{٣})^{٢} = \text{لو}_{س}\ ٢٧ \times (\text{لو}_{س}\ ٢٧ + \text{لو}_{س}\ ٣)$

∴ $٧٥ = \text{لو}_{س}\ ٢٧ \times \text{لو}_{س}\ ٨١$

∴ $٧٥ = ٣\ \text{لو}_{س}\ ٣ \times ٤\ \text{لو}_{س}\ ٣$

∴ $٧٥ = ١٢\ (\text{لو}_{س}\ ٣)^{٢}$

∴ $(\text{لو}_{س}\ ٣)^{٢} = \frac{٧٥}{١٢} = \frac{٢٥}{٤}$

∴ $\text{لو}_{س}\ ٣ = \frac{٥}{٢}$ ومنها $س^{\frac{٥}{٢}} = ٣$

∴ $س = ٣^{\frac{٢}{٥}} = ١,٦$

أ، $\text{لو}_{س}\ ٣ = \frac{-٥}{٢}$ ومنها $س^{-\frac{٥}{٢}} = ٣$

∴ $س = \left(\frac{١}{٣}\right)^{\frac{٢}{٥}} \simeq ٠,٦$

(٤) ∵ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠أ ∴ $\frac{\text{حـ أ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ء ب}}$

∴ $\frac{\text{لو}_{٢}\ ٥}{\text{لو}_{٤}\ \text{س}} = \frac{\text{لو ب}}{\text{لو ب}^{٢}}$ ∴ $\frac{\text{لو}_{٢}\ ٥}{\text{لو}_{٤}\ \text{س}} = \frac{\text{لو ب}}{٢\ \text{لو ب}}$

∴ $٢\ \text{لو}_{٢}\ ٥ = \text{لو}_{٤}\ \text{س}$ ∴ $\text{لو}_{٢}\ ٢٥ = \text{لو}_{٤}\ \text{س}$

∴ $\frac{\text{لو } ٢٥}{\text{لو } ٢} = \frac{\text{لو س}}{\text{لو } ٤}$ ∴ $\frac{\text{لو } ٢٥}{\text{لو } ٢} = \frac{\text{لو س}}{٢\ \text{لو } ٢}$

∴ لو س = ٢ لو ٢٥ = لو ٦٢٥

∴ س = ٦٢٥

١٠

① ∵ لو ص^{٣} = ٣ − لو ١٢٥

∴ لو ص^{٣} = لو ١٠٠٠ − لو ١٢٥ = لو $\frac{١٠٠٠}{١٢٥}$

∴ ص^{٣} = ٨ ∴ ص = ٢

، ∵ لو س ص = ١ − لو ٥ وبالتعويض عن ص = ٢

∴ لو ٢ س = ١ − لو ٥ = لو ١٠ − لو ٥ = لو ٢

∴ ٢ س = ٢ ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٢)}

② ∵ لو$_{٣}$ (س ص) + ٢ = ٢ + لو$_{٣}$ ٩

∴ لو$_{٣}$ (س ص) = لو$_{٣}$ ٩ ∴ س ص = ٩

، ∵ س = ١٠ − ص

∴ (١٠ − ص) ص = ٩

∴ ص^{٢} − ١٠ ص + ٩ = ٠

∴ (ص − ٩) (ص − ١) = ٠

∴ ص = ٩ ومنها س = ١ أ، ص = ١ ومنها س = ٩

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٩) ، (٩ ، ١)}

③ ∵ ٣ لو س + ٢ لو ص = ١١ (١)

، ٢ لو س − ٣ لو ص = ٢ (٢)

وبضرب (١) × ٣ ، (٢) × ٢ والجمع

∴ ١٣ لو س = ٣٩ ∴ لو س = ٣

∴ س = ١٠٠٠ وبالتعويض فى (١)

∴ ٣ لو ١٠٠٠ + ٢ لو ص = ١١

∴ ٩ + ٢ لو ص = ١١ ∴ لو ص = ١

∴ ص = ١٠

∴ مجموعة الحل = {(١٠٠٠ ، ١٠)}

١١

① الطرف الأيمن = لو$_{٣}$ $\frac{س^{٥} \times ص^{٤}}{س^{٣} ص^{٢}}$ = لو$_{٣}$ س^{٢} ص^{٢}

= لو$_{٣}$ (س ص)^{٢} = ٢ لو$_{٣}$ س ص

= ٢ لو$_{٣}$ ٩ $\sqrt{٣}$ = ٢ لو$_{٣}$ ٣$^{\frac{٥}{٢}}$ = ٥

② ∵ $\frac{١}{٣}$ لو أ = $\frac{١}{٥}$ لو ب = لو حـ ∴ حـ = أ$^{\frac{١}{٣}}$

∴ أ = حـ^{٣} ، حـ = ب$^{\frac{١}{٥}}$ ∴ ب = حـ^{٥}

∴ أ ب = حـ^{٣} × حـ^{٥} = حـ^{٨}

③ ∵ لو $\frac{س + ص}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ لو (س ص) = لو (س ص)$^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{س + ص}{٣}$ = (س ص)$^{\frac{١}{٢}}$ وبتربيع الطرفين

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص = ٩ س ص

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ٧ س ص

وبالقسمة على س ص : ∴ $\frac{س}{ص}$ + $\frac{ص}{س}$ = ٧

④ ∵ ٣$^{لو_{أ} س}$ = أ ويأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس أ

∴ لو$_{أ}$ س لو$_{أ}$ ٣ = ١

∴ لو$_{أ}$ س معكوس ضربى للعدد لو$_{أ}$ ٣

، عندما أ = ٩ ∴ لو$_{٩}$ س لو$_{٩}$ ٣ = ١

∴ لو$_{٩}$ س لو$_{٩}$ ٩$^{\frac{١}{٢}}$ = ١ ∴ $\frac{١}{٢}$ لو$_{٩}$ س = ١

∴ لو$_{٩}$ س = ٢

⑤ لو$_{أ^{٢}}$ ب^{٢} = $\frac{لو ب^{٢}}{لو أ^{٢}}$ = $\frac{٢ لو ب}{٢ لو أ}$ = $\frac{لو ب}{لو أ}$ = لو$_{أ}$ ب

∴ لو$_{أ}$ ب^{٢} + لو$_{أ^{٢}}$ ب^{٤} = ٢ لو$_{أ}$ ب + لو$_{أ}$ ب^{٢}

= ٢ لو$_{أ}$ ب + ٢ لو$_{أ}$ ب = ٤ لو$_{أ}$ ب

⑥ لو $\frac{س^{٣} \times ص^{٤}}{س ص^{٢}}$ = ٢ لو ٦

∴ لو س^{٢} ص^{٢} = لو ٣٦

∴ س^{٢} ص^{٢} = ٣٦

∴ س ص = ٦ ∴ س = $\frac{٦}{ص}$

⑦ الطرف الأيمن = ٢ لو (س + ص)

= لو (س + ص)^{٢}

= لو (س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢})

= لو (١٠ س ص)

= لو ١٠ + لو س + لو ص

= ١ + لو س + لو ص

⑧ لو (س + ص) = $\frac{١}{٢}$ لو (س ص) + لو ٢

∴ لو (س + ص) − لو ٢ = $\frac{١}{٢}$ لو (س ص)

∴ لو $\frac{س + ص}{٢}$ = لو (س ص)$^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{س + ص}{٢}$ = س$^{\frac{١}{٢}}$ ص$^{\frac{١}{٢}}$ بالتربيع

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص = ٤ س ص

∴ س^{٢} − ٢ س ص + ص^{٢} = ٠

∴ (س − ص)^{٢} = ٠ ∴ س − ص = ٠

∴ س = ص

⑨ ∵ لو س ص^{٣} = ١ ∴ س ص^{٣} = ١٠

∴ س = $\frac{١٠}{ص^{٣}}$ (١)

، ∵ لو س^{٢} ص = ١ ∴ س^{٢} ص = ١٠

ومن معادلة (١) :

∴ $\frac{١٠٠}{ص^{٦}}$ × ص = ١٠ ∴ $\frac{١٠}{ص^{٥}}$ = ١

∴ ص^{٥} = ١٠ ∴ ص = ١٠$^{\frac{١}{٥}}$

ومن (١) : س = ١٠$^{\frac{٢}{٥}}$

∴ لو س ص = لو (١٠$^{\frac{١}{٥}}$ × ١٠$^{\frac{٢}{٥}}$)

= لو ١٠$^{\frac{٣}{٥}}$ = $\frac{٣}{٥}$ لو ١٠ = $\frac{٣}{٥}$

⑩ الطرف الأيسر = $\frac{١}{لو_{س} ص}$ = $\frac{١}{\frac{لو ص}{لو س}}$ = $\frac{لو س}{لو ص}$

= لو$_{ص}$ س

لو$_{٣}$ س + ٣ لو$_{س}$ ٣ = ٤

بفرض أن لو$_{٣}$ س = ك

∴ ك + $\frac{٣}{ك}$ = ٤ ∴ ك^{٢} + ٣ = ٤ ك

∴ ك^{٢} − ٤ ك + ٣ = ٠

∴ (ك − ١) (ك − ٣) = ٠

∴ ك = ١ أ، ك = ٣

∴ لو$_{٣}$ س = ١ أ، لو$_{٣}$ س = ٣

∴ س = ٣ أ، س = ٢٧

∴ م.ح = {٣ ، ٢٧}

⑪ ∵ لو$_{س}$ ص = $\frac{١}{لو_{ص} س}$

، ∵ $\frac{٤}{لو_{س} ص}$ + $\frac{٧}{لو_{ع} ص}$ = ٣ لو$_{ص}$ ع

∴ ٤ لو$_{ص}$ س + ٧ لو$_{ص}$ ع = ٣ لو$_{ص}$ ع

∴ س^{٤} × ع^{٧} = ع^{٣}

∴ س^{٤} ع^{٤} = ١ ∴ س ع = ١

⑫ ∵ ص = أ$^{لو_{أ} س}$

وبأخذ اللوغاريتم للأساس أ للطرفين

∴ لو$_{أ}$ ص = لو$_{أ}$ س لو$_{أ}$ أ

∴ لو$_{أ}$ ص = لو$_{أ}$ س ∴ ص = س

∴ ٣$^{\frac{١}{٢} لو_{٣} ٤٩}$ = ٣$^{لو_{٣} \sqrt{٤٩}}$ = ٣$^{لو_{٣} ٧}$ = ٧

⑬ لو$_{أ^{ص}}$ أ^{س} = $\frac{لو أ^{س}}{لو أ^{ص}}$ = $\frac{س لو أ}{ص لو أ}$ = $\frac{س}{ص}$

∴ لو$_{\sqrt[٣]{٥}}$ ١٢٥ = لو$_{(٥)^{\frac{١}{٣}}}$ (٥)^{٣} = $\frac{٣}{\frac{١}{٣}}$ = ٩

، لو$_{٨}$ $\sqrt{٢}$ = لو$_{(٢)^{٣}}$ (٢)$^{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{\frac{١}{٢}}{٣}$ = $\frac{١}{٦}$

∴ لو$_{\sqrt[٣]{٥}}$ ١٢٥ × لو$_{٨}$ $\sqrt{٢}$ = ٩ × $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٣}{٢}$

(١٤) بوضع لو$_{ب}$ أ = س ∴ ب^{س} = أ

∴ س لو ب = لو أ ∴ س = $\frac{\text{لو أ}}{\text{لو ب}}$

∴ لو$_{ب}$ أ = $\frac{\text{لو أ}}{\text{لو ب}}$

الطرف الأيمن = $\frac{1}{\text{لو}_{أ}\text{ أ + لو}_{أ}\text{ ب}}$ + $\frac{1}{\text{لو}_{ب}\text{ أ + لو}_{ب}\text{ ب}}$

= $\frac{1}{1+\frac{\text{لو ب}}{\text{لو أ}}}$ + $\frac{1}{\frac{\text{لو أ}}{\text{لو ب}}+1}$

= $\frac{\text{لو أ}}{\text{لو أ + لو ب}}$ + $\frac{\text{لو ب}}{\text{لو أ + لو ب}}$

= $\frac{\text{لو أ + لو ب}}{\text{لو أ + لو ب}}$ = 1

(١٥) لو$_{جـ}$ $\frac{أ \times ب \times 4}{(أ+ب)^2}$ = 0 ∴ $\frac{4\,أب}{(أ+ب)^2}$ = 1

∴ (أ + ب)^2 = 4 أب

∴ أ^2 + 2 أب + ب^2 = 4 أب

∴ أ^2 − 2 أب + ب^2 = 0

∴ (أ − ب)^2 = 0 ∴ أ − ب = 0

(١٦) س$^{2\,\text{لو س}}$ × س^{3} = 10^{5}

∴ لو (س$^{2\,\text{لو س}}$ × س^{3}) = 5 لو 10

∴ لو س$^{2\,\text{لو س}}$ + لو س^{3} = 5

∴ 2 لو س لو س + 3 لو س = 5

∴ 2 (لو س)^2 + 3 لو س − 5 = 0

∴ (2 لو س + 5) (لو س − 1) = 0

∴ لو س = $-\frac{5}{2}$ ومنها س = $10^{-\frac{5}{2}}$ = $\frac{1}{100\sqrt{10}}$

أ، لو س = 1 ومنها س = 10

(١٧) ص − $\frac{1}{\text{ص}}$ = 1 ∴ ص^2 − ص − 1 = 0

∴ ص = $\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$ = $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

∴ أ^{س} = $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ∴ س لو$_{أ}$ أ = لو$_{أ}$ $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

∴ س = لو$_{أ}$ $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (ويرفض الحل الآخر)

(١٨) د (س + 1) + د (س − 1) = د (3)

∴ لو (س + 1)^2 + لو (س − 1)^2 = لو 3^2

∴ لو (س + 1)^2 (س − 1)^2 = لو 9

∴ (س^2 − 1)^2 = 9

∴ س^2 − 1 = 3

أ، س^2 − 1 = −3 (مرفوض)

∴ س^2 = 4 ∴ س = ± 2

∴ م.ح = {2 ، −2}

(١٩) د (−س) = لو $\left(\sqrt{(-\text{س})^2 + 1} - (-\text{س})\right)$

= لو $\left(\sqrt{\text{س}^2 + 1} + \text{س}\right)$

بالضرب فى المرافق

= لو $\left[\left(\sqrt{\text{س}^2+1} + \text{س}\right) \times \frac{\left(\sqrt{\text{س}^2+1} - \text{س}\right)}{\sqrt{\text{س}^2+1} - \text{س}}\right]$

= لو $\left(\frac{\text{س}^2 + 1 - \text{س}^2}{\sqrt{\text{س}^2+1} - \text{س}}\right)$

= لو $\left(\frac{1}{\sqrt{\text{س}^2+1} - \text{س}}\right)$

= لو $\left(\sqrt{\text{س}^2+1} - \text{س}\right)^{-1}$

= − لو $\left(\sqrt{\text{س}^2+1} - \text{س}\right)$ = − د (س)

∴ د (−س) = − د (س)

∴ الدالة فردية.

(٢٠) لو 4^{47} ≃ 28,3

∴ 28 < لو 4^{47} < 29

∴ لو 10^{28} < لو 4^{47} < لو 10^{29}

∴ $10^{28} < 4^{47} < 10^{29}$

∴ عدد أرقام العدد 4^{47} = 29 رقمًا

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1

(١) (أ) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (د) (٥) (ب)

(٦) (جـ) (٧) (جـ) (٨) (جـ) (٩) (أ) (١٠) (د)

(١١) (د) (١٢) (د) (١٣) (جـ) (١٤) (جـ) (١٥) (جـ)

إرشادات لحل رقم 1

(١) ∵ لو س = ع + لو ص

∴ لو س − لو ص = ع ∴ لو $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ع

∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = (10)^{ع} ∴ س = ص × (10)^{ع}

(٢) المقدار = $\frac{1}{\text{لو}_{ب}\text{ ب + لو}_{ب}\text{ أ + لو}_{ب}\text{ جـ}}$

+ $\frac{1}{\text{لو}_{جـ}\text{ جـ + لو}_{جـ}\text{ أ + لو}_{جـ}\text{ ب}}$

+ $\frac{1}{\text{لو}_{أ}\text{ أ + لو}_{أ}\text{ ب + لو}_{أ}\text{ جـ}}$

= $\frac{1}{\text{لو}_{ب}\text{ أبجـ}}$ + $\frac{1}{\text{لو}_{جـ}\text{ أبجـ}}$ + $\frac{1}{\text{لو}_{أ}\text{ أبجـ}}$

= لو$_{أبجـ}$ ب + لو$_{أبجـ}$ جـ + لو$_{أبجـ}$ أ

= لو$_{أبجـ}$ أبجـ = 1

(٣) ∵ (25)^{س} − 12 × (5)^{س} + 27 = 0

∴ (5^{س} − 9) (5^{س} − 3) = 0

∴ 5^{س} − 9 = 0 ومنها 5^{س} = 9

∴ س = لو$_{5}$ 9

أ، 5^{س} − 3 = 0 ومنها 5^{س} = 3

∴ س = لو$_{5}$ 3

∴ مجموع الجذرين = لو$_{5}$ 9 + لو$_{5}$ 3 = لو$_{5}$ 27

(٤) بوضع 3$^{\text{لو س}}$ = ص (بأخذ لوغاريتم الطرفين)

∴ لو س لو 3 = لو ص

أى لو 3 لو س = لو ص ∴ لو س$^{\text{لو 3}}$ = لو ص

∴ س$^{\text{لو 3}}$ = ص أى أن 3$^{\text{لو س}}$ = س$^{\text{لو 3}}$

(٥) ∵ لو$_{جـ}$ لو$_{ب}$ لو$_{أ}$ أ$^{ب^{جـ}}$

= لو$_{جـ}$ لو$_{ب}$ (ب^{جـ} لو$_{أ}$ أ) = لو$_{جـ}$ لو$_{ب}$ ب^{جـ}

= لو$_{جـ}$ (جـ لو$_{ب}$ ب) = لو$_{جـ}$ جـ = 1

(٦) ∵ ب^{س} − 2 ب$^{-س}$ = 1

∴ ب^{2س} − ب^{س} − 2 = 0

∴ (ب^{س} + 1) (ب^{س} − 2) = 0

∴ ب^{س} = −1 (مرفوض) أ، ب^{س} = 2

ومنها س = لو$_{ب}$ 2

(٧) ∵ $\frac{1}{\text{لو}_{2}\text{ س}}$ + $\frac{1}{\text{لو}_{4}\text{ س}}$ + $\frac{1}{\text{لو}_{8}\text{ س}}$ + $\frac{1}{\text{لو}_{16}\text{ س}}$ = 5

∴ لو$_{س}$ 2 + لو$_{س}$ 4 + لو$_{س}$ 8 + لو$_{س}$ 16 = 5

∴ لو$_{س}$ (2 × 4 × 8 × 16) = 5

∴ لو$_{س}$ 1024 = 5

∴ س^{5} = 1024 = (4)^{5} ∴ س = 4

(٨) ∵ لو 1 = صفر ، لو 10 = 1

، ∴ لو أ ∈]0 ، 1[∴ أ ∈]1 ، 10[

(٩) برسم منحنى الدالة د (أ) = لو$_{3}$ أ

نجد أن إذا كانت أ ∈]0 ، 9]

فإن: لو$_{3}$ أ ∈]−∞ ، 2]

(١٠) ∵ 2$^{\text{لو}_{2}(\text{س}+4)}$ + 3$^{\text{لو}_{3}(\text{س}+5)}$ = (25)$^{\text{لو}_{5} 7}$

∴ (س + 4) + (س + 5) = 5$^{2\,\text{لو}_{5} 7}$

= 5$^{\text{لو}_{5} 49}$ = 49

∴ 2 س + 9 = 49 ∴ 2 س = 40

∴ س = 20 ∴ م.ح = {20}

(١١) ∵ لو$_{ص}$ س = لو$_{س}$ ص

∴ لو$_{ص}$ س = $\frac{1}{\text{لو}_{ص}\text{ س}}$ ∴ (لو$_{ص}$ س)^2 = 1

∴ لو$_{ص}$ س = ± 1

∴ س = ص أ، س = ص$^{-1}$ = $\frac{1}{\text{ص}}$

∴ الإجابتين أ ، ب صحيحتين

∴ الإجابة رقم (د)

(١٢) ∵ 3^{أ} = 5^{ب} ∴ أ لو 3 = ب لو 5

∴ $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{\text{لو 5}}{\text{لو 3}}$ = لو$_{3}$ 5

، ∵ 3^{أ} = 7^{جـ} ∴ أ لو 3 = جـ لو 7

∴ $\frac{أ}{جـ}$ = $\frac{\text{لو 7}}{\text{لو 3}}$ = لو$_{3}$ 7

∴ $\frac{أ}{ب}$ + $\frac{أ}{جـ}$ = لو$_{3}$ 5 + لو$_{3}$ 7 = لو$_{3}$ 35

(١٣) ∵ $لو_٢$ س + $لو_٤$ س + $لو_٨$ س = ١١

∴ $\frac{لو س}{لو ٢} + \frac{لو س}{لو ٤} + \frac{لو س}{لو ٨} = ١١$

∴ $\frac{لو س}{لو ٢} + \frac{لو س}{٢ لو ٢} + \frac{لو س}{٣ لو ٢} = ١١$

∴ $\frac{٦ لو س + ٣ لو س + ٢ لو س}{٦ لو ٢} = ١١$

∴ ١١ لو س = ١١ × ٦ لو ٢

∴ لو س = ٦ لو ٢ = لو $٢^٦$ = لو ٦٤

∴ س = ٦٤

(١٤) ∵ $لو_٢$ ٣ × $لو_٣$ ٤ × $لو_٤$ ٥ × ... × $لو_ن$ (ن + ١) = ١٠

∴ $\frac{لو ٣}{لو ٢} \times \frac{لو ٤}{لو ٣} \times \frac{لو ٥}{لو ٤} \times ... \times \frac{لو (ن+١)}{لو ن} = ١٠$

∴ لو (ن + ١) = ١٠ لو ٢

∴ لو (ن + ١) = لو $٢^{١٠}$

∴ ن + ١ = ١٠٢٤ ∴ ن = ١٠٢٣

(١٥) ∵ د (س) = لو $٢^س$ ∴ د (س) = س لو ٢

∴ د (س) دالة خطية يمثلها خط مستقيم ميله = لو ٢

∴ الإجابة رقم (جـ)

٢

(١) المقدار = $لو_٣ \left(\frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٩} \times \frac{٩}{٢٧} \times ..... \times \frac{٢٧}{٨١}\right)$

= $لو_٣ \left(\frac{١}{٨١}\right) = لو_٣ ٣^{-٤} = -٤$

(٢) المقدار = لو ظا ١° + لو ظا ٢° + ... + لو ظا ٤٥° + ... + لو ظا ٨٨° + لو ظا ٨٩°

= لو (ظا ١° ظا ٢° ... ظا ٤٥° ... ظا ٨٨° ظا ٨٩°)

= لو (ظا ١° ظا ٢° ... ظا ٤٥° ... ظتا ٢° ظتا ١°)

= لو ظا ٤٥° = لو ١ = صفر

(٣) المقدار = لو ظا ١° × لو ظا ٢° × ... لو ظا ٤٥° × ... × لو ظا ٧٣°

= لو ظا ١° × لو ظا ٢° × ... × لو ١ × ... × لو ظا ٧٣°

= صفر

٣ ∵ $لو_{ب^٢} س^٢ = \frac{لو س^٢}{لو ب^٢} = \frac{٢ لو س}{٢ لو ب} = \frac{لو س}{لو ب}$

= $لو_ب$ س

، ∵ $لو_{ب^٣} س^٣ = \frac{لو س^٣}{لو ب^٣} = \frac{٣ لو س}{٣ لو ب} = \frac{لو س}{لو ب}$

= $لو_ب$ س وهكذا

$لو_{ب^ن} س^ن = \frac{لو س^ن}{لو ب^ن} = \frac{ن لو س}{ن لو ب} = \frac{لو س}{لو ب}$

= $لو_ب$ س

∴ $لو_ب$ س + $لو_{ب^٢} س^٢$ + $لو_{ب^٣} س^٣$ + ... + $لو_{ب^ن} س^ن$

= $لو_ب$ س + $لو_ب$ س + $لو_ب$ س + ... + $لو_ب$ س

= ن $لو_ب$ س = $لو_ب س^ن$

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الثانية

١

الزيادة في طول نصف القطر

= $\left(\frac{٣ \times ٣٦ \pi}{٤ \pi}\right)^{\frac{١}{٣}} - \left(\frac{٣ \times \frac{٣٢}{٣} \pi}{٤ \pi}\right)^{\frac{١}{٣}}$

= $(٢٧)^{\frac{١}{٣}} - (٨)^{\frac{١}{٣}}$ = ١ وحدة طول.

٢

(١) $حـ_{١٠}$ (مجموع العشرة أعداد الأولى)

= ٢ ($٢^{١٠}$ − ١) = $٢^{١١}$ − ٢ = ٢٠٤٦

(٢) $حـ_ن$ = ١٣١٠٧٠

∴ ٢ ($٢^ن$ − ١) = ١٣١٠٧٠

∴ $٢^ن$ − ١ = ٦٥٥٣٥ ∴ $٢^ن$ = ٦٥٥٣٦

∴ $٢^ن = ٢^{١٦}$ ∴ ن = ١٦

∴ عدد الحدود = ١٦ حدًا

٣

(١) د (٠) = ٧٠ − ٤ $لو_٢$ ١ = ٧٠ درجة

(٢) د (٧) = ٧٠ − ٤ $لو_٢$ ٨ = ٥٨ درجة

٤

(١) د (٠) = ٨٥ − ٢٥ لو ١ = ٨٥ ٪

(٢) د (٣) = ٨٥ − ٢٥ لو ٤ ≃ ٦٩,٩٥ ٪

(٣) د (١٢) = ٨٥ − ٢٥ لو ١٣ ≃ ٥٧,١٥ ٪

٥

(١) د (٣٦٠٠) = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٣٦٠٠ = ٣٦٠ جنيهًا.

(٢) د (٨٠٠٠) = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٨٠٠٠ + ١٠٠ لو (٨٠٠٠ − ٤٩٩٩)

= ١١٤٧,٧٢٦٦ جنيهًا.

٦

(١) الرقم الهيدروجيني = − لو $١٠^{-٣}$

= ٣ لو ١٠ = ٣

(٢) عندما يكون الرقم الهيدروجيني = ٩

∴ ٩ = − لو (H^+) ∴ لو (H^+) = −٩

∴ $H^+ = ١٠^{-٩}$

أي أن تركيز الهيدروجين = $١٠^{-٩}$

٧

(١) أ هو عدد السكان الابتدائي ، ن عدد السنوات

∴ عدد السكان بعد ن سنة = أ $\left(١ + \frac{٧}{١٠٠}\right)^ن$

= أ $(١,٠٧)^ن$

∴ عدد السكان بعد عام = أ (١,٠٧)

(٢) عندما يتضاعف عدد السكان :

∴ ٢ أ = أ $(١,٠٧)^ن$ ∴ ٢ = $(١,٠٧)^ن$

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ ن لو ١,٠٧ = لو٢ ∴ ن ≃ ١٠ سنوات.

٨

ع = $١٠^٥ (١,٣)^{ن - ٢٠١٠}$

(١) عام ٢٠١٥ يكون عدد السكان

ع = $١٠^٥ (١,٣)^{٢٠١٥ - ٢٠١٠}$ = ٣٧١٢٩٣ نسمة.

(٢) عندما يصبح عدد السكان ١,٤ مليون نسمة

∴ ١,٤ × $١٠^٦ = ١٠^٥ (١,٣)^{ن - ٢٠١٠}$

∴ $(١,٣)^{ن - ٢٠١٠}$ = ١٤

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ (ن − ٢٠١٠) لو ١,٣ = لو ١٤

∴ ن − ٢٠١٠ ≃ ١٠ ∴ ن ≃ ٢٠٢٠

٩

(١) ∵ د = لو $\frac{ش}{ش_٠}$

∴ د = لو $\frac{١,٥ \times ١٠^٦ ش_٠}{ش_٠}$ = لو (١,٥ × $١٠^٦$)

≃ ٦,٢

أي أن الزلزال درجته على مقياس ريختر = ٦,٢

(٢) عندما تكون درجة الزلزال (د) = ٨

∴ ٨ = لو $\frac{ش}{ش_٠}$ ∴ $\frac{ش}{ش_٠} = ١٠^٨$

∴ ش = $١٠^٨$ $ش_٠$

أي أن شدة الزلزال تعادل $١٠^٨$ مرة قدر الشدة الابتدائية.

١٠

∵ ك = $ك_٠ (٠,٩)^ن$

∴ $\frac{٤٠}{١٠٠} ك_٠ = ك_٠ (٠,٩)^ن$

∴ ٠,٤ = $(٠,٩)^ن$ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ ن لو ٠,٩ = لو ٠,٤

∴ ن = $\frac{لو ٠,٤}{لو ٠,٩}$ ≃ ٩ سنوات.

١١

بفرض أن الكفاءة الابتدائية للآلة $أ_٠$

∴ أ = $أ_٠ \left(١ - \frac{٥}{١٠٠}\right)^ن$

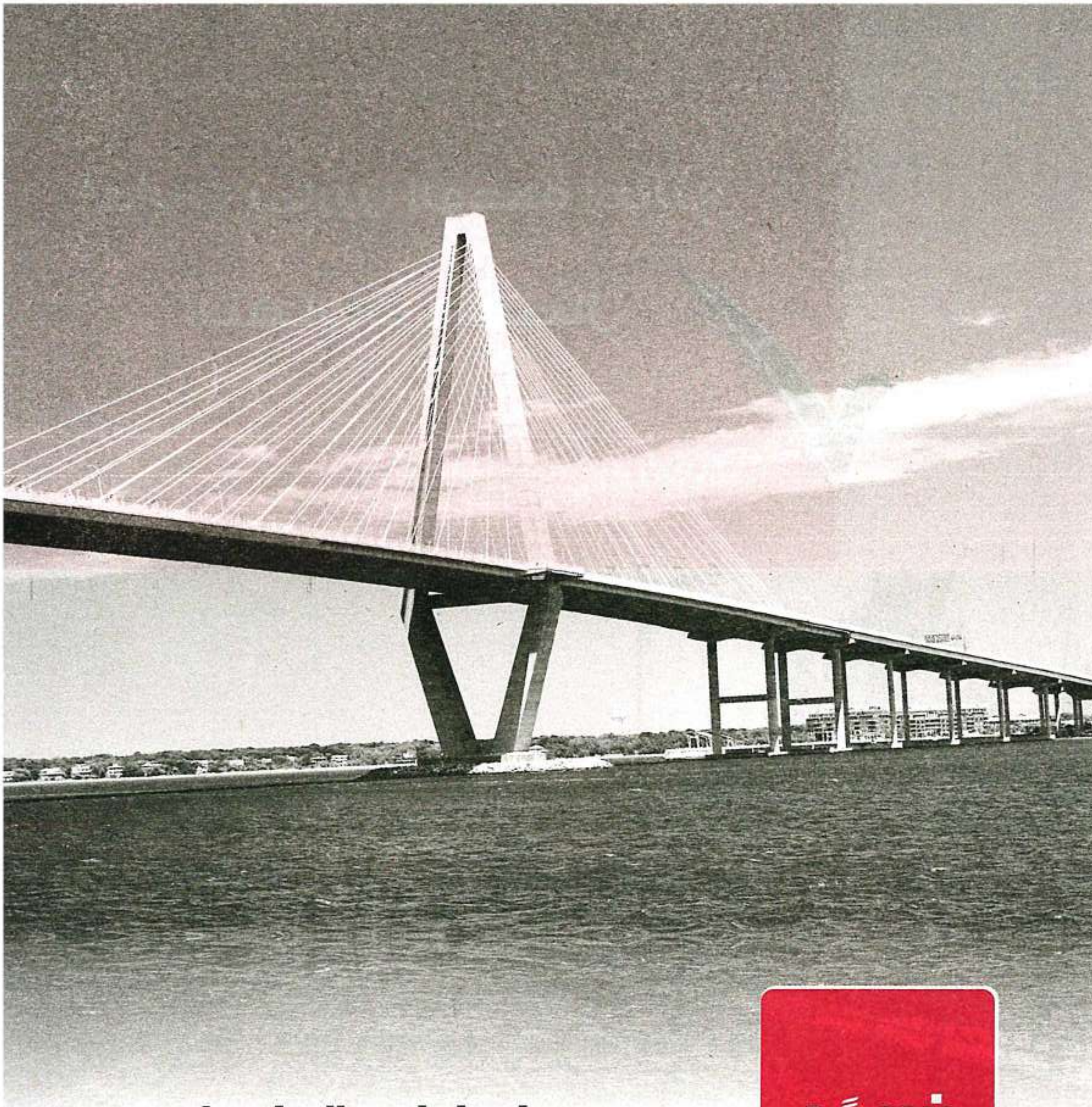
عندما تتوقف الآلة عن التشغيل

∴ $\frac{٦٠}{١٠٠} أ_٠ = أ_٠ (٠,٩٥)^ن$

∴ ٠,٦ = $(٠,٩٥)^ن$ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ ن لو ٠,٩٥ = لو ٠,٦

∴ ن ≃ ١٠ سنوات



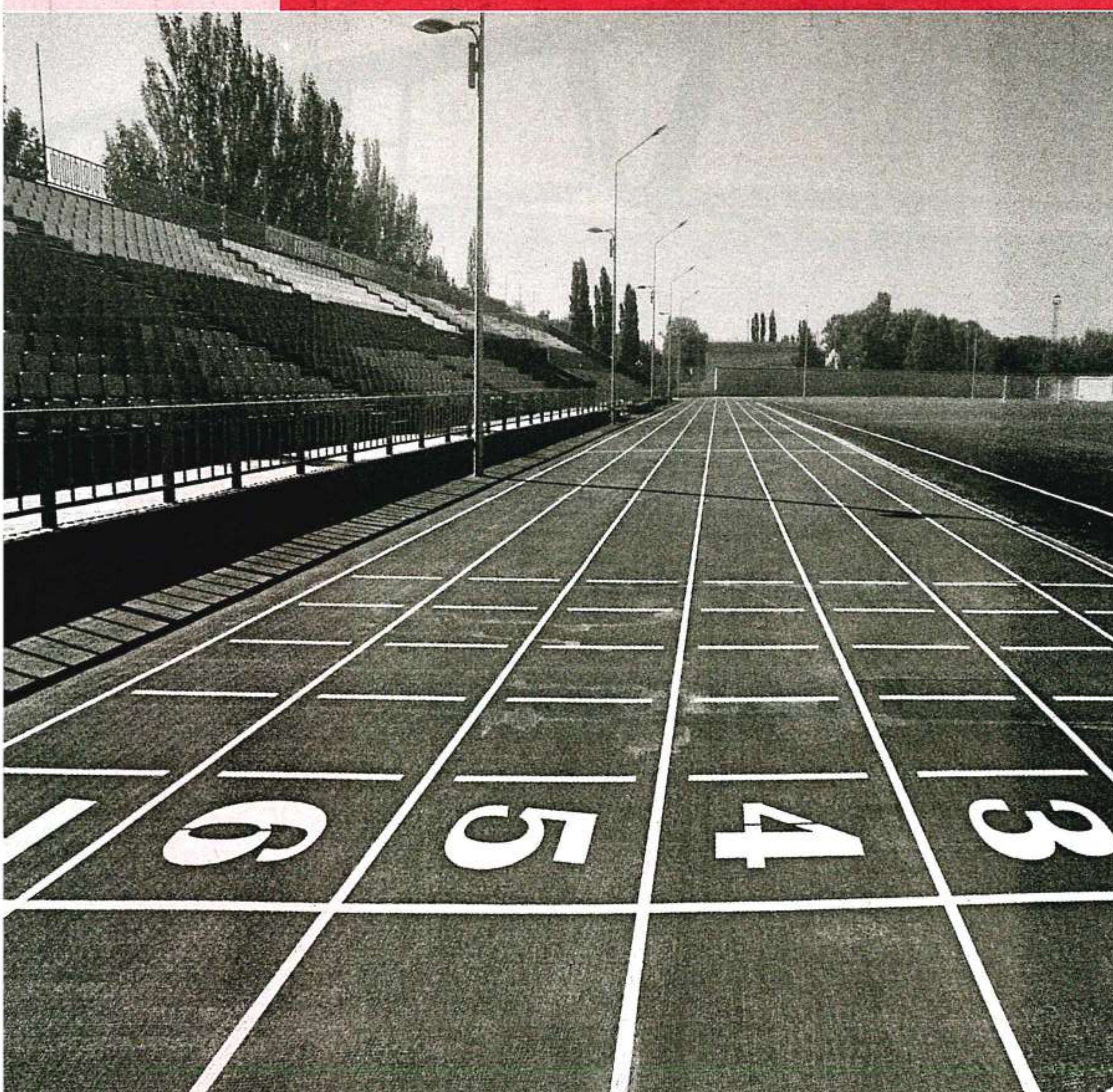
ثانيًا

إجابات تمارين

التفاضل وحساب المثلثات

إجابات تمارين الوحدة الثالثة

النهايات والاتصال



إجابات الوحدة الثالثة

إجابات تمارين 12

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (أ) ③ (د) ④ (جـ)

⑤ أولًا : (أ) ثانيًا : (جـ)
ثالثًا : (د) رابعًا : (د)

⑥ أولًا : (أ) ثانيًا : (ب)
ثالثًا : (د) رابعًا : (ب)
خامسًا : (د) سادسًا : (ب)
سابعًا : (أ)

⑦ أولًا : (جـ) ثانيًا : (د)
ثالثًا : (د) رابعًا : (جـ)
خامسًا : (د) سادسًا : (ب)
سابعًا : (ب) ثامنًا : (ب)
تاسعًا : (جـ) عاشرًا : (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

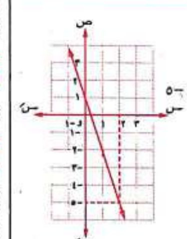
1

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د (س)	١٣,٥	١٣,٩٥	١٣,٩٩٥	←	١٤	→	١٤,٠٠٥	١٤,٠٥	١٤,٥

∴ نهــا (س ← ٢) د (س) = ١٤

2

① بيانيًا :



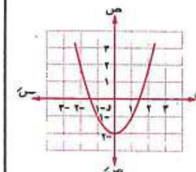
∴ نهــا (س ← ٢) (١ − ٣ س) = −٥

عدديًا :

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د (س)	−٤,٧	−٤,٩٧	−٤,٩٩٧	←	−٥	→	−٥,٠٠٣	−٥,٠٣	−٥,٣

∴ نهــا (س ← ٢) (١ − ٣ س) = −٥

② بيانيًا :



∴ نهــا (س ← ٠) (س² − ٢)
= −٢

عدديًا :

س	−٠,١	−٠,٠١	−٠,٠٠١	←	٠	→	٠,٠٠١	٠,٠١	٠,١
د (س)	−١,٩٩	−١,٩٩٩٩	−١,٩٩٩٩٩٩	←	−٢	→	−١,٩٩٩٩٩٩	−١,٩٩٩٩	−١,٩٩

∴ نهــا (س ← ٠) (س² − ٢) = −٢

3

① غير معرفة. ② ٢
③ ٢ ④ غير موجودة.

4

① ١ ② ٢ ③ ١ ④ غير موجودة.

5

① ٢ ② ١ ③ ١
④ ١ ⑤ ١,٥ ⑥ ١,٥

6

① ١ ② −١ ③ ٢ ④ غير موجودة.

7

① ٢ ② ١ ③ ١ ④ ١

8

① غير معرفة. ② ∞
③ ∞ ④ ∞

9

① غير معرفة. ② ∞
③ − ∞ ④ غير موجودة.

10

① ١ ② ١ ③ ٤ ④ غير موجودة.
⑤ غير معرفة. ⑥ ٢ ⑦ ٢ ⑧ ٢

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (جـ) ② (جـ) ③ (د) ④ (أ)
⑤ (د) ⑥ (أ) ⑦ (جـ)

إرشادات الحل :

① لاحظ أن كلًا من الأشكال (أ) ، (ب) ، (د) تحتوى على قفزة عند س = ٢ وبالتالى لا توجد للدالة نهاية عند س = ٢
أما شكل (جـ) يحتوى على فجوة عند س = ٢ وبالتالى توجد للدالة نهاية عند س = ٢

② عندما س ← ٠
∴ طول الوتر أب ← طول القطر (٢ نق)
أى أن : ص ← ١٠

③ عندما θ ← π/٢
∴ ص ← √((١٠)² + (١٠)²)
أى أن : ص ← ١٠√٢

④ ∵ المنحنى يقطع محور السينات عند س = ٢
∴ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٠)
، ∵ الدالة كثيرة حدود
∴ نهــا (س ← ٢) د (س) = صفر

⑤ ∵ المنحنى يقطع محور الصادات عند ص = ٢
∴ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٢)
، ∵ الدالة كثيرة حدود
∴ نهــا (س ← ٠) د (س) = ٢

⑥ ∵ نهــا (س ← ٠) د (س)
= نهــا (س ← −١) د (س) + نهــا (س ← ٢) د (س)
∴ ١ = −٢ + أ ∴ أ = ٣

⑦ ∵ نهــا (س ← أ) د (س)
= نهــا (س ← −١) د (س) + نهــا (س ← ٢) د (س)
∴ نهــا (س ← أ) د (س) = −٣ + ١ = −٢
∴ جميع قيم أ ∈]−١ ، ٢[
تحقق أن نهــا (س ← أ) د (س) = −٢
∴ أكبر قيمة للعدد أ هى ٢

إجابات تمارين 13

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (ب) ③ (جـ) ④ (أ)
⑤ (جـ) ⑥ (ب) ⑦ (ب) ⑧ (ب)
⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (أ) ⑫ (د)
⑬ (ب) ⑭ (جـ) ⑮ (د) ⑯ (ب)
⑰ (جـ) ⑱ (ب) ⑲ (جـ) ⑳ (جـ)
㉑ (ب) ㉒ (ب) ㉓ (د) ㉔ (جـ)
㉕ (أ) ㉖ (د) ㉗ (أ) ㉘ (جـ)
㉙ (ب) ㉚ (د) ㉛ (أ) ㉜ (أ)
㉝ (ب) ㉞ (جـ) ㉟ (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

1

① نهــا (س ← ٥) ((س − ٥)(س + ٥))/((س − ٥)) = نهــا (س ← ٥) (س + ٥)
= ١٠

② نهــا (س ← ٢) ((س − ٢)(س − ٥))/((س − ٢)) = نهــا (س ← ٢) (س − ٥)
= −٣

③ $\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{س^٢}{س^٢(٣س-٢)} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{١}{٣س-٢}$

$= \frac{-١}{٢}$

④ $\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{٥(س-٢)}{٤(س-٢)} = \frac{٥}{٤}$

⑤ $\underset{س\to ٤}{\text{نها}}\ \frac{٤(س-٤)(س+٤)}{(س-٤)}$

$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}}\ ٤(س+٤) = ٣٢$

⑥ $\underset{س\to ٤}{\text{نها}}\ \frac{٢(س-٤)}{(س-٤)(س+٣)}$

$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}}\ \frac{٢}{س+٣} = \frac{٢}{٧}$

⑦ $\underset{س\to -٣}{\text{نها}}\ \frac{(س+٣)(س+١)}{(س-٣)(س+٣)}$

$= \underset{س\to -٣}{\text{نها}}\ \frac{س+١}{س-٣} = \frac{-٢}{-٦} = \frac{١}{٣}$

⑧ $\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{س(س-٢)}{(س-٢)(س+١)}$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{س}{س+١} = \frac{٢}{٣}$

⑨ $\underset{س\to -١}{\text{نها}}\ \frac{(س-٤)(س+١)}{(س-٢)(س+١)}$

$= \underset{س\to -١}{\text{نها}}\ \frac{س-٤}{س-٢} = \frac{٥}{٣}$

⑩ $\underset{س\to \frac{١}{٢}}{\text{نها}}\ \frac{(٢س-١)(س-٢)}{(٢س-١)}$

$= \underset{س\to \frac{١}{٢}}{\text{نها}}\ (س-٢) = -\frac{٣}{٢}$

⑪ $\underset{س\to ٩}{\text{نها}}\ \frac{-(س-٩)}{(س-٩)(س+٩)}$

$= \underset{س\to ٩}{\text{نها}}\ \frac{-١}{س+٩} = \frac{-١}{١٨}$

⑫ $\underset{س\to ١}{\text{نها}}\ \frac{(٣س+٤)(س-١)}{(س-١)(س+١)}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}}\ \frac{٣س+٤}{س+١} = \frac{٧}{٢}$

⑬ $\underset{س\to \frac{٣}{٤}}{\text{نها}}\ \frac{(٤س-٣)(٤س+٣)}{٢(٤س-٣)}$

$= \underset{س\to \frac{٣}{٤}}{\text{نها}}\ \frac{٤س+٣}{٢} = ٣$

⑭ $\underset{س\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{(٢س+١)(س-٣)}{(٢س+٣)(س-٣)}$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{٢س+١}{٢س+٣} = \frac{٧}{٩}$

⑮ $\underset{س\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{(س-٣)(س+٥)}{٥(س-٣)(س+٣)}$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{س+٥}{٥(س+٣)} = \frac{٤}{١٥}$

⑯ $\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)}{٣(س-٢)(س+٢)}$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{س^٢+٢س+٤}{٣(س+٢)} = \frac{١٢}{١٢} = ١$

٢

① $\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{(س+٢-٢)(س+٢+٢)}{س(س+١)}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{س+٤}{س+١} = ٤$

② $\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{٤س^٢-٤س}{٥س}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{٤س(س-١)}{٥س}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{٤(س-١)}{٥} = \frac{-٤}{٥}$

③ $\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{(س-٣-١)(س-٣+١)}{(س-٢)(٢س+١)}$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{س-٤}{٢س+١} = \frac{-٢}{٥}$

④ $\underset{س\to -٢}{\text{نها}}\ \frac{(س+٢+١)[(س+٢)^٢-(س+٢)+١]}{٢س(س+٣)}$

$= \underset{س\to -٢}{\text{نها}}\ \frac{(س+٢)^٢-(س+٢)+١}{٢س} = \frac{-١}{٢}$

⑤ $\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{(س^٢-٤)(س^٢+٥)}{س-٢}$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{(س-٢)(س+٢)(س^٢+٥)}{(س-٢)}$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ (س+٢)(س^٢+٥) = ٣٦$

⑥ $\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{(س-٢)^٢(س+٢)^٢}{(س-٢)}$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ (س-٢)(س+٢)^٢ = \text{صفر}$

⑦ $\underset{س\to ١}{\text{نها}}\ \frac{٢(س-١)}{(س-١)^٥+٢(س-١)}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}}\ \frac{٢(س-١)}{(س-١)[(س-١)^٤+٢]}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}}\ \frac{٢}{(س-١)^٤+٢} = ١$

⑧ $\underset{س\to -٢}{\text{نها}}\ \frac{(س+٢)}{(س+٢)(س-٢)(س^٢+٤)}$

$= \underset{س\to -٢}{\text{نها}}\ \frac{١}{(س-٢)(س^٢+٤)}$

$= -\frac{١}{٣٢}$

⑨ $\underset{س\to ٩}{\text{نها}}\ \frac{(\sqrt{س}-٣)(\sqrt{س}+٤)}{(\sqrt{س}-٣)(\sqrt{س}+٣)}$

$= \underset{س\to ٩}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{س}+٤}{\sqrt{س}+٣} = \frac{٧}{٦}$

⑩ $\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{١}{س} \times \frac{٢-(٢+س)}{٢(٢+س)}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{-س}{٢س(س+٢)}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{-١}{٢(س+٢)} = \frac{-١}{٤}$

⑪ $\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{س^٣(س-٢)-٦(س-٢)}{(س-٢)(س+٣)}$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{(س-٢)(س^٣-٦)}{(س-٢)(س+٣)}$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{س^٣-٦}{س+٣} = \frac{٢}{٥}$

⑫ $\underset{س\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{٥}{س} + \underset{س\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{س(س-٣)}{س-٣}$

$= \frac{٥}{٣} + ٣ = \frac{١٤}{٣}$

⑬ $\underset{س\to -١}{\text{نها}}\ \frac{س^٢-٣س-٤}{س^٢-١}$

$= \underset{س\to -١}{\text{نها}}\ \frac{(س+١)(س-٤)}{(س+١)(س-١)}$

$= \underset{س\to -١}{\text{نها}}\ \frac{س-٤}{س-١} = \frac{٥}{٢}$

⑭ $\underset{س\to ١}{\text{نها}}\ \left(\frac{١}{س-١} - \frac{٣}{(س-١)(س^٢+س+١)}\right)$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}}\ \left(\frac{س^٢+س+١-٣}{(س-١)(س^٢+س+١)}\right)$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}}\ \frac{(س-١)(س+٢)}{(س-١)(س^٢+س+١)}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}}\ \frac{س+٢}{س^٢+س+١} = ١$

٣

* باستخدام القسمة المطولة أو القسمة التركيبية فى المسائل التالية نقسم كلاً من البسط والمقام على العامل الصفرى فنجد أن :

① $\underset{س\to ٤}{\text{نها}}\ \frac{(س-٤)(س^٢+٤س+١)}{س-٤}$

$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}}\ (س^٢+٤س+١) = ٣٣$

② $\underset{س\to ١}{\text{نها}}\ \frac{(س-١)(س^٢+س-١)}{(س-١)(س+٢)}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}}\ \frac{س^٢+س-١}{س+٢} = \frac{١}{٣}$

③ $\lim_{\text{س}\to 4} \frac{\text{س}(\text{س}-4)(\text{س}^2+4\text{س}-5)}{(\text{س}-4)}$

$= \lim_{\text{س}\to 4} \text{س}(\text{س}^2+4\text{س}-5) = 108$

④ $\lim_{\text{س}\to -2} \frac{(\text{س}+2)(2\text{س}^2-\text{س}+2)}{(\text{س}+2)(\text{س}^2-2\text{س}+4)}$

$= \lim_{\text{س}\to -2} \frac{2\text{س}^2-\text{س}+2}{\text{س}^2-2\text{س}+4} = \frac{12}{12} = 1$

⑤ $\lim_{\text{س}\to -2} \frac{(\text{س}+2)^2}{(\text{س}-3)(\text{س}+2)^2}$

$= \lim_{\text{س}\to -2} \frac{1}{\text{س}-3} = \frac{-1}{5}$

⑥ $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{(\text{س}-1)^2(\text{س}-3)}{\text{س}(\text{س}-1)^2}$

$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}-3}{\text{س}} = -2$

٤

① $\lim_{\text{س}\to 9} \frac{(\sqrt{\text{س}}-3)(\sqrt{\text{س}}+3)}{(\text{س}-9)(\sqrt{\text{س}}+3)}$

$= \lim_{\text{س}\to 9} \frac{\text{س}-9}{(\text{س}-9)(\sqrt{\text{س}}+3)}$

$= \lim_{\text{س}\to 9} \frac{1}{\sqrt{\text{س}}+3} = \frac{1}{6}$

② $\lim_{\text{س}\to 5} \frac{(\sqrt{\text{س}-1}-2)(\sqrt{\text{س}-1}+2)}{(\text{س}-5)(\sqrt{\text{س}-1}+2)}$

$= \lim_{\text{س}\to 5} \frac{\text{س}-1-4}{(\text{س}-5)(\sqrt{\text{س}-1}+2)}$

$= \lim_{\text{س}\to 5} \frac{1}{\sqrt{\text{س}-1}+2} = \frac{1}{4}$

③ $\lim_{\text{س}\to -1} \frac{\text{س}+1}{\sqrt{\text{س}+5}-2} \times \frac{\sqrt{\text{س}+5}+2}{\sqrt{\text{س}+5}+2}$

$= \lim_{\text{س}\to -1} \frac{(\text{س}+1)(\sqrt{\text{س}+5}+2)}{\text{س}+5-4}$

$= \lim_{\text{س}\to -1} (\sqrt{\text{س}+5}+2) = 4$

④ $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{(\sqrt{3-2\text{س}}-\sqrt{3})(\sqrt{3-2\text{س}}+\sqrt{3})}{\text{س}(\sqrt{3-2\text{س}}+\sqrt{3})}$

$= \lim_{\text{س}\to 0} \frac{3-2\text{س}-3}{\text{س}\left[\sqrt{3-2\text{س}}+\sqrt{3}\right]}$

$= \lim_{\text{س}\to 0} \frac{-2}{\sqrt{3-2\text{س}}+\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

⑤ $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{(\sqrt{2\text{س}+9}-3)(\sqrt{2\text{س}+9}+3)}{\text{س}(\text{س}+1)(\sqrt{2\text{س}+9}+3)}$

$= \lim_{\text{س}\to 0} \frac{2\text{س}+9-9}{\text{س}(\text{س}+1)(\sqrt{2\text{س}+9}+3)}$

$= \lim_{\text{س}\to 0} \frac{2}{(\text{س}+1)(\sqrt{2\text{س}+9}+3)} = \frac{1}{3}$

⑥ $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}(\text{س}-5)}{(\sqrt{\text{س}+4}-2)} \times \frac{(\sqrt{\text{س}+4}+2)}{(\sqrt{\text{س}+4}+2)}$

$= \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}(\text{س}-5)(\sqrt{\text{س}+4}+2)}{\text{س}+4-9}$

$= \lim_{\text{س}\to 0} \text{س}(\sqrt{\text{س}+4}+2) = 20$

⑦ $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{(\text{س}-2)(\text{س}+2)(\sqrt{5\text{س}-6}+2)}{(\sqrt{5\text{س}-6}-2)(\sqrt{5\text{س}-6}+2)}$

$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{(\text{س}-2)(\text{س}+2)(\sqrt{5\text{س}-6}+2)}{5\text{س}-6-4}$

$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{(\text{س}-2)(\text{س}+2)(\sqrt{5\text{س}-6}+2)}{5(\text{س}-2)}$

$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{(\text{س}+2)(\sqrt{5\text{س}-6}+2)}{5} = 6$

⑧ $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{(\sqrt{1+\text{س}}-\sqrt{1-\text{س}})(\sqrt{1+\text{س}}+\sqrt{1-\text{س}})}{2\text{س}(\sqrt{1+\text{س}}+\sqrt{1-\text{س}})}$

$= \lim_{\text{س}\to 0} \frac{1+\text{س}-1+\text{س}}{2\text{س}(\sqrt{1+\text{س}}+\sqrt{1-\text{س}})}$

$= \lim_{\text{س}\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\text{س}}+\sqrt{1-\text{س}}} = \frac{1}{2}$

⑨ $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{(\text{س}-1)(\sqrt{3\text{س}-2}+\sqrt{\text{س}})}{(\sqrt{3\text{س}-2}-\sqrt{\text{س}})(\sqrt{3\text{س}-2}+\sqrt{\text{س}})}$

$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{(\text{س}-1)(\sqrt{3\text{س}-2}+\sqrt{\text{س}})}{3\text{س}-2-\text{س}}$

$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{(\text{س}-1)(\sqrt{3\text{س}-2}+\sqrt{\text{س}})}{2(\text{س}-1)}$

$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\sqrt{3\text{س}-2}+\sqrt{\text{س}}}{2} = 1$

⑩ $\lim_{\text{س}\to -1} \frac{\sqrt{\text{س}^2+8}-3}{\text{س}+1} \times \frac{\sqrt{\text{س}^2+8}+3}{\sqrt{\text{س}^2+8}+3}$

$= \lim_{\text{س}\to -1} \frac{\text{س}^2+8-9}{(\text{س}+1)(\sqrt{\text{س}^2+8}+3)}$

$= \lim_{\text{س}\to -1} \frac{(\text{س}-1)(\text{س}+1)}{(\text{س}+1)(\sqrt{\text{س}^2+8}+3)}$

$= \lim_{\text{س}\to -1} \frac{\text{س}-1}{\sqrt{\text{س}^2+8}+3} = \frac{-1}{3}$

⑪ $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{(1-\text{س})(2+\sqrt{\text{س}^2+3})}{(2-\sqrt{\text{س}^2+3})(2+\sqrt{\text{س}^2+3})}$

$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{(1-\text{س})(2+\sqrt{\text{س}^2+3})}{4-\text{س}^2-3}$

$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{(1-\text{س})(2+\sqrt{\text{س}^2+3})}{(1-\text{س})(1+\text{س})}$

$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{2+\sqrt{\text{س}^2+3}}{1+\text{س}} = 2$

⑫ $\lim_{\text{س}\to 3} \frac{(\sqrt{\text{س}+1}-2)(\sqrt{\text{س}+1}+2)(\sqrt{\text{س}-2}+1)}{(\sqrt{\text{س}-2}-1)(\sqrt{\text{س}+1}+2)(\sqrt{\text{س}-2}+1)}$

$= \lim_{\text{س}\to 3} \frac{(\text{س}+1-4)(\sqrt{\text{س}-2}+1)}{(\text{س}-2-1)(\sqrt{\text{س}+1}+2)}$

$= \lim_{\text{س}\to 3} \frac{\sqrt{\text{س}-2}+1}{\sqrt{\text{س}+1}+2} = \frac{1}{2}$

⑬ $\lim_{\text{س}\to 4} \frac{(\sqrt{24-5\text{س}}-2)(\sqrt{24-5\text{س}}+2)(3+\sqrt{\text{س}+5})}{(3-\sqrt{\text{س}+5})(3+\sqrt{\text{س}+5})(\sqrt{24-5\text{س}}+2)}$

$= \lim_{\text{س}\to 4} \frac{(24-5\text{س}-4)(3+\sqrt{\text{س}+5})}{(9-\text{س}-5)(\sqrt{24-5\text{س}}+2)}$

$= \lim_{\text{س}\to 4} \frac{5(4-\text{س})(3+\sqrt{\text{س}+5})}{(4-\text{س})(\sqrt{24-5\text{س}}+2)}$

$= \lim_{\text{س}\to 4} \frac{5(3+\sqrt{\text{س}+5})}{\sqrt{24-5\text{س}}+2} = \frac{5\times 6}{4} = 7.5$

⑭ $\lim_{\text{س}\to 3} \frac{(\text{س}-3)(\text{س}+\sqrt{\text{س}+6})}{(\text{س}-\sqrt{\text{س}+6})(\text{س}+\sqrt{\text{س}+6})}$

$= \lim_{\text{س}\to 3} \frac{(\text{س}-3)(\text{س}+\sqrt{\text{س}+6})}{\text{س}^2-\text{س}-6}$

$= \lim_{\text{س}\to 3} \frac{(\text{س}-3)(\text{س}+\sqrt{\text{س}+6})}{(\text{س}-3)(\text{س}+2)}$

$= \lim_{\text{س}\to 3} \frac{\text{س}+\sqrt{\text{س}+6}}{\text{س}+2} = \frac{6}{5}$

٥ ∵ $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{د}(\text{س})-5}{\text{س}-2} = 1$ (لها وجود)

، ∵ $\lim_{\text{س}\to 2} (\text{س}-2) = 0$

∴ $\lim_{\text{س}\to 2} \text{د}(\text{س}) - 5 = 0$

∴ $\lim_{\text{س}\to 2} \text{د}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to 2} (5) = 5$

٦ ∵ $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{س}^2} = 5$

∴ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^2 \left(\text{ر}(\text{س})\right)$

① $\lim_{\text{س}\to 0} \text{د}(\text{س}) =$ صفر

② $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{س}} = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}^2\left(\text{ر}(\text{س})\right)}{\text{س}}$

$= \lim_{\text{س}\to 0} \text{س}\left(\text{ر}(\text{س})\right)$

$= \lim_{\text{س}\to 0} \text{س} \times \lim_{\text{س}\to 0} \text{ر}(\text{س}) = 0 \times 5 = 0$

٧ $\underset{س \to -1}{\text{نها}} \dfrac{(س+1)(س-أ)}{(س+1)} = 4$

∴ $\underset{س \to -1}{\text{نها}} (س-أ) = 4$

∴ $-1 - أ = 4$ ∴ $أ = -5$

---

٨ ∵ $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{س^2 + أس + ب}{س-1}$ موجودة وتساوى ٥

، ∵ المقام = صفر عند $س = 1$

∴ البسط = صفر عند $س = 1$

∴ $1 + أ + ب = 0$ ∴ $ب = -أ - 1$

∴ $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{س^2 + أس - أ - 1}{س-1} = 5$

∴ $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{(س^2-1) + (أس - أ)}{س-1} = 5$

∴ $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{(س-1)(س+1) + أ(س-1)}{(س-1)} = 5$

∴ $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{(س-1)(س+1+أ)}{(س-1)} = 5$

∴ $2 + أ = 5$ ∴ $أ = 3$ ومنها $ب = -4$

---

٩ $\underset{س \to 100}{\text{نها}} (0.2\, س^2 + 40\, س + 150)$

$= 6150$ جنيهًا

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (أ) ② (د) ③ (د) ④ (أ)

إرشادات لحل رقم ١

① ∵ $س\, د(س+1) = د(س) + س^2$

∴ $س\, د(س) + س = د(س) + س^2$

∴ $س\, د(س) - د(س) = س^2 - س$

∴ $(س-1)\, د(س) = س(س-1)$

∴ $د(س) = \dfrac{س(س-1)}{(س-1)} = س$

حيث $س \ne 1$ ∴ $\underset{س \to 1}{\text{نها}} د(س) = 1$

② ∵ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{مس + ك} - 3}{س}$

موجودة وتساوى ٢

، ∵ المقام = صفر عند $س = 0$

∴ البسط = ٠ عندما $س = 0$

∴ $\sqrt{ك} = 3$ ∴ $ك = 9$

، ∵ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{مس+9} - 3}{س} = 2$

∴ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{\left(\sqrt{مس+9} - 3\right)}{س} \times \dfrac{\left(\sqrt{مس+9} + 3\right)}{\left(\sqrt{مس+9} + 3\right)} = 2$

$\underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{مس + 9 - 9}{س\left(\sqrt{مس+9} + 3\right)} = 2$

∴ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{م}{\sqrt{مس+9} + 3} = 2$

∴ $\dfrac{م}{6} = 2$ ∴ $م = 12$

∴ $\dfrac{م}{ك} = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3}$

③ ∵ $2 \underset{س \to م}{\text{نها}} د(س)$

$- 5 \underset{س \to م}{\text{نها}} هـ(س) = 10$ (١)

، $\underset{س \to م}{\text{نها}} د(س) + \underset{س \to م}{\text{نها}} هـ(س) = 6$ (٢)

وبضرب المعادلة (٢) × ٥

∴ $5 \underset{س \to م}{\text{نها}} د(س)$

$+ 5 \underset{س \to م}{\text{نها}} هـ(س) = 30$ (٣)

بحل (١)، (٣):

∴ $7 \underset{س \to م}{\text{نها}} د(س) = 40$

∴ $\underset{س \to م}{\text{نها}} د(س) = \dfrac{40}{7}$

وبالتعويض فى (٢) :

∴ $\underset{س \to م}{\text{نها}} هـ(س) = 6 - \dfrac{40}{7} = \dfrac{2}{7}$

∴ $\underset{س \to م}{\text{نها}} \dfrac{د(س)}{هـ(س)} = \dfrac{\underset{س \to م}{\text{نها}} د(س)}{\underset{س \to م}{\text{نها}} هـ(س)} = \dfrac{\frac{40}{7}}{\frac{2}{7}}$

$= 20$

④ $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{2س^2 - ع(س)}{س-2}$

$= \underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{2س^2 - ع(س) + 8 - 8}{س-2}$

$= \underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{2س^2 - 8}{س-2} - \underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{ع(س) - 8}{س-2}$

$= \underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{2(س-2)(س+2)}{(س-2)}$

$- \underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{ع(س) - 8}{س-2}$

$= \underset{س \to 2}{\text{نها}} 2(س+2) - \underset{س \to 2}{\text{نها}} \dfrac{ع(س) - 8}{س-2}$

$= 8 - 7 = 1$

٢

① $\underset{س \to 5}{\text{نها}} \left[\dfrac{(س-5)(س+1)}{(س-5)(س-1)}\right]^2$

$= \underset{س \to 5}{\text{نها}} \left[\dfrac{س+1}{س-1}\right]^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$

② $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \sqrt{\dfrac{(س-1)(س+3)}{س(س-1)}}$

$= \underset{س \to 1}{\text{نها}} \sqrt{\dfrac{س+3}{س}} = \sqrt{4} = 2$

③ $\underset{س \to \sqrt{2}}{\text{نها}} \dfrac{\left(س-\sqrt{2}\right)\left(س+\sqrt{2}\right)}{\left(س-\sqrt{2}\right)\left(س+2\sqrt{2}\right)}$

$= \underset{س \to \sqrt{2}}{\text{نها}} \dfrac{س+\sqrt{2}}{س+2\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{2}{3}$

④ بالضرب بسطًا ومقامًا فى $(-س^3)$

$\underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{7س^3 - 2س^2 - 5}{4س^3 - 3س - 1}$

$= \underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{(س-1)(7س^2 + 5س + 5)}{(س-1)(4س^2 + 4س + 1)}$

$= \underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{7س^2 + 5س + 5}{4س^2 + 4س + 1} = \dfrac{17}{9}$

⑤ $\underset{ظاس \to 2}{\text{نها}} \dfrac{(ظاس - 3)(ظاس + 1)}{(ظاس - 3)(ظاس - 1)}$

$= \underset{ظاس \to 2}{\text{نها}} \dfrac{ظاس + 1}{ظاس - 1} = 2$

⑥ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{(حتاس - 1)(حتاس - 4)}{-(حتاس + 1)(حتاس - 1)}$

$= \underset{س \to 0}{\text{نها}} \dfrac{حتاس - 4}{-(حتاس + 1)} = \dfrac{3}{2}$

⑦ $\underset{(س-4) \to 4}{\text{نها}} \dfrac{س - 8}{س^2 - 64}$

$= \underset{س \to 8}{\text{نها}} \dfrac{س - 8}{(س-8)(س+8)}$

$= \underset{س \to 8}{\text{نها}} \dfrac{1}{س+8} = \dfrac{1}{16}$

⑧ $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{س^2 + 3 - 4 - 2(س^2 - س)}{(س^2 - س)\left(\sqrt{س^2+3} - 2\right)}$

$= \underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{-(س-1)^2}{س(س-1)\left(\sqrt{س^2+3} - 2\right)}$

$= \underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{-(س-1)}{س\left(\sqrt{س^2+3} - 2\right)} \times \dfrac{\sqrt{س^2+3} + 2}{\sqrt{س^2+3} + 2}$

$= \underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{-(س-1)\left(\sqrt{س^2+3} + 2\right)}{س(س^2 - 1)}$

$= \underset{س \to 1}{\text{نها}} \dfrac{-\left(\sqrt{س^2+3} + 2\right)}{س(س+1)} = \dfrac{-4}{2} = -2$

إجابات تمارين 14

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د)	(٢) (د)	(٣) (د)	(٤) (أ)
(٥) (أ)	(٦) (د)	(٧) (أ)	(٨) (جـ)
(٩) (ب)	(١٠) (ب)	(١١) (ب)	(١٢) (جـ)
(١٣) (د)	(١٤) (جـ)	(١٥) (جـ)	(١٦) (جـ)
(١٧) (د)	(١٨) (د)	(١٩) (جـ)	(٢٠) (د)
(٢١) (ب)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (ب)	(٢٤) (أ)
(٢٥) (ب)	(٢٦) (أ)	(٢٧) (ب)	(٢٨) (د)
(٢٩) (أ)	(٣٠) (أ)	(٣١) (ب)	(٣٢) (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٣ - ٢^٣}{\text{س} - ٢} = ٣(٢)^٢ = ١٢$

(٢) $\lim_{\text{س} \to -٥} \frac{\text{س}^٤ - (-٥)^٤}{\text{س} - (-٥)} = \frac{٤}{١}(-٥)^{٤-١}$

$= -٥٠٠$

(٣) $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^٥ - \text{أ}^٥}{\text{س} - \text{أ}} = ٥\,\text{أ}^٤$

(٤) $\lim_{\text{س} \to -٣} \frac{\text{س}^٤ - (-٣)^٤}{\text{س}^٥ - (-٣)^٥} = \frac{٤}{٥}(-٣)^{٤-٥} = \frac{-٤}{١٥}$

(٥) $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٦ - (٢)^٦}{\text{س}^٧ - (٢)^٧} = \frac{٦}{٧}(٢)^{٦-٧} = \frac{٣}{٧}$

(٦) $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{٢(\text{س}^٦ - ٦٤)}{\text{س}^٢ - ٤}$

$= ٢ \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٦ - (٢)^٦}{\text{س}^٢ - (٢)^٢}$

$= ٢ \times \frac{٦}{٢}(٢)^{٦-٢} = ٩٦$

(٧) $\lim_{\text{س} \to -٢} \frac{\text{س}^٦ - ٦٤}{٣(\text{س} + ٢)}$

$= \frac{١}{٣} \lim_{\text{س} \to -٢} \frac{\text{س}^٦ - (-٢)^٦}{\text{س} - (-٢)}$

$= \frac{١}{٣} \times ٦ \times (-٢)^٥ = -٦٤$

(٨) $\lim_{\text{س} \to -١} \frac{\text{س}(\text{س}^٩ + ١)}{\text{س}(\text{س}^٦ - ١)}$

$= \lim_{\text{س} \to -١} \frac{\text{س}^٩ - (-١)^٩}{\text{س}^٦ - (-١)^٦} = \frac{٩}{٦}(-١)^٣ = -\frac{٣}{٢}$

(٩) $-١ \times \lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^٩ - (١)^٩}{\text{س}^٧ - (١)^٧}$

$= -١ \times \frac{٩}{٧}(١)^{٩-٧} = \frac{-٩}{٧}$

(١٠) $\lim_{٢\text{س} \to -١} \frac{(٢\text{س})^٥ - (-١)^٥}{(٢\text{س})^٦ - (-١)^٦} = \frac{٥}{٦}(-١)^{-١}$

$= -\frac{٥}{٦}$

(١١) $\lim_{٣\text{س} \to -٢} \frac{(٣\text{س})^٥ - (-٢)^٥}{(٣\text{س})^٣ - (-٢)^٣}$

$= \frac{٥}{٣}(-٢)^{٥-٣} = \frac{٢٠}{٣}$

(١٢) $\lim_{٢\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}(١٦\text{س}^٤ - ٨١)}{\text{س}^٢(٢\text{س} - ٣)}$

$= \lim_{\text{س} \to \frac{٣}{٢}} \frac{١}{\text{س}} \times \lim_{٢\text{س} \to ٣} \frac{(٢\text{س})^٤ - (٣)^٤}{٢\text{س} - ٣}$

$= \frac{٢}{٣} \times ٤(٣)^٣ = ٧٢$

٢

(١) $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{-٧} - (٢)^{-٧}}{\text{س} - ٢} = -٧(٢)^{-٨} = \frac{-٧}{٢٥٦}$

(٢) $\lim_{\text{س} \to -١} \frac{\text{س}^{-٤} - (-١)^{-٤}}{\text{س}^{-١٨} - (-١)^{-١٨}} = \frac{-٤}{-١٨}(-١)^{١٤} = \frac{٢}{٩}$

(٣) $\lim_{\text{س} \to \sqrt{٢}} \frac{\text{س}^٧ - (\sqrt{٢})^٧}{\text{س}^٢ - (\sqrt{٢})^٢} = \frac{٧}{٢}(\sqrt{٢})^٥$

$= ١٤\sqrt{٢}$

(٤) $\lim_{\text{س} \to -\sqrt{٢}} \frac{\text{س}^٨ - (-\sqrt{٢})^٨}{\text{س}^٥ - (-\sqrt{٢})^٥} = \frac{٨}{٥}(-\sqrt{٢})^٣$

$= \frac{-١٦\sqrt{٢}}{٥}$

(٥) $\lim_{\sqrt{٢}\text{س} \to -٣} \frac{(\sqrt{٢}\,\text{س})^٦ - (-٣)^٦}{\sqrt{٢}\,\text{س} - (-٣)} = ٦(-٣)^٥$

$= -١٤٥٨$

(٦) $\lim_{\text{جاس} \to \frac{١}{٢}} \frac{\text{جا}^٣\text{س} - (\frac{١}{٢})^٣}{\text{جاس} - (\frac{١}{٢})} = ٣\left(\frac{١}{٢}\right)^٢ = \frac{٣}{٤}$

(٧) $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{-٥} - (٢)^{-٥}}{\text{س}^{-٧} - (٢)^{-٧}} = \frac{-٥}{-٧}(٢)^٢ = \frac{٢٠}{٧}$

(٨) $٨ \times \lim_{\text{س} \to -٢} \frac{\text{س}^{-٣} - (-\frac{١}{٨})}{\text{س}^{-٨} - \frac{١}{٢٥٦}}$

$= ٨ \times \lim_{\text{س} \to -٢} \frac{\text{س}^{-٣} - (-٢)^{-٣}}{\text{س}^{-٨} - (-٢)^{-٨}}$

$= ٨ \times \frac{-٣}{-٨}(-٢)^٥ = -٩٦$

(٩) $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{-٨} - (٢)^{-٨}}{\text{س} - ٢} = \frac{-٨}{١} \times (٢)^{-٨-١}$

$= \frac{-١}{٦٤}$

(١٠) $\lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{س}^{\frac{٧}{٢}} - ٤^{\frac{٧}{٢}}}{\text{س}^{\frac{٥}{٢}} - ٤^{\frac{٥}{٢}}} = \frac{٧}{٥} \times ٤ = \frac{٢٨}{٥}$

(١١) $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{\frac{١}{٧}} - ١^{\frac{١}{٧}}}{\text{س} - ١} = \frac{١}{٧}$

(١٢) $\lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - (٤)^{\frac{٣}{٢}}}{\text{س}^٢ - (٤)^٢} = \frac{٣}{٤}(٤)^{-\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٨}$

(١٣) $\lim_{\text{س} \to ١٦} \frac{\text{س}^{\frac{٧}{٤}} - ١٦^{\frac{٧}{٤}}}{\text{س} - ١٦} = \frac{\frac{٧}{٤}}{١} \times (١٦)^{\frac{٧}{٤} - ١} = ١٤$

(١٤) $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{\frac{٦}{٥}} - (١)^{\frac{٦}{٥}}}{\text{س}^٢ - (١)^٢} = \frac{٣}{٥}$

(١٥) $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{\frac{١}{٢}}[\text{س}^{١٠} - ١]}{\text{س}^{\frac{٢}{٣}}[\text{س}^٤ - ١]}$

$= \lim_{\text{س} \to ١} \text{س}^{-\frac{١}{٦}} \times \lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{١٠} - (١)^{١٠}}{\text{س}^٤ - (١)^٤}$

$= ١ \times \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢}$

(١٦) $\frac{١}{٢} \lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{س}^٤ - ٢٥٦}{\text{س} - ٤}$

$= \frac{١}{٢} \lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{س}^٤ - ٤^٤}{\text{س} - ٤} = \frac{١}{٢} \times ٤(٤)^٣ = ١٢٨$

(١٧) $\lim_{\text{س} \to -١} \frac{\frac{١}{\text{س}^٤}(\text{س}^٨ - ١)}{\frac{١}{\text{س}^٣}(\text{س}^٦ - ١)}$

$= \lim_{\text{س} \to -١} \frac{١}{\text{س}} \times \lim_{\text{س} \to -١} \frac{\text{س}^٨ - (-١)^٨}{\text{س}^٦ - (-١)^٦}$

$= -١ \times \frac{٨}{٦}(-١)^٢ = \frac{-٤}{٣}$

(١٨) $\lim_{٢\text{س} \to ١} \frac{\frac{٥}{١٦}[١٦\text{س}^٤ - ١]}{٢\text{س} - ١}$

$= \frac{٥}{١٦} \lim_{٢\text{س} \to ١} \frac{(٢\text{س})^٤ - (١)^٤}{٢\text{س} - ١}$

$= \frac{٥}{١٦} \times ٤(١)^٣ = \frac{٥}{٤}$

(١٩) $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{١٠} - (٢)^{١٠}}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)}$

$= \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{١}{\text{س} - ١} \times \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{١٠} - (٢)^{١٠}}{\text{س} - ٢}$

$= ١ \times ١٠(٢)^٩ = ٥١٢٠$

(٢٠) $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{١٧} - (١)^{١٧}}{(٣\text{س} + ٥)(\text{س} - ١)}$

$= \lim_{\text{س} \to ١} \frac{١}{٣\text{س} + ٥} \times \lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{١٧} - (١)^{١٧}}{\text{س} - ١}$

$= \frac{١}{٨} \times ١٧(١)^{١٦} = \frac{١٧}{٨}$

٣

(١) $\lim_{(١ + \text{س}) \to ١} \frac{(١ + \text{س})^{١٠} - (١)^{١٠}}{(١ + \text{س})^٧ - (١)^٧}$

$= \frac{١٠}{٧}(١)^٣ = \frac{١٠}{٧}$

(٢) $\lim_{(\text{س} - ٥) \to ١} \frac{(\text{س} - ٥)^٧ - ١^٧}{(\text{س} - ٥) - ١} = ٧(١)^٦ = ٧$

(٣) $\lim_{(\text{س} + ٣) \to ١} \frac{(\text{س} + ٣)^٥ - (١)^٥}{(\text{س} + ٣) - (١)} = ٥(١)^٤ = ٥$

(٤) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(\text{س} + ٢)^٥ - ٢^٥}{\text{س}} = ٥(٢)^٤ = ٨٠$

(٥) $\frac{١}{٦} \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(٣ + \text{هـ})^٤ - ٣^٤}{\text{هـ}}$

$= \frac{١}{٦} \times ٤(٣)^٣ = ١٨$

⑥ $4 \lim_{هـ \to 0} \frac{(1 + 4هـ)^8 - (1)^8}{4هـ}$

$= 4 \lim_{(1+4هـ) \to 1} \frac{(1 + 4هـ)^8 - (1)^8}{(1 + 4هـ) - (1)}$

$= 4 \times 8 \, (1)^7 = 32$

⑦ $\frac{-2}{5} \lim_{س \to 0} \frac{(1 - 2س)^5 - 1^5}{-2س}$

$= \frac{-2}{5} \lim_{(1-2س) \to 1} \frac{(1 - 2س)^5 - 1^5}{(1 - 2س) - 1}$

$= \frac{-2}{5} \times 5 \, (1)^4 = -2$

⑧ $3 \lim_{هـ \to 0} \frac{(س + 3هـ)^5 - س^5}{3هـ}$

$= 3 \lim_{(س+3هـ) \to س} \frac{(س + 3هـ)^5 - س^5}{(س + 3هـ) - س}$

$= 3 \times 5 س^4 = 15 س^4$

⑨ $\frac{-2}{51} \lim_{هـ \to 0} \frac{(س - 2هـ)^{17} - س^{17}}{-2هـ}$

$= \frac{-2}{51} \lim_{(س-2هـ) \to س} \frac{(س - 2هـ)^{17} - س^{17}}{(س - 2هـ) - س}$

$= \frac{-2}{51} \times 17 س^{16} = -\frac{2}{3} س^{16}$

⑩ $3 \lim_{(3س+2) \to -1} \frac{(3س + 2)^9 - (-1)^9}{(3س + 2) - (-1)}$

$= 3 \times 9 \, (-1)^8 = 27$

⑪ $\frac{3}{2} \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 3س} - 1}{3س}$

$= \frac{3}{2} \lim_{(1+3س) \to 1} \frac{(1 + 3س)^{\frac{1}{3}} - (1)^{\frac{1}{3}}}{(1 + 3س) - (1)}$

$= \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} (1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

⑫ $\lim_{س \to 1} \frac{\sqrt[3]{26 + س} - 3}{26 + س - 27}$

$= \lim_{(26+س) \to 27} \frac{(26 + س)^{\frac{1}{3}} - (27)^{\frac{1}{3}}}{(26 + س) - (27)}$

$= \frac{1}{3} (27)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27}$

⑬ $\lim_{س \to 7} \frac{(س + 25)^{\frac{1}{5}} - (32)^{\frac{1}{5}}}{(س + 25) - 32}$

$= \frac{\frac{1}{5}}{1} (32)^{\frac{1}{5} - 1} = \frac{1}{80}$

⑭ $\lim_{س - 4 \to -2} \frac{(س - 4)^5 - (-2)^5}{(س - 4) - (-2)}$

$= \left(\frac{5}{1}\right) \times (-2)^{5-1} = 80$

⑮ $\lim_{س \to -2} \frac{(س + 3)^5 - 1}{(س - 2)(س + 2)}$

$= \lim_{س \to -2} \frac{1}{س - 2}$

$\times \lim_{(س+3) \to 1} \frac{(س + 3)^5 - 1^5}{(س + 3) - 1}$

$= -\frac{1}{4} \times 5 \times (1)^4 = -\frac{5}{4}$

⑯ $\lim_{س \to 1} \frac{س^{19} - 1 + س^8 - 1}{س - 1}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{س^{19} - (1)^{19}}{س - 1}$

$+ \lim_{س \to 1} \frac{س^8 - (1)^8}{س - 1}$

$= 19 (1)^{18} + 8 (1)^7 = 27$

⑰ $\lim_{س \to -1} \frac{س^7 + 1 + س^9 + 1}{س + 1}$

$= \lim_{س \to -1} \frac{س^7 - (-1)^7}{س - (-1)}$

$+ \lim_{س \to -1} \frac{س^9 - (-1)^9}{س - (-1)}$

$= 7 (-1)^6 + 9 (-1)^8 = 16$

⑱ $\lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} - 1 + \sqrt[3]{س} - 1}{س - 1}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{(س)^{\frac{1}{2}} - (1)^{\frac{1}{2}}}{س - 1}$

$+ \lim_{س \to 1} \frac{(س)^{\frac{1}{3}} - (1)^{\frac{1}{3}}}{س - 1}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

⑲ $\lim_{س \to 2} \frac{س^5 - 32 + س^2 - 4}{س - 2}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{س^5 - 2^5}{س - 2} + \lim_{س \to 2} \frac{س^2 - 2^2}{س - 2}$

$= 5 (2)^4 + 2 (2)^1 = 84$

⑳ $\lim_{س \to 5} \frac{(س - 3)^5 - 2^5}{س (س - 5)}$

$= \lim_{س \to 5} \frac{1}{س} \times \lim_{(س-3) \to 2} \frac{(س - 3)^5 - 2^5}{(س - 3) - 2}$

$= \frac{1}{5} \times \frac{5}{1} (2)^{5-1} = 16$

㉑ $\lim_{س \to 0} \frac{1}{3 (س - 2)}$

$\times 2 \lim_{(2س-3) \to -3} \frac{(2س - 3)^5 - (-3)^5}{(2س - 3) - (-3)}$

$= -\frac{1}{6} \times 2 \times 5 \, (-3)^4 = -135$

---

4 $\because \lim_{س \to أ} \frac{س^{12} - أ^{12}}{س^{10} - أ^{10}} = 30$

$\therefore \frac{12}{10} (أ)^2 = 30$ $\therefore أ^2 = 25$

$\therefore أ = \pm 5$

---

5 $\lim_{س \to -1} \frac{س^{15} - (-1)^{15}}{س - (-1)} = 15 (-1)^{14} = 15$

، $\because \lim_{س \to ك} \frac{س^5 - ك^5}{س^3 - ك^3} = \frac{5}{3} (ك)^2$

$\therefore \frac{5}{3} ك^2 = 15$ $\therefore ك = \pm 3$

---

6 ∵ النهاية موجودة ∴ $64 = 2^{ن}$

$\therefore ن = 6$ ∴ النهاية $= \frac{6}{1} \times 2^{6-1}$

$\therefore ل = 192$

---

7 $\lim_{س \to 2} \frac{د(س) - د(2)}{س - 2}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{\frac{1}{س^4} - \frac{1}{2^4}}{س - 2}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{س^{-4} - 2^{-4}}{س - 2} = -4 (2)^{-5} = \frac{-1}{8}$

8

① $\lim_{س \to 2} \frac{س^3 - 2^3}{س^5 - 2^5} + \lim_{س \to 2} \frac{س^4 - 2^4}{س^7 - 2^7}$

$= \frac{3}{5} (2)^{-2} + \frac{4}{7} (2)^{-3} = \frac{31}{140}$

② $\lim_{س \to 3} \left(\frac{س - 2}{س^2 - 4} \times \frac{س^5 - 243}{س - 3} \right)$

$= \lim_{س \to 3} \frac{1}{س + 2} \times \lim_{س \to 3} \frac{س^5 - 3^5}{س - 3}$

$= \frac{1}{5} \times 5 \times 3^4 = 81$

③ $\left(\lim_{س \to -3} \frac{س^4 - (-3)^4}{س^3 - (-3)^3} \right)^3 = \left[\frac{4}{3} (-3)\right]^3$

$= -64$

④ $\lim_{س \to 1} \frac{(س^{25} - 1)^2}{(س - 1)^2} = \left(\lim_{س \to 1} \frac{س^{25} - 1}{س - 1} \right)^2$

$= \left(\lim_{س \to 1} \frac{س^{25} - (1)^{25}}{س - (1)} \right)^2$

$= \left(25 (1)^{24} \right)^2 = 625$

⑤ $\lim_{س \to 1} \frac{(س^6 - 1)^2}{(س - 1)^2} = \left[\lim_{س \to 1} \frac{س^6 - (1)^6}{س - (1)} \right]^2$

$= \left[6 (1)^5 \right]^2 = 36$

⑥ $\lim_{س \to 2} \left[\frac{(س^4 - 16)^3}{(س^3 - 8)^3} \times \frac{س^4 - 16}{س^8 - 256} \right]$

$= \lim_{س \to 2} \left(\frac{س^4 - 16}{س^3 - 8} \right)^3 \times \lim_{س \to 2} \frac{س^4 - 16}{س^8 - 256}$

$= \left(\lim_{س \to 2} \frac{س^4 - 2^4}{س^3 - 2^3} \right)^3 \times \lim_{س \to 2} \frac{س^4 - 2^4}{س^8 - 2^8}$

$= \left[\frac{4}{3} (2)\right]^3 \times \frac{4}{8} (2)^{-4} = \frac{16}{27}$

⑦ $\lim_{س \to 1} \frac{س^{\frac{1}{3}} - (1)^{\frac{1}{3}}}{س - 1}$

$\times \lim_{س \to 1} \frac{س^{\frac{2}{5}} - (1)^{\frac{2}{5}}}{س - 1} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

⑧ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(١ - س)^{١٥} \left[\left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{١٥} - ١ \right]}{(١ - س)^{٩} \left[\left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{٩} - ١ \right]}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} (١ - س)^{٦}$

$\times \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{١٥} - ١}{\left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{٩} - ١}$

$= ١ \times \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{١٥} - ١}{\left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{٩} - ١}$

$\because$ س $\to ٠$

$\therefore \frac{س + ١}{س - ١} \to ١$

$\therefore \underset{\left(\frac{س + ١}{س - ١}\right) \to ١}{\text{نها}} \frac{\left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{١٥} - (١)^{١٥}}{\left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{٩} - (١)^{٩}}$

$= \frac{١٥}{٩} (١)^{٦} = \frac{٥}{٣}$

⑨ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{١٢} - ١}{س^{٢} (س - ١) + (س - ١)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{١٢} - ١}{(س - ١)(س^{٢} + ١)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{١}{س^{٢} + ١} \times \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{١٢} - (١)^{١٢}}{س - ١}$

$= \frac{١}{٢} \times ١٢ (١)^{١١} = ٦$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{\frac{١}{٢}} (س - ١)}{س^{\frac{١}{٢}} (س^{٥} - ١)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س - ١}{س^{٥} - ١} = \frac{١}{٥} (١)^{-٤} = \frac{١}{٥}$

② $\frac{٥}{٧} \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(١ + ٥ س)^{١٠} - ١}{٥ س}$

$\times \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٧ س}{(١ + ٧ س)^{٨} - ١}$

$= \frac{٥}{٧} \underset{(١ + ٥ س) \to ١}{\text{نها}} \frac{(١ + ٥ س)^{١٠} - (١)^{١٠}}{(١ + ٥ س) - (١)}$

$\times \underset{(١ + ٧ س) \to ١}{\text{نها}} \frac{(١ + ٧ س) - ١}{(١ + ٧ س)^{٨} - (١)^{٨}}$

$= \frac{٥}{٧} \times ١٠ (١)^{٩} \times \frac{١}{٨} (١)^{-٧} = \frac{٢٥}{٢٨}$

③ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{س + ٨} - ٢}{س}$

$\times \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س}{(س + ٣)^{٥} - ٢٤٣}$

$= \underset{(س + ٨) \to ٨}{\text{نها}} \frac{(س + ٨)^{\frac{١}{٣}} - (٨)^{\frac{١}{٣}}}{(س + ٨) - (٨)}$

$\times \underset{(س + ٣) \to ٣}{\text{نها}} \frac{(س + ٣) - (٣)}{(س + ٣)^{٥} - (٣)^{٥}}$

$= \frac{١}{٣} (٨)^{-\frac{٢}{٣}} \times \frac{١}{٥} (٣)^{-٤} = \frac{١}{٤٨٦٠}$

④ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٢ س - ٣} - ١}{٢ (س - ٢)}$

$\times \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{٢ س - ٤}{\sqrt[٥]{٣ س - ٥} - ١}$

$= \underset{(٢ س - ٣) \to ١}{\text{نها}} \frac{(٢ س - ٣)^{\frac{١}{٣}} - (١)^{\frac{١}{٣}}}{(٢ س - ٣) - ١}$

$\times \frac{٢}{٣} \underset{(٣ س - ٥) \to ١}{\text{نها}} \frac{(٣ س - ٥) - ١}{(٣ س - ٥)^{\frac{١}{٥}} - (١)^{\frac{١}{٥}}}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times ٥ (١)^{\frac{٤}{٥}} = \frac{١٠}{٩}$

⑤ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{(س^{٢} - ٣)^{٥} - ١}{(س - ٢)(س + ٢)} \times (س + ٢)$

$= \underset{(س^{٢} - ٣) \to ١}{\text{نها}} \frac{(س^{٢} - ٣)^{٥} - (١)^{٥}}{(س^{٢} - ٣) - ١}$

$\times \underset{س \to ٢}{\text{نها}} (س + ٢) = ٥ (١)^{٤} \times ٤ = ٢٠$

⑥ $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{(٤ س + ٥)^{٦} - ١ + ٧ س + ٧}{س + ١}$

$= \underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{(٤ س + ٥)^{٦} - ١}{س + ١}$

$+ \underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{٧ س + ٧}{س + ١}$

$= ٤ \underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{(٤ س + ٥)^{٦} - ١}{٤ س + ٤}$

$+ \underset{س \to -١}{\text{نها}} ٧ \left(\frac{س + ١}{س + ١}\right)$

$= ٤ \underset{(٤ س + ٥) \to ١}{\text{نها}} \frac{(٤ س + ٥)^{٦} - (١)^{٦}}{(٤ س + ٥) - (١)} + ٧$

$= ٤ \times ٦ (١)^{٥} + ٧ = ٣١$

⑦ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{(٥ س - ٤)^{١٠} - ١}{س - ١}$

$+ \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{٤ س - ٤}{س - ١}$

$= ٥ \underset{(٥ س - ٤) \to ١}{\text{نها}} \frac{(٥ س - ٤)^{١٠} - (١)^{١٠}}{(٥ س - ٤) - ١}$

$+ \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{٤ (س - ١)}{(س - ١)}$

$= ٥ \times ١٠ (١)^{٩} + ٤ = ٥٤$

⑧ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٥]{س + ١} - ١ - \sqrt[٤]{س + ١} + ١}{س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٥]{س + ١} - ١}{س}$

$- \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٤]{س + ١} - ١}{س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(س + ١)^{\frac{١}{٥}} - (١)^{\frac{١}{٥}}}{س}$

$- \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(س + ١)^{\frac{١}{٤}} - (١)^{\frac{١}{٤}}}{س}$

$= \frac{١}{٥} (١)^{-\frac{٤}{٥}} - \frac{١}{٤} (١)^{-\frac{٣}{٤}} = \frac{-١}{٢٠}$

⑨ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(س + ١)^{\frac{١}{٥}} - ١ - (س + ١)^{٧} + ١}{س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(س + ١)^{\frac{١}{٥}} - (١)^{\frac{١}{٥}}}{س}$

$- \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(س + ١)^{٧} - (١)^{٧}}{س}$

$= \frac{١}{٥} - ٧ = -٦ \frac{٤}{٥}$

⑩ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{٥ \sqrt{س - ١} - ١ - ٥}{س - ٢}$

$+ \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{س - ١} - ١}{س - ٢}$

$= ٥ \underset{(س - ١) \to ١}{\text{نها}} \frac{(س - ١)^{\frac{١}{٢}} - (١)^{\frac{١}{٢}}}{(س - ١) - (١)}$

$+ \underset{(س - ١) \to ١}{\text{نها}} \frac{(س - ١)^{\frac{١}{٣}} - (١)^{\frac{١}{٣}}}{(س - ١) - (١)}$

$= \frac{٥}{٢} + \frac{١}{٣} = \frac{١٧}{٦}$

⑪ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{٧} - (١)^{٧}}{س - ١} + \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{٩} - (١)^{٩}}{س - ١}$

$+ \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{١١} - (١)^{١١}}{س - ١} = ٧ + ٩ + ١١ = ٢٧$

⑫ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٤} (س - ١)^{٦} - س^{٤} + س^{٤} - ١٦}{س - ٢}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} س^{٤} \left[\frac{(س - ١)^{٦} - ١}{س - ٢}\right]$

$+ \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - ١٦}{س - ٢}$

$= \left(\underset{س \to ٢}{\text{نها}} س^{٤}\right) \left(\underset{(س - ١) \to ١}{\text{نها}} \frac{(س - ١)^{٦} - (١)^{٦}}{(س - ١) - ١}\right)$

$+ \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - ٢^{٤}}{س - ٢}$

$= ١٦ \times ٦ (١)^{٥} + ٤ (٢)^{٣} = ١٢٨$

⑬ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٥ \sqrt[٣]{س+٦} - ٢س^٥ + ٢س^٥ - ٦٤}{س-٢}$

$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٥ [\sqrt[٣]{س+٦} - ٢]}{س-٢}$

$+ \lim\limits_{س \to ٢} \frac{٢(س^٥ - ٣٢)}{س-٢}$

$= (\lim\limits_{س \to ٢} س^٥) (\lim\limits_{(س+٦) \to ٨} \frac{(س+٦)^{\frac{١}{٣}} - (٨)^{\frac{١}{٣}}}{(س+٦) - (٨)})$

$+ ٢ \lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٢^٥}{س-٢}$

$٢^٥ \times \frac{١}{٣} \times (٨)^{\frac{١}{٣} - ١} + ٢ \times ٥ \times ٢^{٥-١}$

$= ١٦٢ \frac{٢}{٣}$

إجابات تمارين 15

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (ب)	③ (د)	④ (د)
⑤ (أ)	⑥ (جـ)	⑦ (د)	⑧ (جـ)
⑨ (أ)	⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	⑫ (ب)
⑬ (د)	⑭ (أ)	⑮ (د)	⑯ (أ)
⑰ (جـ)	⑱ (د)	⑲ (ب)	⑳ (ب)
㉑ (ب)	㉒ (جـ)	㉓ (جـ)	㉔ (جـ)
㉕ (ب)	㉖ (أ)	㉗ (أ)	㉘ (د)
㉙ (ب)	㉚ (ب)	㉛ (جـ)	㉜ (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

1

① بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢ - \frac{٥}{س}}{٣ + \frac{٨}{س}} = \frac{٢}{٣}$

② بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\frac{٢}{س} - \frac{٥}{س^٢}}{٣ + \frac{٨}{س^٢}} =$ صفر

③ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢س - \frac{٥}{س}}{٣ + \frac{٨}{س}} = \infty$

④ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\frac{٥}{س^٢} - \frac{٦}{س} - ٣}{٢ + \frac{١}{س} + \frac{٤}{س^٢}} = \frac{-٣}{٢}$

⑤ عند س ← ∞ فإن |س| = س

∴ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^٢ - ٢}{س^٢ + ١}$

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{١ - \frac{٢}{س^٢}}{١ + \frac{١}{س^٢}} = ١$

⑥ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\frac{٧}{س} + \frac{١}{س^٢}}{٤ - \frac{٨}{س^٢} + \frac{١}{س^٢}} = \frac{\text{صفر}}{٤} =$ صفر

⑦ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٤$

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٥س^٣ + \frac{٢}{س^٣} - \frac{١}{س^٤}}{٦ + \frac{١٢}{س^٤}} = \frac{\infty}{٦} = \infty$

⑧ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{١٤}$

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\frac{٥}{س^{١٤}} - \frac{٧}{س^٦} + ٣}{\frac{٧}{س^{١٤}} - ٦ + \frac{٢}{س^٨}} = \frac{-٣}{٦} = \frac{-١}{٢}$

⑨ $\lim\limits_{س \to \infty} (\frac{٧}{س^٢} + \frac{٢}{س} - ٣) = -٣$

⑩ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\frac{٥}{س^٣} + \frac{٤}{س^٢} - ٣}{\frac{٧}{س^٣} - \frac{٢}{س^٢} + ٨} = \frac{-٣}{٨}$

⑪ عند س ← ∞ فإن : $|٢س|^٣ \leftarrow (٢س)^٣$

∴ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٥س^٣ - ٤س^٢ + ٢}{٧ - س + ٨س^٣}$

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٥ - \frac{٤}{س} + \frac{٢}{س^٣}}{\frac{٧}{س^٣} - \frac{١}{س^٢} + ٨} = \frac{٥}{٨}$

⑫ $\lim\limits_{س \to \infty} (س^٣ + ٥س^٢ + ١)$

$= \infty + \infty + ١ = \infty$

⑬ $\lim\limits_{س \to \infty} [\sqrt{س^٢ + ٥س + ٧} + س]$

$= \sqrt{\infty + \infty + ٧} + \infty = \infty$

⑭ $\lim\limits_{س \to \infty} (٥ + س - س^٢) = ٥ + \infty - \infty$

= كمية غير معينة

∴ $\lim\limits_{س \to \infty} س^٢ (\frac{٥}{س^٢} + \frac{١}{س} - ١)$

$= \lim\limits_{س \to \infty} س^٢ \times \lim\limits_{س \to \infty} (\frac{٥}{س^٢} + \frac{١}{س} - ١)$

$= \infty \times -١ = -\infty$

2

① بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٣ - \frac{٤}{س} + \frac{٥}{س^٢}}{(١ + \frac{٢}{س})^٢} = \frac{٣}{١} = ٣$

② بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٦ - \frac{٥}{س}}{(\frac{٣}{س} - ١)(\frac{٢}{س} + ١)} = \frac{٦}{-١} = -٦$

③ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٨ - \frac{١}{س^٢} + \frac{١}{س^٣}}{(١ + \frac{١}{س})(٢ - \frac{٣}{س^٢})} = \frac{٨}{٢} = ٤$

④ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{١ - \frac{٤}{س^٢} + \frac{٥}{س^٣}}{(٢ - \frac{١}{س})^٣} = \frac{١}{٨}$

⑤ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{(٢ + \frac{٣}{س})(٤ - \frac{٥}{س^٢})}{(٣ - \frac{٨}{س^٢})(٥ - \frac{٣}{س})} = \frac{٨}{١٥}$

⑥ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{(٢ + \frac{٣}{س})(٥ - \frac{١}{س})(١ - \frac{٢}{س})}{١ \times (١ + \frac{١}{س})(٣ - \frac{١}{س})} = \frac{١٠}{٣}$

⑦ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^٢}$

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{(١ + \frac{٧}{\sqrt{س}})(١ + \frac{٣}{\sqrt{س}})}{٤ - \frac{٣}{س}} = \frac{١}{٤}$

⑧ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{(٦ - \frac{٥}{س})(٣ - \frac{٤}{س})^٢}{(٣ - \frac{٢}{س})^٣} = \frac{٦ \times ٩}{٢٧} = ٢$

⑨ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٥$

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{(١ + \frac{٢}{س})^٣ (\frac{٣}{س^٢} - ٢)}{٣(١ + \frac{٧}{س^٢})}$

$= \frac{١^٣ \times -٢}{٣ \times ١} = \frac{-٢}{٣}$

(١٠) بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٦ = (س^٢)^٣$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\left(٣ - \frac{١}{س^٢}\right)^٣}{١٨ + \frac{١}{س^٤} + \frac{١}{س^٦}} = \frac{٢٧}{١٨} = \frac{٣}{٢}$$

٣

(١) بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^٢}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢ + \frac{٣}{س}}{\sqrt{٩ + \frac{٢٥}{س^٢}}} = \frac{٢}{٣}$$

(٢) بقسمة كل من البسط والمقام على س

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٤ + \frac{٣}{س^٢}}}{١} = \sqrt{٤} = ٢$$

(٣) بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^٢}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢ + \frac{١}{س}}{\sqrt{٤ + \frac{٣}{س} - \frac{٤}{س^٢}}} = \frac{٢}{٢} = ١$$

(٤) بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt[٣]{س^٣}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢ - \frac{٣}{س}}{\sqrt[٣]{١٢٥ + \frac{٥}{س^٣}}} = \frac{٢}{٥}$$

(٥) بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt[٣]{س^٣}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨ + \frac{٥}{س^٢} - \frac{٢}{س^٣}}}{٣ + \frac{٢}{س}} = \frac{٢}{٣}$$

(٦) بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣ = \sqrt{س^٦}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\frac{٤}{س^٣} - ٣}{\sqrt{١ + \frac{٩}{س^٦}}} = -٣$$

(٧) بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^٢} = \sqrt[٣]{س^٣}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٩ - \frac{٣}{س} + \frac{٨}{س^٢}}}{\sqrt[٣]{\frac{٣}{س} + ١٢٥ + \frac{٢}{س^٣}}} = \frac{٣}{٥}$$

(٨) بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{س^٢} = \sqrt[٤]{س^٤}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{١ + \frac{١}{س^٢}}}{\sqrt[٤]{١ + \frac{٢}{س^٤}}} = \frac{١}{١} = ١$$

(٩) بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt[٣]{س^٣} = \sqrt[٥]{س^٥}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨ + \frac{١}{س^٣}}}{\sqrt[٥]{٣٢ + \frac{١}{س^٥}}} = \frac{٢}{٢} = ١$$

(١٠) بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt[٣]{س^٣} = \sqrt[٤]{س^٤}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨ + \frac{١}{س^٣}}}{\sqrt[٤]{١ - \frac{٣}{س^٤}}} = ٢$$

(١١) بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{س}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٣ - \frac{٢}{س}} - \sqrt{١٢ + \frac{٧}{س}}}{\sqrt{٢٧ - \frac{٥}{س}}}$$

$$= \frac{\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}}{٣\sqrt{٣}} = \frac{-١}{٣}$$

(١٢) بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^٢}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٤ + \frac{٧}{س^٢}} + ٣}{٢ + \frac{٩}{س}} = \frac{٥}{٢}$$

(١٣) بقسمة كل من البسط والمقام على

$\sqrt[٤]{س^٦} = \sqrt[٦]{س^٩} = \sqrt{س^٣}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٤]{١ + \frac{٨}{س^٦}} - \sqrt[٦]{\frac{١}{س^٧} + \frac{٤}{س^٩}}}{\sqrt{١ + \frac{٩}{س^٢}}} = ١$$

(١٤) بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢ = س\sqrt{س^٢}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٣ - \frac{١}{س} - \frac{٧}{س^٢}}{\left(١ + \frac{١}{س}\right)\sqrt{٢٥ + \frac{١}{س^٢}}} = \frac{٣}{٥}$$

٤

(١) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} ٧ + \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢س^٢}{(س + ٣)^٢}$

$$= ٧ + \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢}{\left(١ + \frac{٣}{س}\right)^٢} = ٧ + ٢ = ٩$$

(٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س}{٢س + ١} + \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٣س^٢}{(س - ٣)^٢}$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{١}{٢ + \frac{١}{س}} + \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٣}{\left(١ - \frac{٣}{س}\right)^٢}$$

$$= \frac{١}{٢} + ٣ = \frac{٧}{٢}$$

(٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢}{٣} - \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٣س}{٢س + ٧}$

$$= \frac{٢}{٣} - \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٣}{٢ + \frac{٧}{س}} = \frac{٢}{٣} - \frac{٣}{٢} = \frac{-٥}{٦}$$

(٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢س^٣ - ٢س^٣ - س}{٢س^٢ + ١}$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{-س}{٢س^٢ + ١}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\frac{-١}{س}}{٢ + \frac{١}{س^٢}} = \frac{\text{صفر}}{٢} = \text{صفر}$$

(٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(س^٢ - ١)(س - ٢) - (س^٢ + ١)(س + ٢)}{س^٢ - ٤}$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س^٣ - ٢س^٢ - س + ٢ - س^٣ - ٢س^٢ - س - ٢}{س^٢ - ٤}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{-٤س^٢ - ٢س}{س^٢ - ٤}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{-٤ - \frac{٢}{س}}{١ - \frac{٤}{س^٢}} = -٤$$

(٦)

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\left(\sqrt{س^٢ - ٢} - \sqrt{س^٢ + س}\right)\left(\sqrt{س^٢ - ٢} + \sqrt{س^٢ + س}\right)}{\sqrt{س^٢ - ٢} + \sqrt{س^٢ + س}}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س^٢ - ٢ - س^٢ - س}{\sqrt{س^٢ - ٢} + \sqrt{س^٢ + س}}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{-٢ - س}{\sqrt{س^٢ - ٢} + \sqrt{س^٢ + س}}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\frac{-٢}{س} - ١}{\sqrt{١ - \frac{٢}{س^٢}} + \sqrt{١ + \frac{١}{س}}} = -\frac{١}{٢}$$

(٧) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٤س^٢ + ١} - \sqrt{س^٢ + ١}}{س}$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٤ + \frac{١}{س^٢}} - \sqrt{١ + \frac{١}{س^٢}}}{١} = \frac{٢ - ١}{١} = ١$$

(٨)

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\left(\sqrt{س^٢ + ٥س} - س\right)\left(\sqrt{س^٢ + ٥س} + س\right)}{\sqrt{س^٢ + ٥س} + س}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س^٢ + ٥س - س^٢}{\sqrt{س^٢ + ٥س} + س}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥س}{\sqrt{س^٢ + ٥س} + س}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥}{\sqrt{١ + \frac{٥}{س}} + ١} = \frac{٥}{١ + ١} = \frac{٥}{٢}$$

⑨ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}\left(\sqrt{٤\text{س}^٢+١}-٢\text{س}\right)\left(\sqrt{٤\text{س}^٢+١}+٢\text{س}\right)}{\left(\sqrt{٤\text{س}^٢+١}+٢\text{س}\right)}$

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}\left(٤\text{س}^٢+١-٤\text{س}^٢\right)}{\left(\sqrt{٤\text{س}^٢+١}+٢\text{س}\right)}$

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{\sqrt{٤+\frac{١}{\text{س}^٢}}+٢} = \frac{١}{٤}$

⑩ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^{١٧} = (\text{س}^٥)(\text{س}^٢)^٦$

$= (\text{س}^٧)(\text{س}^٢)^٥$

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\left(٢-\frac{١}{\text{س}}\right)^٥\left(١+\frac{٣}{\text{س}^٢}\right)^٦}{\left(١+\frac{١}{\text{س}}\right)^٧\left(١-\frac{٥}{\text{س}^٢}\right)^٥}$

$= \frac{(٢)^٥(١)^٦}{(١)^٧(١)^٥} = ٣٢$

حل آخر :

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\left[\text{س}\left(٢-\frac{١}{\text{س}}\right)\right]^٥\left[\text{س}^٢\left(١+\frac{٣}{\text{س}^٢}\right)\right]^٦}{\left[\text{س}\left(١+\frac{١}{\text{س}}\right)\right]^٧\left[\text{س}^٢\left(١-\frac{٥}{\text{س}^٢}\right)\right]^٥}$

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٥\left(٢-\frac{١}{\text{س}}\right)^٥\times\text{س}^{١٢}\left(١+\frac{٣}{\text{س}^٢}\right)^٦}{\text{س}^٧\left(١+\frac{١}{\text{س}}\right)^٧\times\text{س}^{١٠}\left(١-\frac{٥}{\text{س}^٢}\right)^٥}$

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{\text{س}^{١٧}}\left(٢-\frac{١}{\text{س}}\right)^٥\left(١+\frac{٣}{\text{س}^٢}\right)^٦}{\cancel{\text{س}^{١٧}}\left(١+\frac{١}{\text{س}}\right)^٧\left(١-\frac{٥}{\text{س}^٢}\right)^٥}$

$= \frac{(٢)^٥\times(١)^٦}{(١)^٧\times(١)^٥} = ٣٢$

⑪ بضرب كل من البسط والمقام فى مرافق البسط والمقام

$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\left(\sqrt{\text{س}+١}-\sqrt{\text{س}-١}\right)\left(\sqrt{\text{س}+١}+\sqrt{\text{س}-١}\right)\left(\sqrt{٤\text{س}+١}+\sqrt{٤\text{س}-١}\right)}{\left(\sqrt{٤\text{س}+١}-\sqrt{٤\text{س}-١}\right)\left(\sqrt{\text{س}+١}+\sqrt{\text{س}-١}\right)\left(\sqrt{٤\text{س}+١}+\sqrt{٤\text{س}-١}\right)}$

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}+١-\text{س}+١)\left(\sqrt{٤\text{س}+١}+\sqrt{٤\text{س}-١}\right)}{(٤\text{س}+١-٤\text{س}+١)\left(\sqrt{\text{س}+١}+\sqrt{\text{س}-١}\right)}$

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٤\text{س}+١}+\sqrt{٤\text{س}-١}}{\sqrt{\text{س}+١}+\sqrt{\text{س}-١}}$

وبقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{\text{س}}$

$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٤+\frac{١}{\text{س}}}+\sqrt{٤-\frac{١}{\text{س}}}}{\sqrt{١+\frac{١}{\text{س}}}+\sqrt{١-\frac{١}{\text{س}}}} = \frac{٢+٢}{١+١} = ٢$

٥

① بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٢$

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٣-\frac{٥}{\text{س}}+\frac{١}{\text{س}^٢}}{٤-\frac{٧}{\text{س}^٢}}\right)^{\frac{١}{\text{س}}} = \left(\frac{٣}{٤}\right)^{\text{صفر}} = ١$

② $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}+١}{\sqrt{\text{س}^٢-١}} + \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \text{أ}^{\frac{١}{\text{س}}}$

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{١+\frac{١}{\text{س}}}{\sqrt{١-\frac{١}{\text{س}^٢}}}\right) + \text{أ}^{\text{صفر}} = ١ + ١ = ٢$

③ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٢-\frac{٣}{\text{س}}}{\sqrt[٣]{٢٧-\frac{١٥}{\text{س}^٢}+\frac{٢}{\text{س}^٣}}} + \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ ٨^{\frac{١}{\text{س}}}$

$= \frac{٢}{٣} + ١ = ١\frac{٢}{٣}$

④ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٥}{\frac{١}{\text{س}^٢}-١} - \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ (١٣)^{\frac{١}{\text{س}}}$

$= -٥ - ١ = -٦$

٦

$\because$ النهاية موجودة وتساوى ٣

$\therefore$ درجة البسط = درجة المقام

$\therefore ن = ٢$

$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٤\text{أ}\text{س}^٢-٤\text{س}+٥}{٣-٩\text{س}+٨\text{س}^٢} = ٣$

بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٢$

$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٤\text{أ}-\frac{٤}{\text{س}}+\frac{٥}{\text{س}^٢}}{\frac{٣}{\text{س}^٢}-\frac{٩}{\text{س}}+٨} = ٣$

$\therefore \frac{٤\text{أ}}{٨} = ٣ \qquad \therefore \text{أ} = ٦$

٧

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{\text{أ}+\frac{٣}{\text{س}^٢}}}{\sqrt{٤+\frac{٧}{\text{س}^٢}}} = -١ \qquad \therefore \frac{\sqrt[٣]{\text{أ}}}{٢} = -١$

$\therefore \sqrt[٣]{\text{أ}} = -٢ \qquad \therefore \text{أ} = -٨$

٨

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\left(\sqrt{\text{أ}\text{س}^٢+٣\text{ب}\text{س}+٥}-٢\text{س}\right)}{١}$

$\times \frac{\left(\sqrt{\text{أ}\text{س}^٢+٣\text{ب}\text{س}+٥}+٢\text{س}\right)}{\left(\sqrt{\text{أ}\text{س}^٢+٣\text{ب}\text{س}+٥}+٢\text{س}\right)}$

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{أ}\text{س}^٢+٣\text{ب}\text{س}+٥-٤\text{س}^٢}{\sqrt{\text{أ}\text{س}^٢+٣\text{ب}\text{س}+٥}+٢\text{س}} = ٣$

$\because$ اكبر درجة فى المقام هى ١ $\therefore$ درجة البسط = ١

$\therefore \text{أ}\text{س}^٢ - ٤\text{س}^٢ = ٠ \qquad \therefore \text{أ} = ٤$

$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{ب}\text{س}+٥}{\sqrt{\text{أ}\text{س}^٢+٣\text{ب}\text{س}+٥}+٢\text{س}} = ٣$

(بقسمة كل من البسط والمقام على س)

$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{ب}+\frac{٥}{\text{س}}}{\left(\sqrt{\text{أ}+\frac{٣\text{ب}}{\text{س}}+\frac{٥}{\text{س}^٢}}+٢\right)} = ٣$

$\therefore \frac{٣\text{ب}}{\sqrt{\text{أ}}+٢} = ٣$

$\therefore ٣\text{ب} = ٣ \times (٢+٢) \qquad \therefore \text{ب} = ٤$

٩

$\because \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٢-\text{أ}\text{س}^٢}{٣-\text{ب}\text{س}+\text{س}^٢} = ٥$

$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\frac{٢}{\text{س}^٢}-\text{أ}}{\frac{٣}{\text{س}^٢}-\frac{\text{ب}}{\text{س}}+١} = ٥$

$\therefore \text{أ} = -٥$

$\because \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{٢+٥\text{س}^٢}{٣-\text{ب}\text{س}+\text{س}^٢} = ٢$ ،

$\therefore \frac{٢+٥(-٢)^٢}{٣+٢\text{ب}+(-٢)^٢} = ٢$

$\therefore ٧+٢\text{ب} = ١١ \qquad \therefore \text{ب} = ٢$

١٠

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢+١-(\text{أ}\text{س}+\text{ب})(\text{س}+١)}{\text{س}+١} = ٢$

$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢-\text{أ}\text{س}^٢-(\text{أ}+\text{ب})\text{س}+١-\text{ب}}{\text{س}+١} = ٢$

، $\because$ النهاية موجودة وتساوى ٢

$\therefore$ درجة البسط = درجة المقام

$\therefore \text{س}^٢ - \text{أ}\text{س}^٢ = ٠ \qquad \therefore \text{أ} = ١$

، $\text{أ} + \text{ب} = -٢ \qquad \therefore \text{ب} = -٣$

١١

$\because$ النهاية تساوى ∞

$\therefore$ درجة البسط أكبر من درجة المقام

$\therefore$ أ + ١ = صفر ومنها أ = −١

، ٧ − ب = صفر ومنها ب = ٧

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^{-٢}$

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{١+\frac{١}{\text{س}^٢}}{\left(٢+\frac{٣}{\text{س}}\right)^{-٢}} = \frac{١}{٢^{-٢}} = ٤$

② $\lim_{\frac{١}{ن} \to \text{صفر}} \frac{(أ + \frac{١}{ن})^{٤} - أ^{٤}}{\frac{١}{ن}}$

$= \lim_{أ + \frac{١}{ن} \to أ} \frac{(أ + \frac{١}{ن})^{٤} - أ^{٤}}{(أ + \frac{١}{ن}) - أ} = ٤ أ^{٣}$

③ $\lim_{\frac{١}{س} \to \text{صفر}} \frac{(٣ + \frac{١}{س})^{٥} - ٢٤٣}{\frac{١}{س}}$

$= \lim_{(٣ + \frac{١}{س}) \to ٣} \frac{(٣ + \frac{١}{س})^{٥} - ٣^{٥}}{(٣ + \frac{١}{س}) - ٣} = ٥ (٣)^{٤} = ٤٠٥$

④ بالضرب فى المرافق

$\lim_{س \to \infty} \frac{(\sqrt{س^{٢} + ٢} - س)(\sqrt{٢ س^{٢} + ١})(\sqrt{س^{٢} + ٢} + س)}{\sqrt{س^{٢} + ٢} + س}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{(س^{٢} + ٢ - س^{٢})(\sqrt{٢ س^{٢} + ١})}{\sqrt{س^{٢} + ٢} + س}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{٢ (\sqrt{٢ س^{٢} + ١})}{\sqrt{س^{٢} + ٢} + س}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{٢ (\sqrt{٢ + \frac{١}{س^{٢}}})}{\sqrt{١ + \frac{٢}{س^{٢}}} + ١} = \sqrt{٢}$

⑤ $\lim_{س \to \infty} (\frac{٢}{س} - \frac{١}{س^{٢}}) \sqrt{٤ س^{٢} + ١}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{٢ \sqrt{٤ س^{٢} + ١}}{س} - \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٤ س^{٢} + ١}}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{٢ \sqrt{٤ + \frac{١}{س^{٢}}}}{١} - \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{\frac{٤}{س^{٢}} + \frac{١}{س^{٤}}}}{١}$

$= ٢ \times ٢ - \text{صفر} = ٤$

⑥ بقسمة كل من البسط والمقام على $س \sqrt{س} = \sqrt{س^{٣}}$

$\lim_{س \to \infty} \frac{٥ + \frac{١٦}{\sqrt{س}} - ٣ \sqrt{\frac{١}{س} - \frac{١}{س^{٣}}}}{\frac{١}{\sqrt{س}} + \sqrt{٤ + \frac{١}{س^{٣}}}} = \frac{٥}{٢}$

إجابات تمارين 16

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (أ)	③ (أ)	④ (ب)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (د)	⑧ (أ)
⑨ (أ)	⑩ (ب)	⑪ (جـ)	⑫ (جـ)
⑬ (جـ)	⑭ (ب)	⑮ (ب)	⑯ (جـ)
⑰ (جـ)	⑱ (أ)	⑲ (د)	⑳ (د)
㉑ (ب)	㉒ (د)	㉓ (أ)	㉔ (ب)
㉕ (جـ)	㉖ (ب)	㉗ (أ)	㉘ (أ)
㉙ (ب)	㉚ (ب)	㉛ (ب)	㉜ (أ)
㉝ (جـ)	㉞ (جـ)	㉟ (أ)	㊱ (د)
㊲ (جـ)	㊳ (ب)	㊴ (أ)	㊵ (أ)
㊶ (أ)	㊷ (ب)	㊸ (أ)	㊹ (د)
㊺ (جـ)	㊻ (ب)		

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{جا ٢ س}{س}}{\frac{ظا ٥ س}{س}} = \frac{٢}{٥}$

② $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{جا \frac{س}{٥}}{س}}{\frac{ظا \frac{٢ س}{٣}}{س}} = \frac{\frac{١}{٥}}{\frac{٢}{٣}} = \frac{٣}{١٠}$

③ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣ س}{٥ س} - \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢ س}{٥ س}$

$= \frac{٣}{٥} - \frac{٢}{٥} = \frac{١}{٥}$

④ $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{جا س}{س} + \frac{ظا س}{س}}{\frac{جا س}{س}} = \frac{١ + ١}{١} = ٢$

⑤ $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا ٣ س}{\frac{ظا ٢ س}{س}} = \frac{١}{٢}$

⑥ $\lim_{س \to ٠} \frac{٥ س}{جا س} - \lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٢ س}{س}$

$= ٥ - ٢ = ٣$

⑦ $\lim_{س \to ٠} \frac{٣ + \frac{جا س}{س}}{٢ + \frac{ظا ٣ س}{س}} = \frac{٣ + ١}{٢ + ٣} = \frac{٤}{٥}$

⑧ $\lim_{س \to ٠} \frac{٢ (\frac{جا س}{س}) + ٤ (\frac{ظا ٢ س}{س})}{٢ + \frac{جا ٣ س}{س}} = \frac{٢ + ٨}{٢ + ٣} = ٢$

⑨ $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{جا س}{س} - \frac{٣ ظا س}{س}}{٥ جتا س} = \frac{١ - ٣}{٥} = \frac{-٢}{٥}$

⑩ $\lim_{س \to ٠} \frac{٢}{٥ (\frac{ظا س}{س}) - ٢ (\frac{جا ٢ س}{س})} = \frac{٢}{٥ - ٤} = ٢$

⑪ بقسمة البسط والمقام على س

$\lim_{س \to ٠} \frac{١ + جتا س}{\frac{جا س}{س} \times جتا س} = \frac{١ + ١}{١ \times ١} = ٢$

⑫ $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{ظا ٣ س}{س} - \frac{جا ٤ س}{س}}{س + ٢} = \frac{٣ - ٤}{٢} = \frac{-١}{٢}$

⑬ $\lim_{س \to ٠} \frac{س + \frac{جا ٣ س}{س}}{٥ جتا ٢ س} = \frac{٠ + ٣}{٥ \times ١} = \frac{٣}{٥}$

⑭ $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{ظا ٢ س}{س} + ٢ جتا س}{\frac{جا ٢ س}{س}} = \frac{٢ + ٢}{٢} = \frac{٤}{٢}$

⑮ $\lim_{س \to ٠} \frac{٢ جا \frac{١}{٧} س}{س} = \frac{٢}{٧}$

⑯ $\lim_{س \to ٠} [\frac{جا \frac{١}{٥} س}{س} + \frac{ظا \frac{١}{٥} س}{س}] = \frac{٢}{٥}$

⑰ $\lim_{س \to ٠} (\frac{٣ جا ٤ س}{٥ س} + ٤ جا ٤ س) = \frac{١٢}{٥}$

⑱ $\lim_{(س - ٣) \to ٠} \frac{جا ٣ (س - ٣)}{٢ (س - ٣)} = \frac{٣}{٢}$

⑲ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{جا ٢٤ س}{س} \times جتا ٦ س}{\frac{ظا ٦ س}{س} \times جتا ٢٤ س} = \frac{٢٤ \times ١}{٦ \times ١} = ٤$

⑳ النهاية $= \frac{\frac{١}{٢} جتا (-٢ \times \frac{١}{٢} + ١)}{(\frac{١}{٢})^{٢} + (\frac{١}{٢})} = \frac{٢}{٣}$

㉑ $\lim_{س \to ٠} [\frac{جا^{٢} س}{س^{٢}} \times س]$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا^{٢} س}{س^{٢}} \times \lim_{س \to ٠} س$

$= ١ \times ٠ = \text{صفر}$

٢

① $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{٥} \times \frac{جا^{٢} ٣ س}{س^{٢}} = \frac{١}{٥} \times ٣^{٢} = \frac{٩}{٥}$

② $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{جا^{٢} ٣ س}{س^{٢}}}{\frac{ظا^{٢} ٢ س}{س^{٢}}} = \lim_{س \to ٠} \frac{(\frac{جا ٣ س}{س})^{٢}}{(\frac{ظا ٢ س}{س})^{٢}} = \frac{٩}{٤}$

③ $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{جا^{٢} \frac{س}{٢}}{س^{٢}}}{\frac{ظا ٢ س}{س}} = \lim_{س \to ٠} \frac{(\frac{جا \frac{س}{٢}}{س})^{٢}}{\frac{ظا ٢ س}{س}} = \frac{١}{٨}$

④ $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{جا ٢ س}{س}}{(\frac{جا س}{س})(\frac{ظا ٣ س}{س})} = \frac{٢}{٣}$

(٥) $\frac{1}{4}\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{\text{ظا}\,2\text{س}}{\text{س}}\right)^3=\frac{8}{4}=2$

(٦) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{\frac{\text{ظا}\,2\text{س}}{\text{س}}}{\left(\frac{\text{جا}\,2\text{س}}{\text{س}}\right)^4}=\frac{1}{8}$

(٧) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{\frac{\text{جا}\,4\text{س}}{\text{س}}\times\left(\frac{\text{ظا}\,5\text{س}}{\text{س}}\right)^2}{\frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}}}=\frac{4\times 25}{1}=100$

(٨) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{\frac{\text{ظا}\,2\text{س}}{\text{س}}}{1+\left(\frac{\text{جا}\,3\text{س}}{\text{س}}\right)^2}=\frac{2}{1+9}=\frac{1}{5}$

(٩) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{1+\left(\frac{\text{ظا}\,2\text{س}}{\text{س}}\right)^2}{2+\left(\frac{\text{جا}\,3\text{س}}{\text{س}}\right)^2}=\frac{1+4}{2+9}=\frac{5}{11}$

(١٠) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{\frac{\text{ظا}\,\text{س}}{\text{س}}}{4-\left(\frac{\text{جا}\,3\text{س}}{\text{س}}\right)^2}=\frac{1}{4-9}=\frac{-1}{5}$

(١١) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{2\text{س}+\frac{\text{جا}\,5\text{س}}{\text{س}}}{1-\frac{\text{ظا}^2\,3\text{س}}{\text{س}^2}}=\frac{0+5}{1-9}=\frac{-5}{8}$

(١٢) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{2+\frac{5\,\text{ظا}\,\text{س}}{\text{س}}+2\frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا}\,2\text{س}}{\text{س}}\times\text{جتا}\,2\text{س}}=\frac{2+5+2}{2\times 1}=5$

(١٣) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{\frac{\text{جا}\,2\text{س}}{\text{س}}+\frac{\text{جا}^2\,2\text{س}}{\text{س}^2}}{\frac{\text{ظا}^2\,3\text{س}}{\text{س}^2}+1}=\frac{2+4}{9+1}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

(١٤) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{\text{ظا}\,3\text{س}^2}{\text{س}^2}+\frac{\text{جا}^2\,5\text{س}}{\text{س}^2}\right)=3+25=28$

(١٥) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{\text{جا}\,5\text{س}^3}{2\text{س}^3}+\frac{\text{جا}^3\,5\text{س}}{2\text{س}^3}\right)=\frac{5}{2}+\frac{125}{2}=65$

(١٦) $\left(\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{2\text{س}+\frac{\text{جا}\,3\text{س}}{\text{س}}}{2\text{س}+\frac{\text{ظا}\,6\text{س}}{\text{س}}}\right)^4=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(١٧) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{\text{ظا}\,\text{س}}{\text{س}}\right)^2+\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{\text{ظا}\,3\text{س}}{\text{س}}\right)^2$
$+\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{\text{ظا}\,5\text{س}}{\text{س}}\right)^2=1+9+25=35$

(١٨) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}}\times\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{\text{جا}\,2\text{س}}{\text{س}}\right)^2$
$\times\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{\text{جا}\,4\text{س}}{\text{س}}\right)^2=1\times 4\times 64=256$

(١٩) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{\frac{\text{ظا}\,6\text{س}}{\text{س}}-\frac{\text{جا}(-3\text{س})}{\text{س}}}{\text{جتا}\,5\text{س}+\text{جتا}\,2\text{س}}=\frac{6-(-3)}{1+1}=\frac{9}{2}$

(٢٠) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{\text{جا}\,\text{س}\left(\sqrt{\text{س}+2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{\text{س}+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{\text{س}+2}+\sqrt{2}\right)}$

$=\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{\text{جا}\,\text{س}\left(\sqrt{\text{س}+2}+\sqrt{2}\right)}{\text{س}+2-2}$

$=\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}}\times\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\sqrt{\text{س}+2}+\sqrt{2}\right)$

$=1\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

(٢١) $\underset{(\text{س}-3)\to 0}{\text{نها}}\frac{\text{ظا}(\text{س}-3)}{(\text{س}-3)}$
$\times\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}}\frac{1}{\text{س}^2+3\text{س}+9}=1\times\frac{1}{27}=\frac{1}{27}$

(٢٢) $\underset{(\text{س}-1)\to 0}{\text{نها}}\frac{\text{جا}(\text{س}-1)}{(\text{س}-1)}\times\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}}\frac{1}{(\text{س}+2)}$
$=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

٣

(١) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{3(1-\text{جتا}\,\text{س})}{\text{س}}=3\times 0=0$

(٢) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{-(1-\text{جتا}\,\text{س})}{\text{س}}\times\frac{\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}}\right)=0\times 1=0$

(٣) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{\frac{1-\text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}}+\frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}}}{\frac{1-\text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}}-\frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}}}=\frac{0+1}{0-1}=-1$

(٤) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{1-\text{جتا}\,3\text{س}}{\text{س}}+\frac{1-\text{جتا}\,4\text{س}}{\text{س}}\right)$

$=3\underset{3\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{1-\text{جتا}\,3\text{س}}{3\text{س}}\right)$

$+4\underset{4\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{1-\text{جتا}\,4\text{س}}{4\text{س}}\right)=0+0=0$

(٥) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}}\times\frac{1-\text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}}\right)=1\times 0=0$

(٦) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{\text{س}(1-\text{جتا}\,\text{س})}{\text{جا}^2\,3\text{س}}$

$=\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{\text{س}^2}{\text{جا}^2\,3\text{س}}\times\frac{1-\text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}}\right)$

$=\frac{1}{9}\times 0=$ صفر

(٧) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{\text{جا}^2\,3\text{س}}{4\text{س}^2}=\frac{9}{4}$

(٨) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{4\text{س}^2}{\text{جا}^2\,\frac{1}{2}\text{س}}=\frac{4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=16$

(٩) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{3(1-\text{جتا}^2\,4\text{س})}{8\text{س}^2}=\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{3\,\text{جا}^2\,4\text{س}}{8\text{س}^2}$

$=\frac{3}{8}\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{\text{جا}\,4\text{س}}{\text{س}}\right)^2=\frac{3}{8}\times 16=6$

(١٠) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{\text{ظا}^2\,\text{س}}{\text{س}^2}=\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{\text{ظا}\,\text{س}}{\text{س}}\right)^2=1$

(١١) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{1-\text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}^2}\times\frac{1+\text{جتا}\,\text{س}}{1+\text{جتا}\,\text{س}}\right)$

$=\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{1-\text{جتا}^2\,\text{س}}{\text{س}^2}\times\frac{1}{1+\text{جتا}\,\text{س}}\right)$

$=\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{\text{جا}^2\,\text{س}}{\text{س}^2}\times\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{1}{1+\text{جتا}\,\text{س}}$

$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(١٢) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{4(1-\text{جتا}\,\text{س})}{\text{س}^2}\times\frac{\text{س}^2}{\text{جا}^2\,3\text{س}}\right)$

$=\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{4\times(1-\text{جتا}\,\text{س})}{\text{س}^2}\times\frac{1+\text{جتا}\,\text{س}}{1+\text{جتا}\,\text{س}}\times\frac{\text{س}^2}{\text{جا}^2\,3\text{س}}\right)$

$=\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{4\,\text{جا}^2\,\text{س}}{\text{س}^2}\times\frac{1}{1+\text{جتا}\,\text{س}}\times\frac{\text{س}^2}{\text{جا}^2\,3\text{س}}\right)$

$=4\times 1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$

(١٣) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{1-\text{جتا}\,2\text{س}}{\text{س}^2}\times\frac{1+\text{جتا}\,2\text{س}}{1+\text{جتا}\,2\text{س}}\times\frac{\text{س}}{\text{ظا}\,2\text{س}}\right)$

$=\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{1-\text{جتا}^2\,2\text{س}}{\text{س}^2}\times\frac{1}{1+\text{جتا}\,2\text{س}}\times\frac{\text{س}}{\text{ظا}\,2\text{س}}\right)$

$=\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{\text{جا}^2\,2\text{س}}{\text{س}^2}\times\frac{1}{1+\text{جتا}\,2\text{س}}\times\frac{\text{س}}{\text{ظا}\,2\text{س}}\right)$

$=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1$

(١٤) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{1-\text{جتا}\,3\text{س}}{-\text{جا}^2\,2\text{س}}$

$=\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{1-\text{جتا}\,3\text{س}}{-\text{جا}^2\,2\text{س}}\times\frac{1+\text{جتا}\,3\text{س}}{1+\text{جتا}\,3\text{س}}\right)$

$=\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{\text{جا}^2\,3\text{س}}{-\text{جا}^2\,2\text{س}}\times\frac{1}{1+\text{جتا}\,3\text{س}}\right)$

$=\frac{-9}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{-9}{8}$

٤

(١) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{\text{جا}\,5\text{س}}{\text{ظا}\,2\text{س}}=\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{\frac{\text{جا}\,5\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{ظا}\,2\text{س}}{\text{س}}}=\frac{5}{2}$

(٢) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\text{س}\left(\frac{1}{\text{جا}\,2\text{س}}-\frac{1}{\text{ظا}\,3\text{س}}\right)$

$=\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\left(\frac{\text{س}}{\text{جا}\,2\text{س}}-\frac{\text{س}}{\text{ظا}\,3\text{س}}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

(٣) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{3\text{س}\,\text{ظا}\,2\text{س}}{\text{جا}^2\,3\text{س}}=\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}}\frac{3\left(\frac{\text{ظا}\,2\text{س}}{\text{س}}\right)}{\left(\frac{\text{جا}\,3\text{س}}{\text{س}}\right)^2}$

$=\frac{3\times 2}{9}=\frac{2}{3}$

④ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٦ س^٢}{\text{جا} ٢س \times \text{ظا} س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left[٦ \times \left(\frac{س}{\text{جا} ٢س} \right) \times \left(\frac{س}{\text{ظا} س} \right) \right]$

$= ٦ \times \frac{١}{٢} \times ١ = ٣$

⑤ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا} س}{\text{جا} ٤س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا} س}{س}}{\frac{\text{جا} ٤س}{س}} = \frac{١}{٤}$

⑥ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س}{\text{جا} س} = ١$

⑦ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س \text{ جا} ٢س}{\text{ظا}^٢ ٢س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا} ٢س}{س}}{\left(\frac{\text{ظا} ٢س}{س}\right)^٢} = \frac{٢}{٤}$

⑧ $\underset{(س - \frac{\pi}{٤}) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا} ٢\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}{٨\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

⑨ $\underset{(س - \frac{\pi}{٤}) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا} ٢\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}{\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}}{\frac{\text{ظا} ٤\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}{\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

⑩ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا} س}{\text{ظا} ٣س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا} س}{س}}{\frac{\text{ظا} ٣س}{س}} = \frac{١}{٣}$

⑪ $\underset{(\pi - س) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\pi - س)}{-(\pi - س)} = -١$

⑫ $\underset{(س + \pi) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}(س + \pi)}{س + \pi} = ١$

⑬ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٢س - \pi}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}$

$= \underset{\frac{\pi}{٢} - س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٢\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)} = -٢$

⑭ $\underset{(\frac{\pi}{٢} - س) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{٢\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)} = \frac{١}{٢}$

⑮ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\pi - \pi س)}{١ - س}$

$= \underset{(١ - س) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا} \pi (١ - س)}{١ - س} = \pi$

⑯ $\underset{(س + ١) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ + س}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} + \frac{\pi}{٢} س\right)}$

$= \underset{(١ + س) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ + س)}{\text{جا}\left[\frac{\pi}{٢}(١ + س)\right]} = \frac{٢}{\pi}$

⑰ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} (١ - س) \text{ ظتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢} س\right)$

$= \underset{(١ - س) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ - س)}{\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٢}(١ - س)\right)} = \frac{٢}{\pi}$

٥

① $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا} س}{س} = ١$

② $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا} س}{س} = \frac{١}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{٢}{\pi}$

③ $\underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا} س}{س} = \frac{\text{صفر}}{\pi} = \text{صفر}$

٦

① $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س - ٥)}{(س - ٥)(س + ٥)} \; \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{١}{س + ٥}$

$\times \underset{(س - ٥) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س - ٥)}{س - ٥} = \frac{١}{١٠} \times ١ = \frac{١}{١٠}$

② $\underset{(س - ٥) \to ٠}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{جا}(س - ٥)}{(س - ٥)}\right]^٢ = (١)^٢ = ١$

③ $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \left[(س - ٥) \times \frac{\text{جا}(س - ٥)^٢}{(س - ٥)^٢}\right]$

$= \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} (س - ٥) \times \underset{(س - ٥)^٢ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س - ٥)^٢}{(س - ٥)^٢}$

$= \text{صفر} \times ١ = \text{صفر}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (د) ② (جـ) ③ (د) ④ (جـ) ⑤ (ب)

إرشادات لحل رقم ١

① يمكننا باستخدام تجريب قيم أ المعطاة استنتاج أن النهاية = ١ عندما أ = ٢

② $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \; س \text{ ظا}\left(\frac{\pi}{٢} + س\right) = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} (-س \text{ ظتا} س)$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-س}{\text{ظا} س} = -١$

③ $\underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{ظا} س}{\text{جتا} س - \text{جا} س}$ «بالضرب × جتا س بسطًا ومقامًا»

$= \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{جتا} س - \text{جا} س)}{\text{جتا} س (\text{جتا} س - \text{جا} س)}$

$= \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{جتا} س} = \sqrt{٢}$

④ $\underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س^٢ - ٥)}{\text{ظا}(\pi س^٢)}$

$= \underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س^٢ - ٥)}{-\text{ظا}(-\pi س^٢)}$

$= \underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س^٢ - ٥)}{-\text{ظا}(٥\pi - \pi س^٢)}$

$= \underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س^٢ - ٥)}{\text{ظا}\left(\pi(س^٢ - ٥)\right)} = \frac{١}{\pi}$

⑤ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\therefore \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا} س}{س} + \frac{\text{جا} ٢س}{س} + \frac{\text{جا} ٣س}{س} + \dots + \frac{\text{جا} ١٠س}{س}}{\frac{\text{ظا} س}{س} + \frac{\text{ظا} ٢س}{س} + \frac{\text{ظا} ٣س}{س} + \dots + \frac{\text{ظا} ١٠س}{س}}$

$= ١$

٢

① بالقسمة بسطًا ومقامًا على $\text{ظا}^٢ س$

$\underset{\text{ظتا} س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣ - ٤ \text{ ظتا} س + ٧ \text{ ظتا}^٢ س}{٥ \text{ ظتا}^٢ س + ٢} = \frac{٣}{٢}$

② $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}[(س + ١)(س - ٢)]}{س + ١}$

$= \underset{(س + ١)(س - ٢) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}[(س + ١)(س - ٢)]}{(س + ١)(س - ٢)}$

$\times \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} (س - ٢) = ١ \times (-٣) = -٣$

③ $\because س \to \infty \quad \therefore \frac{١}{س} \to ٠$

$\therefore \underset{\frac{١}{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا} \frac{٤}{س} + \text{جا} \frac{٣}{س}}{\frac{١}{س}}$

$= \underset{\frac{١}{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{ظا} \frac{٤}{س}}{\frac{١}{س}} + \frac{\text{جا} \frac{٣}{س}}{\frac{١}{س}}\right] = ٤ + ٣ = ٧$

④ $\underset{\text{جا} س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{٥} \times \left[\frac{\text{جا}(\text{جا} س)}{(\text{جا} س)}\right] = \frac{١}{٥}$

⑤ $\underset{١ - \text{جتا} س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(١ - \text{جتا} س)}{(١ - \text{جتا} س)} = ١$

⑥ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{ظا}(\text{ظا} ٥س)}{\text{ظا} ٥س} \times \frac{\text{ظا} ٥س}{٤س}\right)$

$= \underset{\text{ظا} ٥س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}(\text{ظا} ٥س)}{\text{ظا} ٥س} \times \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا} ٥س}{٤س}$

$= ١ \times \frac{٥}{٤} = \frac{٥}{٤}$

⑦ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢ \text{ ظا} س}{س} \times \frac{١}{١ + \text{ظا}^٢ س}\right) = ٢ \times \frac{١}{١ + ٠} = ٢$

⑧ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{ظا}(\text{جتا} س)}{\text{جتا} س} \times \frac{\text{جتا} س}{٢س - \pi}\right)$

$= \underset{\text{جتا} س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}(\text{جتا} س)}{\text{جتا} س} \times \underset{\frac{\pi}{٢} - س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{-٢\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}$

$= ١ \times \frac{-١}{٢} = \frac{-١}{٢}$

⑨ $نها_{س \to \frac{π}{٢}} \frac{(١ - جا س)(١ + جا س)}{(٢س - π)(١ + جا س)}$

$= نها_{س \to \frac{π}{٢}} \frac{جتا^٢ س}{-٢(\frac{π}{٢} - س)} \times \frac{١}{١ + جا س}$

$= نها_{(\frac{π}{٢} - س) \to ٠} \frac{جا^٢(\frac{π}{٢} - س)}{-٢(\frac{π}{٢} - س)^٢} \times \frac{\frac{π}{٢} - س}{١ + جا س}$

$= \frac{١}{-٢} \times$ صفر = صفر

⑩ $نها_{(\frac{π}{٢} - س) \to ٠} \frac{\frac{π}{٢} - س}{٢ ظا(\frac{π}{٢} - س)} = \frac{١}{٢}$

⑪ $نها_{س \to \frac{π}{٢}} \frac{جا(\frac{π}{٢} - س)}{- جا(\frac{٣π}{٢} - ٣س)}$

$= نها_{س \to \frac{π}{٢}} \frac{جا(\frac{π}{٢} - س)}{(\frac{π}{٢} - س)} \times \frac{(\frac{π}{٢} - س)}{-٣ جا(\frac{π}{٢} - س)}$

$= ١ \times \frac{١}{-٣} = \frac{-١}{٣}$

إجابات تمارين 17

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① أولاً: (ب) ثانيًا: (أ) ثالثًا: (د)

② (جـ)	③ (جـ)	④ (ب)	⑤ (ب)
⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)	⑨ (أ)
⑩ (جـ)	⑪ (ب)	⑫ (جـ)	⑬ (ب)
⑭ (ب)	⑮ (د)	⑯ (أ)	⑰ (د)
⑱ (ب)	⑲ (أ)	⑳ (أ)	㉑ (جـ)
㉒ (جـ)	㉓ (د)	㉔ (د)	㉕ (جـ)
㉖ (جـ)	㉗ (ب)		

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

$نها_{س \to ٣^-} د(س) = (٣)^٢ + ١ = ١٠$

$نها_{س \to ٣^+} د(س) = ٣(٣) + ١ = ١٠$

∵ $د(٣^-) = د(٣^+) = ١٠$

∴ $نها_{س \to ٣} د(س) = ١٠$

٢

$د(٣^-) = نها_{س \to ٣^-} د(س) = ٢ \times ٣ - ٧ = -١$

$د(٣^+) = نها_{س \to ٣^+} \frac{(س - ٣)(س - ٤)}{(س - ٣)} = -١$

∵ $د(٣^-) = د(٣^+) = -١$ ∴ $نها_{س \to ٣} د(س) = -١$

٣

$د(٠^-) = نها_{س \to ٠^-} د(س) = ٣$

$د(٠^+) = نها_{س \to ٠^+} د(س) = ١$

∵ $د(٠^-) \neq د(٠^+)$

∴ $نها_{س \to ٠} د(س)$ غير موجودة.

٤

$د(٠^-) = نها_{س \to ٠^-} د(س) = ١$

$د(٠^+) = نها_{س \to ٠^+} \frac{٥س + ٢ ظا س}{٦س + جا س}$

$= نها_{س \to ٠^+} \frac{٥ + \frac{٢ ظا س}{س}}{٦ + \frac{جا س}{س}} = \frac{٥ + ٢}{٦ + ١} = ١$

∵ $د(٠^+) = د(٠^-) = ١$ ∴ $نها_{س \to ٠} د(س) = ١$

٥

① $نها_{س \to ٠^-} د(س) = ٠ - ٢ = -٢$

$نها_{س \to ٠^+} د(س) = ٠^٢ = ٠$

∵ $د(٠^-) \neq د(٠^+)$

∴ $نها_{س \to ٠} د(س)$ غير موجودة.

② $د(١^-) = د(١^+) = ١^٢ = ١$ (لها نفس التعريف)

∴ $نها_{س \to ١} د(س) = ١$

③ $د(٢^-) = نها_{س \to ٢^-} س^٢ = ٤$

$د(٢^+) = نها_{س \to ٢^+} ٢س = ٤$

∵ $د(٢^-) = د(٢^+) = ٤$ ∴ $نها_{س \to ٢} د(س) = ٤$

٦

$د(٢^-) = د(٢^+) =$ صفر ∴ $نها_{س \to ٢} د(س) =$ صفر

٧

$د(٠^+) = نها_{س \to ٠^+} \left(\frac{س}{\sqrt{س + ١} - ١} \times \frac{\sqrt{س + ١} + ١}{\sqrt{س + ١} + ١}\right)$

$= نها_{س \to ٠^+} \frac{س(\sqrt{س + ١} + ١)}{س + ١ - ١}$

$= نها_{س \to ٠^+} (\sqrt{س + ١} + ١) = ٢$

$د(٠^-) = نها_{س \to ٠^-} \frac{٢س}{جا س} = ٢$

∵ $د(٠^+) = د(٠^-)$ ∴ $نها_{س \to ٠} د(س) = ٢$

٨

$د(٤^+) = نها_{س \to ٤^+} \frac{(س - ٣)^٦ - ١}{س - ٤}$

$= نها_{(س - ٣) \to ١^+} \frac{(س - ٣)^٦ - ١^٦}{(س - ٣) - ١} = ٦$

$د(٤^-) = نها_{س \to ٤^-} (س + ٢) = ٦$

∵ $د(٤^+) = د(٤^-)$ ∴ $نها_{س \to ٤} د(س) = ٦$

٩

∵ $نها_{س \to ٢} د(س) = ٧$

∴ $د(٢^-) = د(٢^+) = ٧$

∵ $د(٢^-) = ٤ + ٣م = ٧$ ∴ $م = ١$

∵ $د(٢^+) = ١٠ + ك = ٧$ ∴ $ك = -٣$

١٠

∵ $د(٠^-) = د(٠^+) = ٢$ ∴ $د(٠^-) = أ = ٢$

١١

∵ $نها_{س \to أ} |٣س + ٢| = ١٤$

∴ $|٣أ + ٢| = ١٤$

∴ $٣أ + ٢ = ١٤$ ∴ $أ = ٤$

أ، $٣أ + ٢ = -١٤$ ∴ $أ = \frac{-١٦}{٣}$

١٢

① $د(\frac{-π}{٢}^+) = نها_{س \to (\frac{-π}{٢})^+} \frac{٣س}{ظا س} = \frac{-π}{-\sqrt{٢}} = \frac{π}{\sqrt{٢}}$

، $د(\frac{-π}{٢}^-)$ غير موجودة

∴ $نها_{س \to \frac{-π}{٢}} د(س)$ غير موجودة.

② $د(\frac{π}{٣}^-) = ٢ جا \frac{π}{٣} = \sqrt{٣}$

، $د(\frac{π}{٣}^+)$ غير موجودة.

$نها_{س \to \frac{π}{٣}} د(س)$ غير موجودة.

③ $د(٠^-) = نها_{س \to ٠^-} \frac{٣س}{ظا س} = ٣$

، $د(٠^+) = ٣$

∵ $د(٠^-) = د(٠^+) = ٣$ ∴ $نها_{س \to ٠} د(س) = ٣$

١٣

∵ $د(س) = س^٢ + \frac{\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩}}{س - ٣} = س^٢ + \frac{|س - ٣|}{س - ٣}$

∴ $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ &، س > ٣ \\ س^٢ - ١ &، س < ٣ \end{cases}$

$د(٣^+) = \lim_{س \to ٣^+} (س^٢ + ١) = ١٠$

$د(٣^-) = \lim_{س \to ٣^-} (س^٢ - ١) = ٨$

∵ $د(٣^+) \ne د(٣^-)$ ∴ $\lim_{س \to ٣} د(س)$ غير موجودة.

١٤

$د(س) = \frac{س^٢ + ٢|س|}{س}$

$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س}{س} &، س > ٠ \\ \frac{س^٢ - ٢س}{س} &، س < ٠ \end{cases} = \begin{cases} \frac{س(س + ٢)}{س} &، س > ٠ \\ \frac{س(س - ٢)}{س} &، س < ٠ \end{cases} = \begin{cases} س + ٢ &، س > ٠ \\ س - ٢ &، س < ٠ \end{cases}$

$د(٠^-) = ٠ - ٢ = -٢$

$د(٠^+) = ٠ + ٢ = ٢$

∵ $د(٠^-) \ne د(٠^+)$ ∴ $\lim_{س \to ٠} د(س)$ غير موجودة.

١٥

$د(س) = \begin{cases} -س^٢ + ٢ &، س < ٠ \\ ٢ &، س > ٠ \end{cases}$

$د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} (-س^٢ + ٢) = ٢$

$د(٠^+) = ٢$

∵ $د(٠^-) = د(٠^+)$ ∴ $\lim_{س \to ٠} د(س) = ٢$

١٦

$د(س) = \begin{cases} \frac{(س - ١)^٢}{-(س - ١)} &، س < ١ \\ ٦س - ٣م &، س > ١ \end{cases} = \begin{cases} -(س - ١) &، س < ١ \\ ٦س - ٣م &، س > ١ \end{cases}$

∵ $\lim_{س \to ١} د(س)$ لها وجود عند س = ١

∴ $د(١^-) = د(١^+)$

∴ $-(١ - ١) = ٦(١) - ٣م$

∴ م = ٢

١٧

$(د + ر)(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢س + ٢ &، س \ge ١ \\ ٢س^٢ - ٥س + ٤ &، س < ١ \end{cases}$

$(د + ر)(١^+) = \lim_{س \to ١^+} (س^٢ - ٢س + ٢) = ١$

$(د + ر)(١^-) = \lim_{س \to ١^-} (٢س^٢ - ٥س + ٤) = ١$

∵ $(د + ر)(١^+) = (د + ر)(١^-)$

∴ $\lim_{س \to ١} [د(س) + ر(س)] = ١$

١٨

∵ الدالة لها نهاية عند س = ٠

∴ $د(٠^+) = د(٠^-)$

∴ $\lim_{س \to ٠^+} \frac{أس}{\sqrt{س + ٤} - ٢} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{جا ٢س}{أس}$

∴ $\lim_{س \to ٠^+} \left(\frac{أس}{\sqrt{س + ٤} - ٢} \times \frac{\sqrt{س + ٤} + ٢}{\sqrt{س + ٤} + ٢}\right) = \frac{٢}{أ}$

∴ $\lim_{س \to ٠^+} \frac{أس(\sqrt{س + ٤} + ٢)}{س} = \frac{٢}{أ}$

∴ $٤أ = \frac{٢}{أ}$ ∴ $٤أ^٢ = ٢$ ∴ $أ = \pm \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

١٩

① $د(٥^+) = \lim_{س \to ٥^+} \sqrt{س - ٥} = صفر$

$د(٥^-)$ غير موجودة

∴ $\lim_{س \to ٥} د(س)$ غير موجودة

② $د(٣^+)$ غير موجودة

$د(٣^-) = \lim_{س \to ٣^-} \sqrt{٣ - س} = صفر$

∴ $\lim_{س \to ٣} د(س)$ غير موجودة

③ $د(-١^+)$ غير موجودة

$د(-١^-) = \lim_{س \to (-١)^-} \sqrt{س^٢ - ١} = صفر$

∴ $\lim_{س \to -١} د(س)$ غير موجودة

$د(١^+) = \lim_{س \to ١^+} \sqrt{س^٢ - ١} = صفر$

$د(١^-)$ غير موجودة

∴ $\lim_{س \to ١} د(س)$ غير موجودة

④ $د(-٢^-)$ غير موجودة

$د(-٢^+) = \lim_{س \to (-٢)^+} \sqrt{٤ - س^٢} = صفر$

∴ $\lim_{س \to -٢} د(س)$ غير موجودة

، $د(٢^+)$ غير موجودة

، $د(٢^-) = \lim_{س \to ٢^-} \sqrt{٤ - س^٢} = صفر$

∴ $\lim_{س \to ٢} د(س)$ غير موجودة

٢٠

① $د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{(س + ٢)^٦ - ٢^٦}{س(س + ٣٢)}$

$= \lim_{س \to ٠^-} \left[\frac{١}{س + ٣٢} \times \frac{(س + ٢)^٦ - ٢^٦}{س}\right]$

$= \frac{١}{٣٢} \times ٦ \times ٢^٥ = ٦$

، $د(٠^+) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{-١٢س}{١ - (جاس + جتاس)^٢}$

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{-١٢س}{١ - (١ + ٢ جاس جتاس)}$

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{١٢س}{٢ جاس جتاس} = ٦$

، ∵ $د(٠^+) = د(٠^-) = ٦$

∴ $\lim_{س \to ٠} د(س) = ٦$

② $د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} \left(\frac{١ - جتاس}{جا^٢ ٣س} \times \frac{١ + جتاس}{١ + جتاس}\right)$

$= \lim_{س \to ٠^-} \left(\frac{١ - جتا^٢ س}{جا^٢ ٣س} \times \frac{١}{١ + جتاس}\right)$

$= \lim_{س \to ٠^-} \frac{جا^٢ س}{جا^٢ ٣س}$

$\times \lim_{س \to ٠^-} \frac{١}{١ + جتاس}$

$= \frac{١}{٩} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{١٨}$

، $د(٠^+) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{١}{٢} س^٢ جتا ٦س ظتا^٢ ٣س$

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{\frac{١}{٢} س^٢ جتا ٦س}{ظا^٢ ٣س}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٩} \times ١ = \frac{١}{١٨}$

، ∵ $د(٠^-) = د(٠^+) = \frac{١}{١٨}$

∴ $\lim_{س \to ٠} د(س) = \frac{١}{١٨}$

٢١

∵ $|س| = \begin{cases} س &، س \ge ٠ \\ -س &، س < ٠ \end{cases}$

① $\lim_{س \to ٠^+} \frac{جا|س|}{س} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{جاس}{س} = ١$

، $\lim_{س \to ٠^-} \frac{جا|س|}{س} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{جا(-س)}{س}$

$= -١$

∴ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

∴ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا|س|}{س}$ غير موجودة

② $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \frac{\text{جا}|\text{س}|}{\text{س} + ١} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \frac{\text{جاس}}{\text{س} + ١} = ١$

، $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \frac{\text{جا}|\text{س}|}{\text{س} + ١} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \frac{\text{جا}(-\text{س})}{\text{س} + ١}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \frac{\text{جاس}}{\text{س} + ١} = ١$

∵ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى = ١

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا}|\text{س}|}{\text{س} + ١} = ١$

٢٢

∵ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\sqrt{\text{قا}^٢\text{س} - ١}}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\sqrt{\text{ظا}^٢\text{س}}}{\text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{|\text{ظاس}|}{\text{س}}$

، ∵ $|\text{ظاس}| = \begin{cases} \text{ظاس} ، & \text{ظاس} \geq ٠ \\ -\text{ظاس} ، & \text{ظاس} < ٠ \end{cases}$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \frac{|\text{ظاس}|}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} = ١$

«لاحظ عندما س ← ٠^+ فإن ظاس ← ٠^+»

، $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \frac{|\text{ظاس}|}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \frac{-\text{ظاس}}{\text{س}} = -١$

«لاحظ عندما س ← ٠^- فإن ظاس ← ٠^-»

، ∵ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\sqrt{\text{قا}^٢\text{س} - ١}}{\text{س}}$ غير موجودة

٢٣

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} (\text{ع}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}))$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} (\text{ع}(\text{س})) + \lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} (\text{هـ}(\text{س}))$

$= ١٤ + ٤ = ١٨$

، $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^-} (\text{ع}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}))$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٢^-} (\text{ع}(\text{س})) + \lim\limits_{\text{س} \to ٢^-} (\text{هـ}(\text{س}))$

$= ١٠ + ٨ = ١٨$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} (\text{ع}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}))$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٢^-} (\text{ع}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}))$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} [\text{ع}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})] = ١٨$

٢٤

① ∵ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^-} \frac{١}{\text{س} - ٢} = \frac{١}{٠^-} = -\infty$

، $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} \frac{١}{\text{س} - ٢} = \frac{١}{٠^+} = \infty$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{١}{\text{س} - ٢}$ غير موجودة

② ∵ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^-} \text{د}(\text{س}) = \frac{١}{٠^+} = \infty$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} \text{د}(\text{س}) = \frac{١}{٠^+} = \infty$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س}) = \infty$

③ ∵ $\lim\limits_{\text{س} \to ١^-} \frac{١}{\text{س} - ١} = \frac{١}{٠^-} = -\infty$

$\lim\limits_{\text{س} \to ١} (\text{س} - ٢) = -١$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{د}(\text{س})$ غير موجودة.

٢٥

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ١ + \frac{\text{س}(\text{س} + ٢)}{-(\text{س} + ٢)} ، & -٣ < \text{س} < -٢ \\ ١ + \frac{\text{س}(\text{س} + ٢)}{\text{س} + ٢} ، & -٢ < \text{س} < ٠ \\ ٢\text{س} + ١ & ٠ \leq \text{س} < ٣ \end{cases}$

$= \begin{cases} ١ - \text{س} ، & -٣ < \text{س} < -٢ \\ ١ + \text{س} ، & -٢ < \text{س} < ٠ \\ ٢\text{س} + ١ ، & ٠ < \text{س} < ٣ \end{cases}$

① $\lim\limits_{\text{س} \to -٢^-} \text{د}(\text{س})$ غير موجودة

$\lim\limits_{\text{س} \to -٢^+} \text{د}(\text{س}) = ٤$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to -٢} \text{د}(\text{س})$ غير موجودة.

② $\lim\limits_{\text{س} \to -٢^-} \text{د}(\text{س}) = ١ - (-٢) = ٣$

$\lim\limits_{\text{س} \to -٢^+} \text{د}(\text{س}) = ١ + (-٢) = -١$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to -٢} \text{د}(\text{س})$ غير موجودة.

③ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \text{د}(\text{س}) = ١$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \text{د}(\text{س}) = ١$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د}(\text{س}) = ١$

④ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^-} \text{د}(\text{س}) = ٢(٣) + ١ = ٧$

، $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^+} \text{د}(\text{س})$ غير موجودة

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{د}(\text{س})$ غير موجودة.

٢٦

$\text{د}(٢^+) = \lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} \frac{(٢\text{س} - ٣)^{\frac{١}{٣}} - ١}{(٣\text{س} - ٥)^{\frac{١}{٥}} - ١}$

$= \frac{٢}{٣} \lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} \left(\frac{(٢\text{س} - ٣)^{\frac{١}{٣}} - ١^{\frac{١}{٣}}}{٢(\text{س} - ٢)} \times \frac{٣(\text{س} - ٢)}{(٣\text{س} - ٥)^{\frac{١}{٥}} - ١^{\frac{١}{٥}}} \right)$

$= \frac{٢}{٣} \lim\limits_{(٢\text{س} - ٣) \to ١} \frac{(٢\text{س} - ٣)^{\frac{١}{٣}} - ١^{\frac{١}{٣}}}{(٢\text{س} - ٣) - ١} \times \lim\limits_{(٣\text{س} - ٥) \to ١} \frac{(٣\text{س} - ٥) - ١}{(٣\text{س} - ٥)^{\frac{١}{٥}} - ١^{\frac{١}{٥}}}$

$= \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٣} \times ٥ = \frac{١٠}{٩}$

، ∵ الدالة لها نهاية عند س = ٢

∴ د(٢^+) = د(٢^-)

∴ $\frac{١٠}{٩} = ٢\text{ك}$ ∴ $\text{ك} = \frac{٥}{٩}$

٢٧

∵ الدالة لها نهاية عند س = ٣

∴ د(٣^-) = د(٣^+)

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^٢ + \text{أس} + \text{ب}}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ١)} = ١٢$

، ∵ المقام = صفر عندما س = ٣

∴ البسط = صفر عندما س = ٣

∴ $(٣)^٢ + \text{أ}(٣) + \text{ب} = ٠$

∴ $\text{ب} = -٣\text{أ} - ٩$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^٢ + \text{أس} - ٣\text{أ} - ٩}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ١)} = ١٢$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{(\text{س}^٢ - ٩) + (\text{أس} - ٣\text{أ})}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ١)} = ١٢$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣) + \text{أ}(\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ١)} = ١٢$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣ + \text{أ})}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ١)} = ١٢$

∴ $\frac{٦ + \text{أ}}{٢} = ١٢$ ∴ $\text{أ} = ١٨$

ومنها ب = -٦٣

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

① (جـ) ② (ب) ③ (أ) ④ (جـ) ⑤ (جـ)

⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (د) ⑨ (جـ) ⑩ (د)

إرشادات الحل :

① ∵ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٢$

∴ $\text{د}(\text{د}(\text{س})) = (\text{س}^٢)^٢ = \text{س}^٤$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{د}(\text{س})) = \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{س}^٤$

$= ٢^٤ = ١٦$

② ∵ نهـا$_{س \to ٢}$ د(س) = ٧

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة (٢ ، ٧) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة.

، ∵ د دالة فردية.

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة (-٢ ، -٧) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة.

∴ نهـا$_{س \to -٢}$ د(س) = -٧

③ ∵ نهـا$_{س \to ٢}$ د(س) = ٥

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة (٢ ، ٥) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة.

، ∵ د دالة زوجية.

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة (-٢ ، ٥) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة.

∴ نهـا$_{س \to -٢}$ د(س) = ٥

④ ∵ د دالة كثيرة حدود ، نهـا$_{س \to ٢}$ د(س) = ٣

∴ منحنى الدالة يمر بالنقطة (٢ ، ٣)

∴ منحنى د$^{-١}$ يمر بالنقطة (٣ ، ٢)

∴ نهـا$_{س \to ٣}$ د$^{-١}$(س) = ٢

⑤ ∵ منحنى د(س + ١) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة أفقية مقدارها وحدة واحدة فى اتجاه و س'

، ∵ نهـا د(س) = ٥ عند س ← ٢

∴ نهـا د(س + ١) = ٥ عندما س ← ١

أى أن: نهـا$_{س \to ١}$ د(س + ١) = ٥

⑥ ∵ نهـا$_{س \to -٢}$ $\frac{[د(س)]^{٣} - ٦٤}{د(س) - ٤}$

«لاحظ أن عند س ← -٢

فإن د(س) ← د(-٢) أى أن: د(س) ← ٤»

= نهـا$_{د(س) \to ٤}$ $\frac{[د(س)]^{٣} - (٤)^{٣}}{[د(س)] - (٤)}$ = ٣(٤)^{٢} = ٤٨

⑦ من الرسم نجد أن د(س) = س - ١

، ر(س) = -س + ١

∴ نهـا$_{س \to ١}$ $\frac{د(س)}{ر(س)}$ = نهـا$_{س \to ١}$ $\frac{س - ١}{-س + ١}$

= نهـا$_{س \to ١}$ $\frac{س - ١}{-(س - ١)}$ = -١

⑧ نهـا$_{س \to ١^{+}}$ د(س)

= نهـا$_{س \to ١^{+}}$ [هـ(س) + ر(س)]

= نهـا$_{س \to ١^{+}}$ هـ(س) + نهـا$_{س \to ١^{+}}$ ر(س)

= -١ + ١ = صفر

، نهـا$_{س \to ١^{-}}$ د(س)

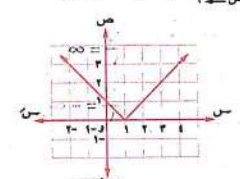
= نهـا$_{س \to ١^{-}}$ [هـ(س) + ر(س)]

= نهـا$_{س \to ١^{-}}$ هـ(س) + نهـا$_{س \to ١^{-}}$ ر(س)

= ٢ + (-٢) = صفر

∴ نهـا$_{س \to ١}$ د(س) = صفر

⑨



لاحظ أن: منحنى |د(س)| هو نفس منحنى د(س) بعد انعكاس الجزء الموجود أسفل محور السينات لأعلى كما بالشكل السابق

ومن الرسم ∴ نهـا$_{س \to (-٢)^{+}}$ |د(س)| = ١

⑩ ∵ د(س) = $\frac{٤}{٣}$ س + ٤

وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{٤}{٣}$ ص + ٤

∴ ص = $\frac{٣}{٤}$ (س - ٤) = $\frac{٣}{٤}$ س - ٣

∴ د$^{-١}$(س) = $\frac{٣}{٤}$ س - ٣

∴ نهـا$_{س \to \infty}$ $\frac{د(س)}{د^{-١}(س)}$ = نهـا$_{س \to \infty}$ $\frac{\frac{٤}{٣}س + ٤}{\frac{٣}{٤}س - ٣}$ = $\frac{١٦}{٩}$

إجابات تمارين 18

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (أ)	③ (أ)	④ (د)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (ب)	⑩ (أ)	⑪ (جـ)	⑫ (جـ)
⑬ (جـ)	⑭ (د)	⑮ (جـ)	⑯ (أ)
⑰ (أ)	⑱ (أ)	⑲ (أ)	⑳ (د)
㉑ (ب)	㉒ (ب)	㉓ (جـ)	㉔ (د)
㉕ (أ)	㉖ (أ)	㉗ (جـ)	㉘ (جـ)
㉙ (جـ)	㉚ (ب)	㉛ (ب)	㉜ (د)
㉝ (د)	㉞ (ب)		

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على الاتصال عند نقطة

1

① ∵ د(-١) = نهـا$_{س \to -١}$ (س^{٢} + س - ٣) = -٣

∴ الدالة د متصلة عند س = -١

② ∵ د(٩) = نهـا$_{س \to ٩}$ $\sqrt[٣]{س - ١}$ = ٢

∴ الدالة د متصلة عند س = ٩

③ ∵ د(١) = نهـا$_{س \to ١}$ $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ = ٣

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

، ∵ د(٢) غير معرفة

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٢

④ د(٣) = نهـا$_{س \to ٣}$ (٥ - |س - ٣|) = ٥

∴ الدالة د متصلة عند س = ٣

⑤ ∵ د(٤) = نهـا$_{س \to ٤}$ (|س - ٤| + |س + ٢|) = ٦

∴ الدالة د متصلة عند س = ٤

، ∵ د(-٢) = نهـا$_{س \to -٢}$ (|س - ٤| + |س + ٢|) = ٦

∴ الدالة د متصلة عند س = -٢

⑥ ∵ د($\frac{١}{٢}$) = ٤($\frac{١}{٢}$)^{٢} + ٣ = ٤

، د($\frac{١}{٢}^{-}$) = نهـا$_{س \to \frac{١}{٢}^{-}}$ (٤س^{٢} + ٣) = ٤

، د($\frac{١}{٢}^{+}$) = نهـا$_{س \to \frac{١}{٢}^{+}}$ (٥ - ٢س) = ٤

∴ د($\frac{١}{٢}$) = د($\frac{١}{٢}^{-}$) = د($\frac{١}{٢}^{+}$)

∴ الدالة د متصلة عند س = $\frac{١}{٢}$

⑦ ∵ د(-١) = نهـا$_{س \to -١}$ ٢س = -٢

∴ الدالة د متصلة عند س = -١

، ∵ الدالة د غير معرفة عند س = ١

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ١

⑧ * عند س = -٢

د(-٢) = ١ ، د(-٢$^{+}$) = ١

، د(-٢$^{-}$) = نهـا$_{س \to (-٢)^{-}}$ (س + ٤) = ٢

، ∵ د(-٢$^{-}$) ≠ د(-٢$^{+}$)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = -٢

* عند $س = -١$

$د(-١) = -٢ + ٣ = ١$ ، $د(-١^{-}) = ١$

، $د(-١^{+}) = \underset{س \to -١^{+}}{نهـا} (٢س + ٣) = ١$

∴ $د(-١) = د(-١^{-}) = د(-١^{+})$

∴ الدالة د متصلة عند $س = -١$

(٩) ∵ $د(١) = ٤$

، $د(١^{+}) = \underset{س \to ١^{+}}{نهـا} (س^{٢} + ٣) = ٤$

، $د(١^{-}) = \underset{س \to ١^{-}}{نهـا} \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س - ١}$

$= \underset{س \to ١^{-}}{نهـا} \frac{(س - ١)(س + ٣)}{س - ١} = ٤$

، ∵ $د(١) = د(١^{-}) = د(١^{+})$

∴ الدالة د متصلة عند $س = ١$

(١٠) $د(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س > ٠ \\ ٢ & ، س = ٠ \\ -س^{٢} & ، س < ٠ \end{cases}$

$د(٠) = ٢$ ، $د(٠^{+}) = \underset{س \to ٠^{+}}{نهـا} س^{٢} = ٠$

، $د(٠^{-}) = \underset{س \to ٠^{-}}{نهـا} (-س^{٢}) = ٠$

∵ $د(٠) \neq \underset{س \to ٠}{نهـا} د(س)$

∴ الدالة د غير متصلة عند $س = ٠$

(١١) $د(س) = \begin{cases} ١ & ، س > ٣ \\ ٢ & ، س = ٣ \\ -١ & ، س < ٣ \end{cases}$

$د(٣) = ٢$ ، $د(٣^{+}) = ١$ ، $د(٣^{-}) = -١$

∵ $د(٣) \neq د(٣^{+}) \neq د(٣^{-})$

∴ الدالة د غير متصلة عند $س = ٣$

(١٢) $د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - س - ٢}{س - ٢} & ، س < ٢ \\ ٣ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{(س - ٢)(س + ١)}{س - ٢} & ، س < ٢ \\ ٣ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

$= \begin{cases} س + ١ & ، س < ٢ \\ ٣ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

∴ $د(٢) = ٣$ ، $د(٢^{+}) = \underset{س \to ٢^{+}}{نهـا} ٣ = ٣$

، $د(٢^{-}) = \underset{س \to ٢^{-}}{نهـا} (س + ١) = ٣$

، ∵ $د(٢) = د(٢^{+}) = د(٢^{-})$

∴ الدالة د متصلة عند $س = ٢$

(١٣) $د(٢) = ٣ \times ٤ + ٢ = ١٤$

، $\underset{س \to ٢}{نهـا} د(س) = \underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{س^{٧} - ٢^{٧}}{س^{٤} - ٢^{٤}}$

$= \frac{٧}{٤} (٢)^{٣} = ١٤$

∴ $د(٢) = \underset{س \to ٢}{نهـا} د(س)$

∴ الدالة د متصلة عند $س = ٢$

(١٤) $د(٠) = ٠$

، $د(٠^{-}) = ٢ \underset{س \to ٠^{-}}{نهـا} جاس = ٠$

، $د(٠^{+}) = \underset{س \to ٠^{+}}{نهـا} \frac{١ - جتاس}{س} = ٠$

∴ $د(٠) = د(٠^{-}) = د(٠^{+})$

∴ الدالة د متصلة عند $س = ٠$

(١٥) $د(٢) = \frac{١}{٤}$

، $د(٢^{+}) = \underset{س \to ٢^{+}}{نهـا} \left(١ - \frac{٣}{س^{٢}}\right) = \frac{١}{٤}$

، $د(٢^{-}) = \underset{س \to ٢^{-}}{نهـا} \frac{جا(س - ٢)}{س^{٢} - ٤}$

$= \underset{س \to ٢^{-}}{نهـا} \frac{جا(س - ٢)}{س - ٢}$

$\times \underset{س \to ٢^{-}}{نهـا} \frac{١}{س + ٢} = ١ \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$

∵ $د(٢) = د(٢^{-}) = د(٢^{+})$

∴ الدالة د متصلة عند $س = ٢$

(١٦) $د(س) = \begin{cases} -س^{٢} + ٤ & ، س \leq ٠ \\ ٤ & ، س > ٠ \end{cases}$

$د(٠) = ٤$

، $د(٠^{-}) = \underset{س \to ٠^{-}}{نهـا} (-س^{٢} + ٤) = ٤$

، $د(٠^{+}) = ٤$

∴ $د(٠) = د(٠^{+}) = د(٠^{-})$

∴ الدالة د متصلة عند $س = ٠$

(١٧) $د(س) = \begin{cases} \frac{(س - ١)(س + ٣)}{|س + ٣|} & ، س \neq -٣ \\ ٢ & ، س = -٣ \end{cases}$

$= \begin{cases} س - ١ & ، س > -٣ \\ ٢ & ، س = -٣ \\ -س + ١ & ، س < -٣ \end{cases}$

* عند $س = -٣$

$د(-٣) = ٢$

، $د(-٣^{+}) = \underset{س \to -٣^{+}}{نهـا} (س - ١) = -٤$

، $د(-٣^{-}) = \underset{س \to -٣^{-}}{نهـا} (-س + ١) = ٤$

∵ $د(-٣^{+}) \neq د(-٣^{-})$

∴ الدالة د غير متصلة عند $س = -٣$

* عند $س = ١$

$د(١) = صفر$

، $\underset{س \to ١}{نهـا} د(س) = \underset{س \to ١}{نهـا} (س - ١)$

$= صفر$

∵ $د(١) = \underset{س \to ١}{نهـا} د(س)$

∴ الدالة د متصلة عند $س = ١$

(١٨) $د(س) = \begin{cases} -س - ٣ & ، س < -٣ \\ س + ٣ & ، -٣ \leq س \leq ٢ \\ ١١ - ٣س & ، س > ٢ \end{cases}$

* عند $س = -٣$

$د(-٣) = صفر$

، $د(-٣^{-}) = \underset{س \to -٣^{-}}{نهـا} (-س - ٣) = صفر$

، $د(-٣^{+}) = \underset{س \to -٣^{+}}{نهـا} (س + ٣) = صفر$

∴ $د(-٣) = د(-٣^{-}) = د(-٣^{+})$

∴ الدالة د متصلة عند $س = -٣$

* عند $س = ٢$

$د(٢) = ٥$

، $د(٢^{-}) = \underset{س \to ٢^{-}}{نهـا} (س + ٣) = ٥$

، $د(٢^{+}) = \underset{س \to ٢^{+}}{نهـا} (١١ - ٣س) = ٥$

∴ $د(٢) = د(٢^{-}) = د(٢^{+})$

∴ الدالة د متصلة عند $س = ٢$

(١٩) $د(٠) = ٣$

، $د(٠^{+}) = \underset{س \to ٠^{+}}{نهـا} \frac{س + ٣}{س + ١} = ٣$

، $د(٠^{-}) = \underset{س \to ٠^{-}}{نهـا} \frac{٥س^{٢} + جا^{٢}٢س}{س ظا٣س}$

$= \underset{س \to ٠^{-}}{نهـا} \frac{٥ + \left(\frac{جا٢س}{س}\right)^{٢}}{\frac{ظا٣س}{س}}$

$= \frac{٥ + ٤}{٣} = ٣$

∴ $د(٠) = د(٠^{+}) = د(٠^{-})$

∴ الدالة د متصلة عند $س = ٠$

(٢٠) $د(\pi) = ١$

، $\underset{س \to \pi}{نهـا} د(س) = \underset{س \to \pi}{نهـا} \frac{جاس}{\pi - س}$

$= \underset{(\pi - س) \to ٠}{نهـا} \frac{جا(\pi - س)}{\pi - س} = ١$

∴ $د(\pi) = \underset{س \to \pi}{نهـا} د(س)$

∴ الدالة د متصلة عند $س = \pi$

٢

① $\text{د}(-٣) = -٣ + \text{أ}$

، $\lim\limits_{\text{س}\to -٣} \text{د}(\text{س})$

$= \lim\limits_{\text{س}\to -٣} \frac{(\text{س}+٣)(\text{س}-١)}{\text{س}+٣} = -٤$

، ∵ الدالة د متصلة عند $\text{س} = -٣$

∴ $-٣ + \text{أ} = -٤$ ∴ $\text{أ} = -١$

② $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \text{د}(\text{س})$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}-٣)}{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}-٣}{\text{س}^٢+٢\text{س}+٤} = \frac{-١}{١٢}$

، $\text{د}(٢) = \frac{-٢}{|\text{أ}|}$

، ∵ الدالة د متصلة عند $\text{س} = ٢$

∴ $-\frac{١}{١٢} = \frac{-٢}{|\text{أ}|}$ ∴ $|\text{أ}| = ٢٤$ ∴ $\text{أ} = \pm ٢٤$

③ $\text{د}(١) = \text{ك}$

، $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \text{د}(\text{س})$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{\sqrt{\text{س}+٣}-٢}{\text{س}^٢-١} \times \frac{\sqrt{\text{س}+٣}+٢}{\sqrt{\text{س}+٣}+٢}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}+٣-٤}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)(\sqrt{\text{س}+٣}+٢)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{١}{(\text{س}+١)(\sqrt{\text{س}+٣}+٢)} = \frac{١}{٨}$

∵ الدالة د متصلة عند $\text{س} = ١$ ∴ $\text{ك} = \frac{١}{٨}$

④ $\text{د}(٠) = \text{أ} + ١$

، $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \text{د}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}^٢ ٢\text{س}}{\text{س طا } ٣\text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\left(\frac{\text{جا } ٢\text{س}}{\text{س}}\right)^٢}{\frac{\text{طا } ٣\text{س}}{\text{س}}} = \frac{٤}{٣}$

∵ الدالة د متصلة عند س = ٠

∴ $\text{أ} + ١ = \frac{٤}{٣}$ ∴ $\text{أ} = \frac{١}{٣}$

⑤ $\text{د}(-٢) = -٨$

، $\text{د}(-٢^+) = \lim\limits_{\text{س}\to -٢^+} (\text{أ س} + \text{ب}) = -٢\text{أ} + \text{ب}$

∵ الدالة د متصلة عند $\text{س} = -٢$

∴ $-٢\text{أ} + \text{ب} = -٨$ (١)

$\text{د}(٥) = ١٣$

، $\text{د}(٥^-) = \lim\limits_{\text{س}\to ٥^-} (\text{أ س} + \text{ب}) = ٥\text{أ} + \text{ب}$

∵ الدالة د متصلة عند $\text{س} = ٥$

∴ $٥\text{أ} + \text{ب} = ١٣$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\text{أ} = ٣$ ، $\text{ب} = -٢$

⑥ $\text{د}(٢) = ٣$

، $\text{د}(٢^+) = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^+} (\text{أ} + \text{ب س}) = \text{أ} + ٢\text{ب}$

، $\text{د}(٢^-) = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^-} (\text{ب} - \text{أ س}^٢) = \text{ب} - ٤\text{أ}$

∵ الدالة د متصلة عند $\text{س} = ٢$

∴ $\text{أ} + ٢\text{ب} = ٣$ (١)

، $\text{ب} - ٤\text{أ} = ٣$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\text{أ} = -\frac{١}{٣}$ ، $\text{ب} = \frac{٥}{٣}$

⑦ $\text{د}(٠) = \text{ك}$

، $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \text{د}(\text{س})$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \left[\frac{\text{جتا } ٢\text{س} - ١}{\text{س}^٢} \times \frac{\text{جتا } ٢\text{س} + ١}{\text{جتا } ٢\text{س} + ١}\right]$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \left[\frac{\text{جتا}^٢ ٢\text{س} - ١}{\text{س}^٢} \times \frac{١}{\text{جتا } ٢\text{س} + ١}\right]$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{-\text{جا}^٢ ٢\text{س}}{\text{س}^٢} \times \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{١}{\text{جتا } ٢\text{س} + ١}$

$= -\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \left(\frac{\text{جا } ٢\text{س}}{\text{س}}\right)^٢ \times \frac{١}{٢} = -٢$

، ∵ الدالة د متصلة عند $\text{س} = ٠$ ∴ $\text{ك} = -٢$

⑧ $\text{د}(\text{جـ}^-) = ٢ - \text{جـ}^٢$ ، $\text{د}(\text{جـ}^+) = \text{جـ}$

∵ الدالة د متصلة عند $\text{س} = \text{جـ}$

∴ $٢ - \text{جـ}^٢ = \text{جـ}$ ∴ $\text{جـ}^٢ + \text{جـ} - ٢ = ٠$

∴ $(\text{جـ} - ١)(\text{جـ} + ٢) = ٠$

∴ $\text{جـ} = ١$ أ، $\text{جـ} = -٢$

⑨ $\text{د}(٠) = ٠$ ، $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \text{د}(\text{س})$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{ك س}} = ٠ \times \frac{١}{\text{ك}}$

، ∵ الدالة د متصلة عند $\text{س} = ٠$

∴ $\frac{١}{\text{ك}} \times ٠ = ٠$ عندما $\text{ك} \in \text{ح} - \{٠\}$

٣

① $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}{\text{س} - ٣}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٣} \frac{(\text{س}+٢)(\text{س}-٣)}{\text{س}-٣} = ٥$

إعادة التعريف :

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} \neq ٣ \\ ٥ & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$

② $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}^٣ - ١}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{(\text{س}-١)(\text{س}^٢+\text{س}+١)}{(\text{س}-١)(\text{س}-٢)} = -٣$

إعادة التعريف :

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^٣ - ١}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢} & ، \text{س} \neq ١ \\ -٣ & ، \text{س} = ١ \end{cases}$

③ $\text{د}(١^+) = \lim\limits_{\text{س}\to ١^+} (\text{س}^٢ + ٢\text{س}) = ٣$

$\text{د}(١^-) = \lim\limits_{\text{س}\to ١^-} (٥\text{س} - ١) = ٤$

∵ $\text{د}(١^+) \neq \text{د}(١^-)$

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكى تصبح متصلة عند $\text{س} = ١$

④ $\text{د}(٢^+) = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^+} (\text{س}^٢ + ١) = ٥$

، $\text{د}(٢^-) = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^-} \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}{\text{س}-٢} = ٤$

، ∵ $\text{د}(٢^+) \neq \text{د}(٢^-)$

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكى تصبح متصلة عند $\text{س} = ٢$

⑤ $\text{د}(٠^+) = \lim\limits_{\text{س}\to ٠^+} \frac{٢\text{س} + ١ - \text{جتا س}}{٥\text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٠^+} \left(\frac{٢}{٥} + \frac{١ - \text{جتا س}}{٥\text{س}}\right) = \frac{٢}{٥}$

، $\text{د}(٠^-) = \lim\limits_{\text{س}\to ٠^-} \frac{٢ \text{ جتا س}}{٥} = \frac{٢}{٥}$

∴ $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \text{د}(\text{س}) = \frac{٢}{٥}$

إعادة التعريف :

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٢\text{س} + ١ - \text{جتا س}}{٥\text{س}} & ، \text{س} > ٠ \\ \frac{٢}{٥} & ، \text{س} = ٠ \\ \frac{٢}{٥} \text{ جتا س} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$

⑥ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س} - ٣}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} > ٣ \\ \frac{-(\text{س} - ٣)}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$

$= \begin{cases} ١ & ، \text{س} > ٣ \\ -١ & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$

$\text{د}(٣^+) = ١$ ، $\text{د}(٣^-) = -١$

∵ $\text{د}(٣^+) \neq \text{د}(٣^-)$

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكى تصبح متصلة عند $\text{س} = ٣$

⑦ $\lim\limits_{\text{س}\to ٨} \frac{\text{س}^٢ - ٦٤}{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢} = \lim\limits_{\text{س}\to ٨} \frac{\text{س}^٢ - ٨^٢}{\text{س}^{\frac{١}{٣}} - ٨^{\frac{١}{٣}}}$

$= ٣ \times ٢ \times ٨^{٢ - \frac{١}{٣}} = ١٩٢$

إعادة التعريف :

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^٢ - ٦٤}{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢} & ، \text{س} \neq ٨ \\ ١٩٢ & ، \text{س} = ٨ \end{cases}$

⑧ د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{س + س}}{\text{س}} & \text{، س > ٠} \\ \frac{\text{−س + س}}{\text{س}} & \text{، س < ٠} \end{cases}$

= $\begin{cases} ٢ & \text{، س > ٠} \\ ٠ & \text{، س < ٠} \end{cases}$

د(٠⁺) = ٢ ، د(٠⁻) = صفر

∵ د(٠⁺) ≠ د(٠⁻)

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكي تصبح متصلة عند س = ٠.

⑨ نهــا س←٥ $\left[\frac{٢}{\text{س − ٥}} - \frac{١٢}{\text{(س − ٥)(س + ١)}}\right]$

= نهــا س←٥ $\frac{\text{٢(س + ١) − ١٢}}{\text{(س − ٥)(س + ١)}}$

= نهــا س←٥ $\frac{\text{٢س − ١٠}}{\text{(س − ٥)(س + ١)}}$

= نهــا س←٥ $\frac{\text{٢(س − ٥)}}{\text{(س − ٥)(س + ١)}} = \frac{١}{٣}$

إعادة التعريف :

د(س) = $\begin{cases} \frac{٢}{\text{س − ٥}} - \frac{١٢}{\text{س}^٢\text{ − ٤س − ٥}} & \text{، س ≠ ٥} \\ \frac{١}{٣} & \text{، س = ٥} \end{cases}$

⑩ د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} & \text{، س > ٠} \\ \frac{\text{−جاس}}{\text{س}} & \text{، س < ٠} \end{cases}$

∵ د(٠⁺) = نهــا س←٠⁺ $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ = ١

، د(٠⁻) = نهــا س←٠⁻ $\frac{\text{−جاس}}{\text{س}}$ = −١

، ∵ د(٠⁺) ≠ د(٠⁻)

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكي تصبح متصلة عند س = ٠.

تمارين على الاتصال على فترة

٤

① ∵ الدالة كثيرة حدود ∴ د متصلة على ح

② ∵ الدالة كثيرة حدود ∴ د متصلة على ح

③ ∵ الدالة كسرية ، س − ٣ = ٠ ∴ س = ٣

∴ الدالة د متصلة على ح − {٣}

④ ∵ الدالة كسرية ، س² − ٥س + ٦ = ٠

∴ (س − ٣)(س − ٢) = ٠

∴ س = ٣ أو س = ٢

∴ د متصلة على ح − {٢ ، ٣}

⑤ ∵ الدالة كسرية ، س⁴ − ١٣س² + ٣٦ = ٠

∴ (س² − ٩)(س² − ٤) = ٠

∴ س = ±٣ أو س = ±٢

∴ د متصلة على ح − {٣ ، −٣ ، ٢ ، −٢}

⑥ ∵ الدالة كسرية ، س² + س + ١ = ٠

لا توجد أصفار للمقام ∴ د متصلة على ح

⑦ ∵ الدالة كسرية ، س³ − س = ٠ ∴ س(س² − ١) = ٠

∴ س = ٠ أو س = ±١

∴ د متصلة على ح − {٠ ، ١ ، −١}

⑧ ∵ الدالة على شكل مقياس لكثيرة حدود

∴ د متصلة على ح

⑨ ∵ كل من الدالتين س³ ، جا ٢س متصلة على ح

∴ د متصلة على ح

⑩ ∵ كل من الدالتين جاس ، ٣ جتا (س + ١) متصلة على ح ∴ د متصلة على ح

⑪ ∵ كل من الدالتين (٣س + ٤)² ، جا ٢س متصلة على ح ∴ د متصلة على ح

⑫ ∵ الدالة كسرية ، |س| − ٢ = ٠

∴ |س| = ٢ ∴ س = ±٢

∴ د متصلة على ح − {٢ ، −٢}

⑬ ∵ الدالة كسرية ، |س| + ١ = ٠ |س| = −١ مرفوض

∴ د متصلة على ح

⑭ ∵ س − ٢ > ٠ ∴ س > ٢

∴ د متصلة على]٢ ، ∞[

⑮ ∵ الدوال س² ، (س + ١) ، جا ٢س متصلة على ح

∴ د متصلة على ح − {−١}

⑯ ∵ س − ٤ ≥ ٠ ∴ س ≥ ٤

∴ س ∈ [٤ ، ∞[

∴ د متصلة على الفترة [٤ ، ∞[− {٦}

⑰ ∵ س − ٣ ≥ ٠ ∴ س ≥ ٣ ∴ س ∈ [٣ ، ∞[

∴ د متصلة على الفترة [٣ ، ∞[− {٢ ، −٢}

أي أن د متصلة على الفترة [٣ ، ∞[

⑱ ∵ س + ٢ > ٠ ∴ س > −٢ ∴ س ∈]−٢ ، ∞[

∴ د متصلة على الفترة]−٢ ، ∞[− {٠}

⑲ ∵ س + ٢ ≥ ٠ ∴ س ≥ −٢ ∴ س ∈ [−٢ ، ∞[

، س + ٢ ≠ ١ ∴ س ≠ −١

∴ د متصلة على [−٢ ، ∞[− {−١}

⑳ ∵ س + ٢ ≥ ٠ ، س ≥ −٢ ∴ س ∈ [−٢ ، ∞[

، ٣ − س ≥ ٠ ، ٣ ≥ س

∴ س ∈]−∞ ، ٣]

∴ د متصلة على [−٢ ، ٣]

㉑ ٢٥ − س² > ٠ ، س² < ٢٥

|س| < ٥ ، −٥ < س < ٥

∴ د متصلة على الفترة]−٥ ، ٥[

㉒ ٥ − |س| ≥ ٠ ، |س| ≤ ٥ ∴ −٥ ≤ س ≤ ٥

∴ د متصلة على الفترة [−٥ ، ٥]

㉓ ∵ جاس = ٠ عندما س = π ن

∴ د متصلة على ح − {س : س = π ن ، ن ∈ ص}

㉔ ∵ جتاس = ٠ عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ + π ن

∴ د متصلة على ح − {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + π ن ، ن ∈ ص}

㉕ كل من الدالتين جا ٣س ، جتا ٥س متصلة على ح

، ∵ ١ − جتاس = ٠ ∴ جتاس = ١

∴ س = ٢π ن ∴ د متصلة على ح − {س : س = ٢π ن ، ن ∈ ص}

(٢٦) ∵ ١ + ظا س = ٠ ∴ ظا س = −١

∴ $س = \frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi ن$

∴ د متصلة على

ح − $\{س : س = \frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi ن ، ن \in ص\}$

(٢٧) كل من الدالتين (ظا² س ، ظتا س) متصلة على ح

، $س^٢ - ٩ = ٠$ ∴ س = ± ٣

∴ د متصلة على ح − {٣ ، −٣}

(٢٨) د متصلة على

ح − $\{س : س = \frac{\pi}{٢} + ن\pi ، ن \in ص\}$

(٢٩) ∵ ظا س متصلة على

ح − $\{\frac{\pi}{٢} + ن\pi ، ن \in ص\}$

، $س^٢ - ٩ = ٠$ ∴ س = ± ٣

∴ الدالة د متصلة على

ح − $\{٣ ، -٣ ، \frac{\pi}{٢} + ن\pi\}$ حيث ن ∈ ص

٥

(١) **أولاً :** ∵ د(س) = س² + ١ كثيرة الحدود

∴ د متصلة على]−∞ ، ١[

، د(س) = ٢ س كثيرة حدود

∴ د متصلة على]١ ، ∞[

ثانيًا : ∵ د(١) = ٢

، $د(١^-) = \lim_{س \to ١^-} (س^٢ + ١) = ٢$

، $د(١^+) = \lim_{س \to ١^+} (٢ س) = ٢$

∵ $د(١) = د(١^-) = د(١^+)$

∴ د متصلة عند س = ١ ∴ د متصلة على ح

(٢) **أولاً :** ∵ د(س) = س² كثيرة الحدود

∴ د متصلة على]−∞ ، ٣[

، ∵ د(س) = ٥ س − ٤ كثيرة حدود

∴ د متصلة على]٣ ، ∞[

ثانيًا : ∵ د(٣) = ١١

، $د(٣^-) = \lim_{س \to ٣^-} س^٢ = ٩$

، $د(٣^+) = \lim_{س \to ٣^+} (٥ س - ٤) = ١١$

∵ $د(٣^-) \neq د(٣^+)$

∴ د غير متصلة عند س = ٣

∴ د متصلة على ح − {٣}

(٣) **أولاً :**

∵ د(س) = س² − ٣ س + ٢ كثيرة الحدود

∴ د متصلة على]−∞ ، ٣[

، د(س) = ٢ كثيرة حدود

∴ د متصلة على]٣ ، ٤[

∵ د(س) = ٦ − س² كثيرة حدود

∴ د متصلة على]٤ ، ∞[

ثانيًا : د(٣) = ٢

، $د(٣^-) = \lim_{س \to ٣^-} (س^٢ - ٣ س + ٢) = ٢$

، $د(٣^+) = ٢$

∵ $د(٣) = د(٣^-) = د(٣^+)$

∴ د متصلة عند س = ٣

ثالثًا : د(٤) = ٢ ، $د(٤^-) = ٢$

، $د(٤^+) = \lim_{س \to ٤^+} (٦ - س^٢) = -١٠$

∵ $د(٤^+) \neq د(٤^-)$

∴ د غير متصلة عند س = ٤

∴ د متصلة على ح − {٤}

(٤) **أولاً :** د(س) = ١ + ظا س

متصلة على]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

، د(س) = ١ − ظتا ٢ س

متصلة على]$\frac{\pi}{٢}$ ، ∞[

ثانيًا : د(٠) = ١

، $د(٠^+) = \lim_{س \to ٠^+} (١ + ظا س) = ١$

∴ $د(٠) = د(٠^+)$

∴ د متصلة من اليمين عند س = ٠

ثالثًا : $د(\frac{\pi}{٢}) = ٢$

، $د(\frac{\pi}{٢}^-) = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}^-} (١ + ظتا س) = ٢$

، $د(\frac{\pi}{٢}^+) = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}^+} (١ - ظتا ٢ س) = ٢$

∴ $د(\frac{\pi}{٢}^-) = د(\frac{\pi}{٢}^+) = د(\frac{\pi}{٢})$

∴ د متصلة عند س = $\frac{\pi}{٢}$

∴ د متصلة على]٠ ، ∞[

(٥) **أولاً :** د(س) = جا س

متصلة على]$-\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$[

، د(س) = جتا س

متصلة على]$\frac{٣\pi}{٤}$ ، ٢π[

ثانيًا : ∴ $د(-\frac{\pi}{٤}) = \frac{-\sqrt{٢}}{٢}$

، $د(-\frac{\pi}{٤}^+) = \lim_{س \to (-\frac{\pi}{٤})^+} جا س = -\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

∵ $د(-\frac{\pi}{٤}) = د(-\frac{\pi}{٤}^+)$

∴ د متصلة من اليمين عند س = $-\frac{\pi}{٤}$

ثالثًا : $د(\frac{٣\pi}{٤}) = \frac{-\sqrt{٢}}{٢}$

$د(\frac{٣\pi}{٤}^+) = \lim_{س \to \frac{٣\pi}{٤}^+} جتا س = \frac{-\sqrt{٢}}{٢}$

$د(\frac{٣\pi}{٤}^-) = \lim_{س \to \frac{٣\pi}{٤}^-} جا س = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

∵ $د(\frac{٣\pi}{٤}^-) \neq د(\frac{٣\pi}{٤}^+)$

∴ د غير متصلة عند س = $(\frac{٣\pi}{٤})$

رابعًا : د(٢π) = ١

$د(٢\pi^-) = \lim_{س \to ٢\pi^-} جتا س = ١$

∴ $د(٢\pi) = د(٢\pi^-)$

∴ د متصلة من اليسار عند س = ٢π

∴ د متصلة على الفترة [$-\frac{\pi}{٤}$ ، ٢π] − {$\frac{٣\pi}{٤}$}

(٦) **أولاً :** $د(س) = \frac{س طا س + جا^٢ ٣ س}{٥ س^٢}$

متصلة على]$-\frac{\pi}{٤}$ ، ٠[

، د(س) = ٢ جتا ٢ س متصلة على]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[

ثانيًا : د(٠) = ٢ ، $د(٠^-)$

$= \lim_{س \to ٠^-} \frac{س طا س + جا^٢ ٣ س}{٥ س^٢}$

$= \lim_{س \to ٠^-} \frac{\frac{طا س}{س} + (\frac{جا ٣ س}{س})^٢}{٥}$

$= ٢$

، $د(٠^+) = \lim_{س \to ٠^+} (٢ جتا ٢ س) = ٢$

∵ $د(٠^+) = د(٠^-) = د(٠)$

∴ د متصلة عند س = ٠

∴ د متصلة على]$-\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٤}$[

⑦ د(س) = $\frac{(س + ٣)^{٤} - ٨١}{س}$

متصلة على]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

، د(٠) = ١٠٨

، $\underset{س \to ٠}{نهـا}$ د(س) = $\underset{س \to ٠}{نهـا}$ $\frac{(س + ٣)^{٤} - ٣^{٤}}{س}$ = ٤(٣)^{٣} = ١٠٨

∵ د(٠) = $\underset{س \to ٠}{نهـا}$ د(س) ∴ د متصلة عند س = ٠ ∴ د متصلة على ع

⑧ ∵ د(س) = { ٥ + س^{٢} ، س ≤ ٠ ؛ ٥ ، س > ٠ }

د(س) = ٥ + س^{٢} كثيرة حدود متصلة على]−∞ ، ٠[

، د(س) = ٥ كثيرة حدود متصلة]٠ ، ∞[

، د(٠) = ٥   د(٠$^{+}$) = ٥   د(٠$^{-}$) = ٥

∵ د(٠) = د(٠$^{-}$) = د(٠$^{+}$)

∴ د متصلة عند س = ٠

∴ د متصلة على ع

٦

∵ د متصلة على [−π ، π]

∴ د متصلة عند س = ٠ ∴ د(٠$^{-}$) = د(٠$^{+}$)

∴ $\underset{س \to ٠^{-}}{نهـا}$ $\frac{س + ٢ جا س}{جا \frac{١}{٢} س}$ = $\underset{س \to ٠^{+}}{نهـا}$ (س + ك)

∴ $\underset{س \to ٠}{نهـا}$ $\frac{١ + \frac{٢ جا س}{س}}{\frac{جا \frac{١}{٢} س}{س}}$ = ك

∴ $\frac{١ + ٢}{\frac{١}{٢}}$ = ك   ∴ ك = ٦

٧

∵ د(س) متصلة على ع

∴ د متصلة عند س = −١

∴ د(−١$^{-}$) = د(−١$^{+}$)

∴ $\underset{س \to -١^{-}}{نهـا}$ (٤ س) = $\underset{س \to -١^{+}}{نهـا}$ (أ س + ب)

∴ −٤ = −أ + ب   (١)

، د متصلة عند س = ٣

∴ د(٣$^{-}$) = د(٣$^{+}$)

∴ $\underset{س \to ٣^{-}}{نهـا}$ (أ س + ب) = $\underset{س \to ٣^{+}}{نهـا}$ (−٢ س)

∴ ٣ أ + ب = −٦   (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ = −$\frac{١}{٢}$ ، ب = −$\frac{٩}{٢}$

٨

∵ د(س) متصلة على ع

∴ د(س) لها نهاية عند س = ٩

، ∵ المقام = صفر عندما س = ٩

∴ $\sqrt{٩ - أ}$ − ١ = ٠

∴ أ = ٨

، $\underset{س \to ٩}{نهـا}$ د(س) = د(٩)

∴ $\underset{س \to ٩}{نهـا}$ $\frac{\sqrt{س - ٨} - ١}{\sqrt{س} - ٣}$ = ٩ − ب

∴ $\underset{س \to ٩}{نهـا}$ $\frac{\sqrt{س - ٨} - ١}{\sqrt{س} - ٣} \times \frac{\sqrt{س - ٨} + ١}{\sqrt{س - ٨} + ١} \times \frac{\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س} + ٣}$ = ٩ − ب

∴ $\underset{س \to ٩}{نهـا}$ $\frac{(س - ٩)(\sqrt{س} + ٣)}{(س - ٩)(\sqrt{س - ٨} + ١)}$ = ٩ − ب

∴ $\frac{٦}{٢}$ = ٩ − ب   ∴ ب = ٦

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① أولًا: د(س) = { س + ١ ، س < ١ ؛ ٣ س − ١ ، ١ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٤ س − س^{٢} ، س > ٢ }

∵ د(س) = س + ١ كثيرة حدود متصلة]−∞ ، ١[

د(س) = ٣ س − ١ كثيرة حدود متصلة]١ ، ٢[

د(س) = ٤ س − س^{٢} كثيرة حدود متصلة]٢ ، ∞[

ثانيًا: د(١) = ٢

، د(١$^{-}$) = $\underset{س \to ١^{-}}{نهـا}$ (س + ١) = ٢

، د(١$^{+}$) = $\underset{س \to ١^{+}}{نهـا}$ (٣ س − ١) = ٢

∵ د(١$^{-}$) = د(١$^{+}$) = د(١)

∴ د متصلة عند س = ١

ثالثًا: د(٢) = ٥

د(٢$^{-}$) = $\underset{س \to ٢^{-}}{نهـا}$ (٣ س − ١) = ٥

د(٢$^{+}$) = $\underset{س \to ٢^{+}}{نهـا}$ (٤ س − س^{٢}) = ٤

∵ د(٢$^{-}$) ≠ د(٢$^{+}$) ∴ د غير متصلة عند س = ٢

∴ د متصلة على ع − {٢}

② د(س) = { س^{٢} + ٢ س ، س < −٢ ؛ $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ ، −٢ ≤ س ≤ ٢ ؛ س^{٢} + ٢ س ، س > ٢ }

أولًا:

د(س) = س^{٢} + ٢ س كثيرة حدود متصلة على]−∞ ، −٢[

، د(س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ متصلة على [−٢ ، ٢]

، د(س) = س^{٢} + ٢ س كثيرة حدود متصلة على]٢ ، ∞[

ثانيًا: د(−٢) = ٠

، د(−٢$^{+}$) = $\underset{س \to -٢^{+}}{نهـا}$ $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ = ٠

، د(−٢$^{-}$) = $\underset{س \to -٢^{-}}{نهـا}$ (س^{٢} + ٢ س) = ٠

∵ د(−٢) = د(−٢$^{+}$) = د(−٢$^{-}$)

∴ د متصلة عند س = −٢

ثالثًا: د(٢) = ٠

، د(٢$^{-}$) = $\underset{س \to ٢^{-}}{نهـا}$ $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ = ٠

، د(٢$^{+}$) = $\underset{س \to ٢^{+}}{نهـا}$ (س^{٢} + ٢ س) = ٨

∵ د(٢$^{-}$) ≠ د(٢$^{+}$) ∴ د غير متصلة عند س = ٢

∴ د متصلة على ع − {٢}

٢

∵ الدالة متصلة على ع

∴ المعادلة (س^{٢} + أ س + ٩ = ٠) ليس لها حل فى ع

∴ ب^{٢} − ٤ أ جـ < ٠   ∴ أ^{٢} − ٤ × ١ × ٩ < ٠

∴ أ^{٢} < ٣٦   ∴ |أ| < ٦

∴ −٦ < أ < ٦

∴ أ ∈]−٦ ، ٦[

٣

∵ الدالة متصلة على ع

∴ المعادلة (س^{٢} + ٦ س + أ = ٠) ليس لها حل فى ع

∴ ب^{٢} − ٤ أ جـ < ٠

∴ ٣٦ − ٤ × ١ × أ < ٠

∴ −٤ أ < −٣٦

∴ أ > ٩   ∴ أ ∈]٩ ، ∞[

٤

∵ $د(س) = \begin{cases} -س & ،\ س < ٠ \\ ١ & ،\ س \geq ٠ \end{cases}$

∴ د (٠) = ١ ، د (٠^+) = $\lim\limits_{س \to ٠^+}$ (١) = ١

، د (٠^-) = $\lim\limits_{س \to ٠^-}$ (−س) = صفر

، ∵ د (٠^+) ≠ د (٠^-)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٠

، ∵ $ر(س) = \begin{cases} ١ & ،\ س < ٠ \\ س & ،\ س \geq ٠ \end{cases}$

∴ د (٠) = صفر

، د (٠^+) = $\lim\limits_{س \to ٠^+}$ (س) = صفر

، د (٠^-) = $\lim\limits_{س \to ٠^-}$ (١) = ١ ∴ د (٠^+) ≠ د (٠^-)

∴ الدالة ر غير متصلة عند س = ٠

، ∵ $(د \circ ر)(س) = \begin{cases} -س & ،\ س < ٠ \\ س & ،\ س \geq ٠ \end{cases}$

∴ (د ∘ ر) (٠) = صفر

، (د ∘ ر) (٠^+) = $\lim\limits_{س \to ٠^+}$ (س) = صفر

(د ∘ ر) (٠^-) = $\lim\limits_{س \to ٠^-}$ (−س) = صفر

∴ (د ∘ ر) (٠^+) = (د ∘ ر) (٠^-) = (د ∘ ر) (٠)

∴ الدالة (د ∘ ر) متصلة عند س = ٠

٥

① د (٤) = ١ ، $\lim\limits_{س \to ٤}$ د (س) = −١

، ∵ د (٤) ≠ $\lim\limits_{س \to ٤}$ د (س)

∴ د غير متصلة عند س = ٤

② ر (٤) = −٦ ، $\lim\limits_{س \to ٤}$ ر (س)

= $\lim\limits_{س \to ٤}$ (٤ س − ١٠) = ٦

، ∵ ر (٤) ≠ $\lim\limits_{س \to ٤}$ ر (س)

∴ ر غير متصلة عند س = ٤

③ بوضع ع (س) = د (س) · ر (س)

$= \begin{cases} -٤س + ١٠ & ،\ س \neq ٤ \\ -٦ & ،\ س = ٤ \end{cases}$

، ∵ ع (٤) = −٦

، $\lim\limits_{س \to ٤}$ ع (س) = $\lim\limits_{س \to ٤}$ (−٤ س + ١٠)

= −٦

، ∵ ع (٤) = $\lim\limits_{س \to ٤}$ ع (س)

∴ ع متصلة عند س = ٤

④ بوضع ل (س) = | د (س) | = $\begin{cases} ١ & ،\ س \neq ٤ \\ ١ & ،\ س = ٤ \end{cases}$

، ∵ ل (٤) = $\lim\limits_{س \to ٤}$ ل (س) = ١

∴ ل متصلة عند س = ٤

⑤ بوضع هـ (س) = ر (س) − ٦ د (س)

$= \begin{cases} ٤س - ٤ & ،\ س \neq ٤ \\ -١٢ & ،\ س = ٤ \end{cases}$

، ∵ هـ (٤) = −١٢ ، $\lim\limits_{س \to ٤}$ هـ (س) = ١٢

، ∵ هـ (٤) ≠ $\lim\limits_{س \to ٤}$ هـ (س)

∴ هـ غير متصلة عند س = ٤

⑥ بوضع ك (س) = ر (د (س))

$= \begin{cases} -١٤ & ،\ س \neq ٤ \\ -٦ & ،\ س = ٤ \end{cases}$

، ∵ ك (٤) = −٦ ، $\lim\limits_{س \to ٤}$ ك (س) = −١٤

∴ ك (٤) ≠ $\lim\limits_{س \to ٤}$ ك (س)

∴ ك غير متصلة عند س = ٤

إجابات تمارين الوحدة الرابعة

حساب المثلثات



إجابات الوحدة الرابعة

إجابات تمارين 19

أولاً: أسئلة الاختيار من متعدد

١ (جـ)	٢ (جـ)	٣ (أ)	٤ (أ)
٥ (د)	٦ (أ)	٧ (جـ)	٨ (أ)
٩ (ب)	١٠ (أ)	١١ (ب)	١٢ (جـ)
١٣ (أ)	١٤ (ب)	١٥ (ب)	١٦ (ب)
١٧ (جـ)	١٨ (أ)	١٩ (أ)	٢٠ (ب)
٢١ (جـ)	٢٢ (جـ)	٢٣ (ب)	٢٤ (جـ)
٢٥ (د)	٢٦ (أ)	٢٧ (ب)	٢٨ (د)
٢٩ (د)	٣٠ (جـ)	٣١ (ب)	٣٢ (ب)
٣٣ (د)	٣٤ (ب)	٣٥ (د)	٣٦ (أ)
٣٧ (د)	٣٨ (أ)	٣٩ (جـ)	٤٠ (ب)
٤١ (جـ)	٤٢ (د)	٤٣ (ب)	٤٤ (ب)
٤٥ (د)	٤٦ (ب)	٤٧ (د)	

ثانياً: الأسئلة المقالية

١

∵ ق(∠ع) = ١٨٠° − (٨٠° + ٦٠°) = ٤٠°

∴ $\frac{\text{س}}{\text{جا } ٨٠°} = \frac{\text{ص}}{\text{جا } ٦٠°} = \frac{١٠}{\text{جا } ٤٠°}$

∴ س = $\frac{\text{١٠ جا ٨٠°}}{\text{جا ٤٠°}}$ ≃ ١٥ سم

، ص = $\frac{\text{١٠ جا ٦٠°}}{\text{جا ٤٠°}}$ ≃ ١٣ سم

٢

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١١٢° + ٣٣°) = ٣٥°

∴ $\frac{\text{ب}}{\text{جا } ٣٣°} = \frac{١٩}{\text{جا } ٣٥°}$

∴ ب = $\frac{\text{١٩ جا ٣٣°}}{\text{جا ٣٥°}}$ ≃ ١٨,٠٤ سم ، ٢ نق = $\frac{١٩}{\text{جا } ٣٥°}$

∴ نق = $\frac{١٩}{\text{٢ جا ٣٥°}}$ ≃ ١٦,٥٦ سم

٣

① ∵ ق(∠ل) = ١٨٠° − (١٠٠° + ٤٠°) = ٤٠°

∴ $\frac{\text{ل}}{\text{جا } ٤٠°} = \frac{٦٨,٤}{\text{جا } ١٠٠°}$

∴ ل = $\frac{\text{٦٨,٤ جا ٤٠°}}{\text{جا ١٠٠°}}$ ≃ ٤٤,٦٤ سم

② ٢ نق = $\frac{٦٨,٤}{\text{جا } ١٠٠°}$ ∴ نق ≃ ٣٤,٧٣ سم

③ مساحة △ ل م ن = $\frac{١}{٢}$ لَ مَ جا ن

= $\frac{١}{٢}$ × ٤٤,٦٤ × ٦٨,٤ جا ٤٠°

≃ ٩٨١ سم²

٤

∵ ق(∠م) = ١٨٠° − (٥٢° ١٨َ + ٤٤° ١٧َ) = ٥١َ ١١٦°

∴ $\frac{\text{م ن}}{\text{جا } ١٨َ ٥٢°} = \frac{\text{ل م}}{\text{جا } ١٧َ ٤٤°} = \frac{٢٥}{\text{جا } ٥١َ ١١٦°}$

∴ م ن = $\frac{\text{٢٥ جا ١٨َ ٥٢°}}{\text{جا ٥١َ ١١٦°}}$ ≃ ١٢,٧ سم

، ل م = $\frac{\text{٢٥ جا ١٧َ ٤٤°}}{\text{جا ٥١َ ١١٦°}}$ ≃ ٢٧,٤ سم

، نق = $\frac{٢٥}{\text{٢ جا ٥١َ ١١٦°}}$

∴ مساحة الدائرة = π $\left(\frac{٢٥}{\text{٢ جا ٥١َ ١١٦°}}\right)^{٢}$

≃ ١٢٠٨,٧ سم²

٥

∵ ق(∠ب) = ١٨٠° − (٤٠° + ٨٠°) = ٦٠°

∴ ∠حـ أكبر الزوايا قياساً.

∴ حـ طول أكبر الأضلاع. ∴ $\frac{\text{حـ}}{\text{جا } ٨٠°} = \frac{١٠}{\text{جا } ٦٠°}$

∴ حـ = $\frac{\text{١٠ جا ٨٠°}}{\text{جا ٦٠°}}$ ≃ ١١ سم

٦

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١٠٠° + ١٥°) = ٦٥°

∴ ∠ب أصغر الزوايا قياساً.

∴ ب طول أصغر الأضلاع.

∴ $\frac{\text{ب}}{\text{جا } ١٥°} = \frac{٤٠٥}{\text{جا } ٦٥°}$

∴ ب = $\frac{\text{٤٠٥ جا ١٥°}}{\text{جا ٦٥°}}$ ≃ ١,٢ سم

٧

∵ نق = $\frac{٧\sqrt{٣}}{\text{٢ جا ٦٠°}}$ = ٧ سم

∴ مساحة الدائرة = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧² = ١٥٤ سم²

، محيط الدائرة = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٤٤ سم

٨

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٤٥°) = ٧٥°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا } ٦٠°} = \frac{\text{ب}}{\text{جا } ٤٥°} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا } ٧٥°}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{\text{ب}}{\frac{\sqrt{٢}}{٢}} = \frac{\text{حـ}}{\frac{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}}{٤}}$

∴ أ : ب : حـ

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$: $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$: $\frac{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}}{٤}$ (بالضرب × ٢$\sqrt{٢}$)

= $\sqrt{٦}$: ٢ : $\sqrt{٣}$ + ١

٩

∵ نق = $\frac{١٣}{\text{٢ جا ٢٨َ ٥٣°}}$ ≃ ٨,١ سم ، $\frac{١٣}{\text{جا ٢٨َ ٥٣°}} = \frac{١٥}{\text{جا حـ}}$

∴ جا حـ = $\frac{\text{١٥ جا ٢٨َ ٥٣°}}{١٣}$ (موجبة)

∴ ∠حـ حادة أو منفرجة

∴ ق(∠حـ) ≃ ٩ً ٢٣َ ٦٧° أ، ٥١ً ٣٦َ ١١٢°

١٠

∵ $\frac{٨}{\text{جا } ٢٥°} = \frac{٦}{\text{جا ب}}$ ∴ جا ب = $\frac{\text{٦ جا ٢٥°}}{٨}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٤٥ً ٢٨َ ١٨° والحل الآخر مرفوض.

١١

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١٣َ ٥٧° + ١٨َ ٦٤°) = ٢٩َ ٥٨°

، ∵ $\frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}} = \frac{\text{أ + ب + حـ}}{\text{جا أ + جا ب + جا حـ}}$

∴ $\frac{٨,٧}{\text{جا ٢٩َ ٥٨°}} = \frac{\text{محيط △ أ ب حـ}}{\text{جا ١٣َ ٥٧° + جا ٢٩َ ٥٨° + جا ١٨َ ٦٤°}}$

∴ محيط △ أ ب حـ ≃ ٢٦,٥ سم

١٢

∵ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٤٥° + ٦٠°) = ٧٥°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا } ٧٥°} = \frac{\text{ب}}{\text{جا } ٤٥°} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا } ٦٠°}$ = ٤٠

∴ أ = ٤٠ جا ٧٥° ≃ ٣٨,٦ سم

، ب = ٤٠ جا ٤٥° ≃ ٢٨,٣ سم

، حـ = ٤٠ جا ٦٠° ≃ ٣٤,٦ سم

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٣٨,٦ × ٢٨,٣ × جا ٦٠°

≃ ٤٧٣ سم²

، محيط المثلث = ٣٨,٦ + ٢٨,٣ + ٣٤,٦ ≃ ١٠٢ سم

١٣

∵ △ أ ب حـ متساوي الساقين.

∴ ق(∠ب) = ق(∠حـ) = ٣٠°

، ∵ $\frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{\text{حـ}}{\text{جا } ٣٠°}$ = ٢٤

∴ حـ = ٢٤ جا ٣٠° = ١٢ سم

∴ ب = حـ = ١٢ سم

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٢ جا ١٢٠° = ٦٢,٤ سم²

١٤

∵ ق(∠ح) = ١٨٠° − (١٥° + ١٥°) = ١٥٠°

∴ $\frac{أ}{جا ١٥°} = \frac{ب}{جا ١٥°} = \frac{ح}{جا ١٥٠°}$

∴ إحدى النسب = $\frac{أ + ب + ح}{جا ١٥° + جا ١٥° + جا ١٥٠°}$

= $\frac{٢٥}{جا ١٥° + جا ١٥° + جا ١٥٠°}$ ≃ ٢٤,٥٧

∴ ٢ نق ≃ ٢٤,٥٧ ∴ نق = ١٢,٢٨٥ سم

∴ مساحة الدائرة = π × (١٢,٢٨٥)² ≃ ٤٧٤ سم²

١٥

∵ ق(∠ح) = ١٨٠° − (٤٤° + ٦٦°) = ٧٠°

∴ $\frac{أ}{جا ٤٤°} = \frac{ب}{جا ٦٦°} = \frac{ح}{جا ٧٠°}$

= $\frac{٤٠}{جا ٤٤° + جا ٦٦° + جا ٧٠°}$

∴ أ ≃ ١٠,٩ سم ، ب ≃ ١٤,٣ سم ، ح ≃ ١٤,٨ سم

١٦

∵ ق(∠ح) = ١٨٠° − (٢٠° + ٦٠°) = ١٠٠°

∴ $\frac{أ}{جا ٢٠°} = \frac{١٢}{جا ١٠٠°}$ ∴ أ = $\frac{١٢ جا ٢٠°}{جا ١٠٠°}$ ≃ ٤,٢ سم

، مساحة المثلث = ½ × ٤,٢ × ١٢ × جا ٦٠° ≃ ٢٢ سم²

١٧

∵ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٨٢° + ٥٦°) = ٤٢°

، ∵ مساحة Δ أ ب ح = ½ أ ب جا ح

∴ ٤٥٠ = ½ أ ب جا ٥٦° ∴ ب = $\frac{٩٠٠}{أ جا ٥٦°}$

، ∵ $\frac{أ}{جا ٤٢°} = \frac{ب}{جا ٨٢°}$ ∴ $\frac{أ}{جا ٤٢°} = \frac{٩٠٠}{أ جا ٥٦° جا ٨٢°}$

∴ أ² = $\frac{٩٠٠ جا ٤٢°}{جا ٥٦° جا ٨٢°}$ ∴ أ ≃ ٢٧ سم

١٨

∵ ٤٣,٢ = ½ × أ ب × ١٢ × ٠,٦

∴ أ ب = ١٢ سم

، ∵ ق(∠أ) = ٣٦° ٥٢َ

∴ ق(∠ب) = ق(∠ح) = $\frac{١٨٠° − ٣٦° ٥٢َ}{٢}$ = ٧١° ٣٤َ

∴ $\frac{ب ح}{٠,٦} = \frac{١٢}{جا ٧١° ٣٤َ}$

∴ ب ح = $\frac{١٢ جا ٣٦° ٥٢َ}{جا ٧١° ٣٤َ}$ ≃ ٧,٦ سم

١٩

∵ $\frac{٧}{جا ٦٠°} = \frac{٨}{جا ب}$ ∴ ق(∠ب) ≃ ٨١° ٤٧َ ١٢ً

(ويرفض الحل الآخر لأن المثلث حاد الزوايا)

∴ ق(∠ح) = ١٨٠° − (٦٠° + ٨١° ٤٧َ ١٢ً) = ٣٨° ١٢َ ٤٨ً

∴ $\frac{٧}{جا ٦٠°} = \frac{محيط Δ أ ب ح}{جا ٦٠° + جا ٨١° ٤٧َ ١٢ً + جا ٣٨° ١٢َ ٤٨ً}$

∴ محيط Δ أ ب ح ≃ ٢٠ سم

٢٠



في المثلث أ ح ء :

∵ ق(∠أ ح ء)

= ١٨٠° − (١٨° + ٤٥° ١٥َ)

= ١١٦° ٤٥َ

∴ $\frac{أ ء}{جا ١١٦° ٤٥َ} = \frac{٤}{جا ١٨°}$

∴ أ ء = $\frac{٤ جا ١١٦° ٤٥َ}{جا ١٨°}$ ≃ ١١,٦ سم

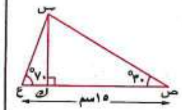
∴ في المثلث أ ب ء : $\frac{أ ب}{جا ٤٥° ١٥َ} = \frac{١١,٦}{جا ٩٠°}$

∴ أ ب = $\frac{١١,٦ جا ٤٥° ١٥َ}{جا ٩٠°}$ ≃ ٨ سم

٢١

في المثلث س ص ع : نرسم $\overline{س ل} \perp \overline{ص ع}$

∵ ق(∠س) = ١٨٠° − (٣٠° + ٧٠°) = ٨٠°



∴ $\frac{س ص}{جا ٧٠°} = \frac{١٥}{جا ٨٠°}$

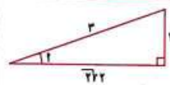
∴ س ص = $\frac{١٥ جا ٧٠°}{جا ٨٠°}$

≃ ١٤,٣١ سم

∴ في المثلث س ص ل : $\frac{س ل}{جا ٣٠°} = \frac{١٤,٣}{جا ٩٠°}$

∴ س ل = $\frac{١٤,٣١ جا ٣٠°}{جا ٩٠°}$ = ٧,١٦ سم

٢٢



∵ ظا أ = $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

∴ جا أ = ⅓

∴ $\frac{٨}{\frac{١}{٣}} = \frac{٢٠}{جا ح}$

∴ جا ح ≃ ٠,٨٣

∴ ق(∠ح) ≃ ٥٦° ٢٧َ ، أو ١٢٣° ٣٣َ

، ∵ ∠ح منفرجة. ∴ ق(∠ح) ≃ ١٢٣° ٣٣َ

٢٣

∵ ظا ح = $\frac{٤}{٣}$ ∴ ق(∠ح) ≃ ٥٣° ٧َ ٤٨ً

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٥٣° ٧َ ٤٨ً) = ٩٦° ٥٢َ ١٢ً

∴ $\frac{أ}{جا ٩٦° ٥٢َ ١٢ً} = \frac{٥}{جا ٣٠°} = \frac{ح}{جا ٥٣° ٧َ ٤٨ً}$

∴ أ = $\frac{٥ جا ٩٦° ٥٢َ ١٢ً}{جا ٣٠°}$ ≃ ١٠ سم

، ح = $\frac{٥ جا ٥٣° ٧َ ٤٨ً}{جا ٣٠°}$ ≃ ٨ سم

، مساحة Δ أ ب ح = ½ أ ح جا ب

= ½ × ١٠ × ٨ × جا ٣٠°

= ٢٠ سم²

٢٤

∵ $\frac{س + ص + ع}{جا س + جا ص + جا ع}$ = ٢ نق

∴ نق = $\frac{٥٦,٨٨}{٢,٣٧ × ٢}$ = ١٢ سم

٢٥

∵ $\frac{أ}{جا ٦٠°} = \frac{ب}{جا ٤٥°} = \frac{أ + ب}{جا ٦٠° + جا ٤٥°}$

∴ $\frac{أ}{جا ٦٠°} = \frac{ب}{جا ٤٥°} = \frac{\sqrt{٦} + ٢}{جا ٦٠° + جا ٤٥°}$

∴ أ = $\sqrt{٦}$ سم ، ب = ٢ سم

٢٦

∵ جا أ : جا ب : جا ح = ٢ : ٤ : ٥

∴ أ : ب : ح = ٢ : ٤ : ٥

∴ أ = ٢ ل ، ب = ٤ ل ، ح = ٥ ل

، ∵ ح − ب = ٥ ل − ٤ ل = ل = ٣

∴ أ = ٦ سم ، ب = ١٢ سم

٢٧

∵ ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠ح) = ٣ : ٤ : ٣

∴ ق(∠أ) = ٣ ل ، ق(∠ب) = ٤ ل ، ق(∠ح) = ٣ ل

∵ ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠ح) = ١٨٠°

∴ ٣ ل + ٤ ل + ٣ ل = ١٨٠° ∴ ل = ١٨°

∴ $\frac{٥}{جا ٥٤°} = \frac{ب}{جا ٧٢°} = \frac{ح}{جا ٥٤°}$

= $\frac{محيط Δ أ ب ح}{جا ٥٤° + جا ٧٢° + جا ٥٤°}$

∴ محيط Δ أ ب ح ≃ ١٥,٩ سم

٢٨

∵ ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠حـ) = ١٨٠°

∴ ك + ٣ ك + ٥ ك = ١٨٠°   ∴ ك = ٢٠°

∴ أ / جا ٢٠° = ب / جا ٦٠° = حـ / جا ١٠٠°

= ١٦ / (جا ٢٠° + جا ٦٠° + جا ١٠٠°)

∵ ∠أ أصغر الزوايا قياسًا.

∴ أ أصغر الأضلاع طولاً.   ∴ أ = ٢,٥ سم

٢٩

∵ ق(∠أ) + ٣/٢ ق(∠أ) + ٢ ق(∠أ) = ١٨٠°

∴ ق(∠أ) = ٤٠°، ق(∠ب) = ٦٠°، ق(∠حـ) = ٨٠°

، ∵ أ / جا ٤٠° = ب / جا ٦٠° = حـ / جا ٨٠° = ٢٠

∴ أ = ٢٠ جا ٤٠°، ب = ٢٠ جا ٦٠°

∴ مساحة △ أ ب حـ

= ١/٢ × ٢٠ جا ٤٠° × ٢٠ جا ٦٠° × جا ٨٠° ≃ ١١٠ سم²

٣٠

بالقسمة على ١٢   ∴ جا أ / ٢ = جا ب / ٣ = جا حـ / ٤

وبوضع أ = ٢ ك، ب = ٣ ك، حـ = ٤ ك

∴ ٢ ك + ٣ ك + ٤ ك = ٤٥   ∴ ك = ٥

∴ أ = ١٠ سم، حـ = ٢٠ سم

٣١

من خواص التناسب نجد أن :

(أ + ب − حـ + أ + حـ − ب) / (٣ + ٥) = (أ + حـ − ب + ب + حـ − أ) / (٥ + ٧)

= (أ + ب − حـ + ب + حـ − أ) / (٣ + ٧)

∴ ٢ أ / ٨ = ٢ حـ / ١٢ = ٢ ب / ١٠   ∴ أ / ٤ = حـ / ٦ = ب / ٥

∴ أ : ب : حـ = ٤ : ٥ : ٦

∴ جا أ : جا ب : جا حـ = ٤ : ٥ : ٦

٣٢



∵ أب ، أحـ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، حـ

∴ أب = أحـ

، ∵ ق(∠أ) = ٦٠°

∴ △ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع.

، ∵ مساحة المثلث = ١/٢ أب × أحـ × جا (∠أ)

∴ ٩ √٣ = ١/٢ × (أب)² × جا ٦٠°

∴ ٩ √٣ = √٣/٤ × (أب)²

∴ أب = ٦ سم   ∴ ب حـ = ٦ سم

، ∵ ق(∠ى) = ق(∠ب حـ أ) = ٦٠°

(محيطية ومماسية مشتركتان فى ب⌒حـ)

∴ ق(∠ى ب حـ) = ١٨٠° − (٨٥° + ٦٠°) = ٣٥°

∴ فى △ ب حـ ى : ب ى / جا ٣٥° = ى حـ / جا ٨٥° = ٦ / جا ٦٠°

∴ ب ى = ٦ جا ٣٥° / جا ٦٠° ≃ ٤ سم

، ى حـ = ٦ جا ٨٥° / جا ٦٠° ≃ ٧ سم

∴ محيط المثلث ى ب حـ = ٦ + ٤ + ٧ = ١٧ سم

٣٣

فى △ أ ب حـ :

ق(∠حـ) = ١/٢ ق(∠أ م ب) = ٤٠°

، ق(∠أ ب حـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٨٥°) = ٥٥°

∴ ٥ / جا ٤٠° = ب / جا ٥٥° = أ / جا ٨٥° = ٢ نق

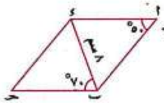
= محيط △ أ ب حـ / (جا ٤٠° + جا ٥٥° + جا ٨٥°)

∴ محيط △ أ ب حـ ≃ ١٩,١٢ سم ، نق ≃ ٣,٨٩ سم

∴ مساحة الدائرة = π نق² = π (٣,٨٩)²

≃ ٤٧,٥ سم²

٣٤



∵ أ ب حـ ى متوازى أضلاع.

∴ ق(∠حـ) = ٥٠°

فى △ ب ى حـ :

ق(∠ب ى حـ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٧٠°) = ٦٠°

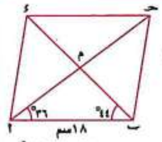
∴ ٨ / جا ٥٠° = ب حـ / جا ٦٠° = ى حـ / جا ٧٠°

∴ ب حـ ≃ ٩ سم ، ى حـ ≃ ٩,٨ سم

∴ محيط متوازى الأضلاع = ٢ (ب حـ + حـ ى)

≃ ٣٨ سم

٣٥



فى △ أ ب م : ق(∠أ م ب)

= ١٨٠° − (٤٤° + ٣٦°)

= ١٠٠°

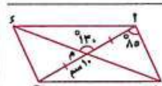
∴ ١٨ / جا ١٠٠° = أ م / جا ٤٤°   ∴ أ م = ١٨ × جا ٤٤° / جا ١٠٠°

∴ أحـ = ٢ (أ م) ≃ ٢٥,٣٩ سم

، مساحة ▱ أ ب حـ ى = ٢ × ١/٢ × ١٨ × ٢٥,٣٩ جا ٣٦°

≃ ٢٦٩ سم²

٣٦



فى △ أ ب م :

ق(∠م) = ٥٠°

، ق(∠ب) = ١٨٠° − (٨٥° + ٥٠°) = ٤٥°

∴ ١٠ / جا ٤٥° = ب م / جا ٨٥°

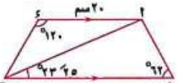
∴ ب م = ١٠ جا ٨٥° / جا ٤٥° ≃ ١٤,١ سم

∴ ب ى = ٢ ب م = ٢٨,٢ سم

، مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ى

= ٤ × ١/٢ × ١٠ × ١٤,١ جا ٥٠° ≃ ٢١٦ سم²

٣٧



∵ أى // ب حـ

∴ ق(∠أ ى حـ)

+ ق(∠ى حـ ب) = ١٨٠°

∴ ق(∠ى حـ ب) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

∴ ق(∠ى حـ أ) = ٦٠° − ٢٥ ٢٣° = ٣٥ ٣٦°

∴ فى المثلث أ ى حـ : ٢٠ / جا ٣٥ ٣٦° = أحـ / جا ١٢٠°

∴ أحـ = ٢٠ جا ١٢٠° / جا ٣٥ ٣٦° ≃ ٢٩ سم

، فى المثلث أ ب حـ :

∵ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٦٢° + ٢٥ ٢٣°) = ٣٥ ٩٤°

∴ ٢٩ / جا ٦٢° = ب حـ / جا ٣٥ ٩٤°

∴ ب حـ = ٢٩ جا ٣٥ ٩٤° / جا ٦٢° ≃ ٣٣ سم

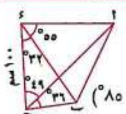
∴ مساحة شبه المنحرف = ١/٢ أحـ × ب حـ × جا ٢٥ ٢٣°

+ ١/٢ أحـ × أى × جا ٢٥ ٢٣°

= ١/٢ × ٢٩ (٣٣ + ٢٠) جا ٢٥ ٢٣°

≃ ٣٠٥ سم²

٣٨



فى △ ب ى حـ

ق(∠ى ب حـ) = ١٨٠° − (٣٢° + ٨٥°)

= ٦٣°

∴ ب ى / جا ٨٥° = ١٠٠ / جا ٦٣°

∴ ب ى = ١٠٠ جا ٨٥° / جا ٦٣° ≃ ١١٢ سم

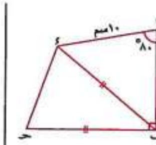
، فى △ أ ى حـ :

ق(∠ى أ حـ) = ١٨٠° − (٤٩° + ٨٧°) = ٤٤°

∴ أحـ / جا ٨٧° = ١٠٠ / جا ٤٤°

∴ أحـ = ١٠٠ جا ٨٧° / جا ٤٤° ≃ ١٤٤ سم

٣٩



في المثلث أ ب ء :

∵ أ ب = أ ء

∴ ق(∠أ ب ء)

= ق(∠أ ء ب) = (١٨٠° − ٨٠°) / ٢ = ٥٠°

∴ ب ء / جا ٨٠° = ١٠ / جا ٥٠°

∴ ب ء = ١٠ جا ٨٠° / جا ٥٠° ≃ ١٢,٨٦ سم

، ∵ ق(∠أ ب جـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ء ب جـ) = ٩٠° − ٥٠° = ٤٠°

∴ مساحة △أ ب ء = ½ × ١٠ × ١٠ × جا ٨٠° ≃ ٤٩ سم^2

، مساحة △ء ب جـ = ½ × ١٢,٨٦ × ١٢,٨٦ × جا ٤٠°

≃ ٥٣ سم^2

∴ مساحة الشكل أ ب جـ ء = ٤٩ + ٥٣ = ١٠٢ سم^2

٤٠

(١) ∵ أ / جا أ = ب / جا ب = جـ / جا جـ

بضرب النسبة الأولى × ٣ والثانية × ٤ وبالطرح :

∴ (٣ أ − ٤ ب) / (٣ جا أ − ٤ جا ب) = جـ / جا جـ

(٢) ∵ أ / جا أ = ب / جا ب   ∴ ب = أ جا ب / جا أ

∴ مساحة المثلث = ½ أ ب جا جـ = أ^2 جا ب جا جـ / (٢ جا أ)

(٣) ∵ أ / جا أ = ب / جا ب = جـ / جا جـ = ٢ نق

∴ جا جـ = جـ / (٢ نق)

∴ مساحة المثلث = ½ أ ب × جـ / (٢ نق) = أ ب جـ / (٤ نق)

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (د) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (ب)

(٥) (د) (٦) (جـ) (٧) (د) (٨) (ب)

(٩) (جـ) (١٠) (ب) (١١) (جـ)

إرشادات لحل رقم ١

(١) ∵ أ / جا أ = ب / جا ب = جـ / جا جـ = ٢ نق = ٦

∴ أ / جا أ × ب / جا ب × جـ / جا جـ = ٦ × ٦ × ٦

∴ أ ب جـ / (جا أ جا ب جا جـ) = ٢١٦

(٢) ∵ أ / جا أ = ب / جا ب = جـ / جا جـ = ٢ نق

∴ أ قتا أ = ب قتا ب = جـ قتا جـ = ٢ نق

∴ أ قتا أ + ب قتا ب + جـ قتا جـ = ٦ نق

(٣) ∵ (أ + ب + جـ) / (جا أ + جا ب + جا جـ) = ٢ نق

∴ (جا ب + جا جـ + جا أ) / (جا أ + جا ب + جا جـ) = ٢ نق

∴ ٢ نق = ١   ∴ نق = ½

∴ محيط الدائرة المارة برؤوس △أ ب جـ

= ٢ π نق = ٢ π × ½ = π

(٤) ∵ أ / جا أ = ب / جا ب = جـ / جا جـ = ٢ نق

∴ جا أ / أ = جا ب / ب = جا جـ / جـ = ١ / (٢ نق)

وبضرب مقدمات وتوالي النسبة الأولى × أ

، النسبة الثانية × ب ، النسبة الثالثة × جـ

وجمع المقدمات والتوالي

∴ (أ جا أ + ب جا ب + جـ جا جـ) / (أ^2 + ب^2 + جـ^2) = ١ / (٢ نق)

(٥) ∵ أ / جا أ = ب / جا ب = جـ / جا جـ = ١٠

∴ أ = ١٠ جا أ ، ب = ١٠ جا ب

، ∵ مساحة △أ ب جـ = ٢٤

∴ ½ أ ب جا جـ = ٢٤

∴ ½ × ١٠ جا أ × ١٠ جا ب × جا جـ = ٢٤

∴ جا أ جا ب جا جـ = ٢٤ / ٥٠ = ١٢ / ٢٥

∴ جا أ جا ب جا (١٨٠ − (أ + ب)) = ١٢ / ٢٥

∴ جا أ جا ب جا (أ + ب) = ١٢ / ٢٥

(٦) ∵ ب جـ = $\sqrt{(٦)^2 + (٨)^2}$ = ١٠ سم

∴ ب ء = ٤ سم

في △أ ب ء : ب ء / جا θ = أ ء / جا ب

∴ ٤ / جا θ = أ ء / ٠,٦   ∴ أ ء جا θ = ٢,٤   (١)

في △أ جـ ء : ء جـ / جا (٩٠ − θ) = أ ء / جا جـ

∴ ٦ / جتا θ = أ ء / ٠,٨   ∴ أ ء جتا θ = ٤,٨   (٢)

بقسمة (٢) على (١) : ∴ جتا θ / جا θ = ٤,٨ / ٢,٤

∴ ظتا θ = ٢

(٧) ∵ جـ ء = ٢ ب ء

∴ مساحة △أ جـ ء = ٢ مساحة △أ ب ء

½ × أ ء × أ جـ × جا ٦٠°

= ٢ × ½ × أ ب × أ ء × جا ٤٥°

∴ أ ب / أ جـ = (√٣ / ٢) / (٢ × ١/√٢) = √٦ / ٤

، ∵ أ ب / أ جـ = جا جـ / جا ب   ∴ جا ب / جا جـ = ٤ / √٦ = ٢√٦ / ٣

(٨) في △أ ب ء : ∵ ب ء / جا أ = أ ء / جا ٤٥°

∴ ب ء / جا أ = ٤√٢ / (١/√٢) = ٨

في △ب ء جـ : ∵ ب ء / جا جـ = ب جـ / جا ٣٠°

∴ ب ء / جا جـ = ٢ ب جـ ، ∵ جا أ = جا جـ

∴ ٢ ب جـ = ٨   ∴ ب جـ = ٤ سم

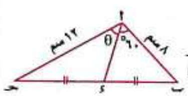
(٩) في △جـ ء هـ : ∵ ظا (∠ء هـ جـ) = ٣/٤

∴ جا جـ = ٤/٥

، في △أ ب جـ : ∵ أ ب / جا جـ = ٢ نق

∴ ٢ نق = ٦ / (٤/٥)   ∴ نق = ٣,٧٥ سم

(١٠) في △أ ب ء :



ب ء / جا ٦٠° = ٨ / جا (∠أ ء ب)

∴ ب ء × جا (∠أ ء ب)

= ٨ جا ٦٠° = ٤√٣   (١)

في △أ ء جـ : جـ ء / جا θ = ١٢ / جا (∠أ ء جـ)

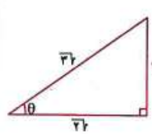
∴ جـ ء × جا (∠أ ء جـ) = ١٢ جا θ   (٢)

من (١) ، (٢) :

، ∵ ب ء = جـ ء

، جا (∠أ ء ب)

= جا (∠أ ء جـ)



∴ ١٢ جا θ = ٤√٣   ∴ جا θ = ١ / √٣

∴ ظا θ = ١ / √٢   ∴ ظا (∠ء أ جـ) = ١ / √٢

(١١) في Δ أ ب حـ :

∵ $\frac{\text{أب}}{\text{حا } ٧٠^\circ} = \frac{٦}{\text{حا } ٤٠^\circ} = ٢$ نق

∴ أ ب ≃ ٨,٧٧ سم ، نق ≃ ٤,٦٦٧ سم

∴ مساحة الجزء المظلل

= مساحة الدائرة − مساحة المثلث أ ب حـ

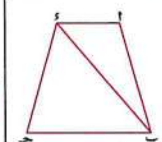
= π نق^٢ − $\frac{١}{٢}$ أ حـ حا ب

= π × $(٤,٦٧)^٢$ − $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨,٧٧ × حا ٧٠°

≃ ٤٣,٧ سم^٢

٢

في المثلث أ ب ء :



$\frac{\text{أء}}{\text{حا (د أ ب ء)}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{حا أ}}$

، من Δ ء ب حـ :

$\frac{\text{ب حـ}}{\text{حا (د ب ء حـ)}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{حا حـ}}$

، ∵ د أ ، د حـ متكاملتان «لأن أ ب حـ ء رباعي دائري»

∴ حا أ = حا حـ ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{حا (د أ ب ء)}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{حا (د ب ء حـ)}}$

∴ أ ء × حا (د ب ء حـ) = ب حـ × حا (د أ ب ء)

٣

(١) ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{حا حـ}}$

∴ $\frac{\text{أ + ب + حـ}}{\text{حا أ + حا ب + حا حـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{حا أ}}$

∴ حا أ + حا ب + حا حـ = $\frac{\text{٢ ع حا أ}}{\text{أ}}$

= $\frac{\text{٢ ع حا أ × ب حـ}}{\text{أ ب حـ}}$

، ∵ Δ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ حا أ

∴ ب حـ حا أ = ٢ Δ

∴ حا أ + حا ب + حا حـ = $\frac{\text{٢ ع × ٢ Δ}}{\text{أ ب حـ}} = \frac{\text{٤ ع Δ}}{\text{أ ب حـ}}$

(٢) ∵ $\frac{١}{\text{حـ حا أ}} = \frac{\frac{١}{٢}\text{ ب}}{\frac{١}{٢}\text{ ب حـ حا أ}}$

، $\frac{١}{\text{أ حا ب}} = \frac{\frac{١}{٢}\text{ حـ}}{\frac{١}{٢}\text{ أ حـ حا ب}}$

، $\frac{١}{\text{ب حا حـ}} = \frac{\frac{١}{٢}\text{ أ}}{\frac{١}{٢}\text{ ب أ حا حـ}}$

وبالجمع : ∴ $\frac{١}{\text{حـ حا أ}} + \frac{١}{\text{أ حا ب}} + \frac{١}{\text{ب حا حـ}}$

= $\frac{\frac{١}{٢}\text{ ب}}{\frac{١}{٢}\text{ ب حـ حا أ}} + \frac{\frac{١}{٢}\text{ حـ}}{\frac{١}{٢}\text{ أ حـ حا ب}} + \frac{\frac{١}{٢}\text{ أ}}{\frac{١}{٢}\text{ ب أ حا حـ}}$

= $\frac{\frac{١}{٢}\text{ (ب + حـ + أ)}}{Δ} = \frac{\text{ع}}{Δ}$

٤

∵ مساحة الدائرة = π نق^٢ ، نق = $\frac{\text{أ}}{\text{٢ حا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{٢ حا ب}}$

وبالتعويض

∴ مساحة الدائرة = $\frac{\text{π أ ب}}{\text{٤ حا أ حا ب}}$

إجابات تمارين 20

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)	(٢) (أ)	(٣) (ب)	(٤) (ب)
(٥) (د)	(٦) (أ)	(٧) (أ)	(٨) (جـ)
(٩) (أ)	(١٠) (ب)	(١١) (ب)	(١٢) (د)
(١٣) (د)	(١٤) (د)	(١٥) (ب)	(١٦) (أ)
(١٧) (ب)	(١٨) (جـ)	(١٩) (د)	(٢٠) (ب)
(٢١) (جـ)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (د)
(٢٥) (ب)	(٢٦) (د)	(٢٧) (جـ)	(٢٨) (ب)
(٢٩) (ب)	(٣٠) (ب)	(٣١) (ب)	(٣٢) (ب)
(٣٣) (جـ)	(٣٤) (ب)	(٣٥) (أ)	

ثانياً الأسئلة المقالية

١

∵ ع^٢ = $(١٣)^٢ + (١٦)^٢$ − ٢ × ١٣ × ١٦ حتا ٩٥° ≃ ٤٦١,٣٦

∴ ع ≃ ٢١,٥ سم

٢

∵ ب^٢ = $(٣)^٢ + (٥)^٢$ − ٢ × ٣ × ٥ حتا ٤١ َ ٣٦° ≃ ٩,٨

∴ ب ≃ ٣ سم

٣

∵ حتا أ = $\frac{(٥,٨)^٢ + (٣,٤)^٢ - (٧,٦)^٢}{٢ (٥,٨) (٣,٤)}$

∴ ق (د أ) ≃ ١٠٨ َ ٣٤°

، حتا ب = $\frac{(٧,٦)^٢ + (٣,٤)^٢ - (٥,٨)^٢}{٢ (٧,٦) (٣,٤)}$

∴ ق (د ب) ≃ ٤٦ َ ٢٠°

∴ ق (د حـ) = ١٨٠° − (١٠٨ َ ٣٤° + ٤٦ َ ٢٠°) = ٢٥ َ ٦°

٤

∵ حتا ب = $\frac{(١٣)^٢ + (١٥)^٢ - (١٤)^٢}{٢ (١٣) (١٥)}$

∴ ق (د ب) ≃ ٥٩ َ ٢٩°

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٣ × ١٥ × حا ٥٩ َ ٢٩°

≃ ٨٤ سم^٢

٥

∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع

∴ حتا س = $\frac{(٢٧)^٢ + (٢٤)^٢ - (١٨)^٢}{٢ × ٢٧ × ٢٤}$

∴ ق (د س) ≃ ٤٨ َ ٤٠°

، ∵ نق = $\frac{١٨}{٢ \text{ حا } ٤٨ َ ٤٠^\circ}$

∴ مساحة الدائرة = π $\left(\frac{١٨}{٢ \text{ حا } ٤٨ َ ٤٠^\circ}\right)^٢$ ≃ ٥٩٦ سم^٢

٦

(١) حـ^٢ = $(٧)^٢ + (٩)^٢$ − ٢ (٧) (٩) حتا ٣٢ َ ٩٦° ≃ ١٤٤

∴ حـ ≃ ١٢ سم

(٢) مساحة Δ أ ب حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٧ × ٩ × حا ٣٢ َ ٩٦° ≃ ٣١ سم^٢

(٣) نق = $\frac{\text{حـ}}{\text{٢ حا حـ}} = \frac{١٢}{٢ \text{ حا } (٣٢ َ ٩٦^\circ)}$ ≃ ٦ سم

٧

حـ = ٥٢ − (١٣ + ١٧) = ٢٢ سم

∵ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع

∴ حتا حـ = $\frac{(١٣)^٢ + (١٧)^٢ - (٢٢)^٢}{٢ (١٣) (١٧)}$

∴ ق (د حـ) ≃ ٢٢ َ ٩٣°

، مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٣ × ١٧ × حا ٢٢ َ ٩٣°

≃ ١١٠ سم^٢

٨

∵ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع.

∴ حتا س = $\frac{(١٨)^٢ + (١٠)^٢ - (٢٤,٥)^٢}{٢ × ١٨ × ١٠}$

∴ ق (د س) ≃ ١٩ َ ١١٩°

، ∵ نق = $\frac{٢٤,٥}{٢ \text{ حا } ١٩ َ ١١٩^\circ}$ ≃ ١٤ سم

∴ محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع

= ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ = ٨٨ سم

٩

بفرض أن س = ٤ ك ، ص = ٥ ك ، ع = ٦ ك

، ∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع.

∴ حتا س = $\frac{٢٥ ك^٢ + ٣٦ ك^٢ - ١٦ ك^٢}{٢ × ٥ ك × ٦ ك} = \frac{٣}{٤}$

∴ ق (د س) ≃ ٢٥ َ ٤١°

١٠

∵ سَ : صَ : عَ = جاس : جاص : جاع = ٧ : ٨ : ١٢

ويفرض أن : سَ = ٧ ك ، صَ = ٨ ك ، عَ = ١٢ ك

، ∵ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع.

∴ جتا ع = $\frac{(٧ك)^{٢} + (٨ك)^{٢} - (١٢ك)^{٢}}{٢ \times ٧ك \times ٨ك} = \frac{-٣١}{١١٢}$

∴ ق(∠ع) ≃ ١٠٦° ٤َ

١١

∵ $حَ^{٢} = (٤)^{٢} + (٥)^{٢} - ٢ \times ٤ \times ٥ \times \frac{-١}{٢} = ٦١$

∴ حَ ≃ ٧,٨ سم

، ∵ جتا حـ = $-\frac{١}{٢}$ ∴ ق(∠حـ) = ١٢٠°

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} \times ٤ \times ٥ \times$ جا ١٢٠° = ٥$\sqrt{٣}$ سم²

١٢

∵ ظا ب = $\frac{٣}{٤}$ ∴ جا ب = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا ب = $\frac{٤}{٥}$

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢} \times ١٦ \times ١٨ \times \frac{٣}{٥}$

= ٨٦,٤ سم²

، $بَ^{٢} = (١٦)^{٢} + (١٨)^{٢} - ٢ \times ١٦ \times ١٨ \times \frac{٤}{٥} = ١١٩,٢$

∴ بَ ≃ ١١ سم

∴ محيط Δ أ ب حـ = ١٦ + ١٨ + ١١ = ٤٥ سم

١٣

بالقسمة على ١٢   ∴ $\frac{جا أ}{٦} = \frac{جا ب}{٤} = \frac{جا حـ}{٣}$

∴ أ : ب : حـ = ٦ : ٤ : ٣

، بفرض أن : أ = ٦ ك ، ب = ٤ ك ، حـ = ٣ ك

، ∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع

∴ جتا حـ = $\frac{(٦ك)^{٢} + (٤ك)^{٢} - (٣ك)^{٢}}{٢ \times ٦ك \times ٤ك} = \frac{٤٣}{٤٨}$

∴ ق(∠حـ) ≃ ٢٦° ٢٣َ

١٤

∵ أ : ب : حـ = ٣ : ٤ : ٥

، ويفرض أن : أ = ٣ ك ، ب = ٤ ك ، حـ = ٥ ك

∴ جتا حـ = $\frac{(٣ك)^{٢} + (٤ك)^{٢} - (٥ك)^{٢}}{٢ \times ٣ك \times ٤ك} = ٠$

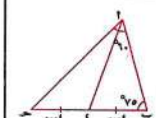
∴ ق(∠حـ) = ٩٠°

∵ ٣ ك + ٤ ك + ٥ ك = ٢٤   ∴ ك = ٢

∴ أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم ، حـ = ١٠ سم

، مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢} \times ٦ \times ٨$ = ٢٤ سم²

١٥



في المثلث أ ب حـ :

∵ $\frac{٨}{جا ٦٠°} = \frac{أحـ}{جا ٧٥°}$

∴ أحـ = $\frac{٨ جا ٧٥°}{جا ٦٠°}$ ≃ ٨,٩٢ سم

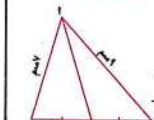
، ∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٧٥°) = ٤٥°

∴ $(أء)^{٢} = (٨,٩٢)^{٢} + (٤)^{٢} - ٢ \times ٨,٩٢ \times ٤ \times$ جتا ٤٥°

≃ ٤٥

∴ أء ≃ ٦,٧ سم

١٦



في المثلث أ ب حـ :

∵ جتا ب = $\frac{(٨)^{٢} + (٩)^{٢} - (٧)^{٢}}{٢ \times ٨ \times ٩}$

= $\frac{٢}{٣}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٤٨° ١١َ

∴ في المثلث أ ب ء :

$(أء)^{٢} = (٩)^{٢} + (٤)^{٢} - ٢ \times ٩ \times ٤$ جتا ٤٨° ١١َ ≃ ٤٩

∴ أء = ٧ سم ، نق = $\frac{٧}{٢ جا ٤٨° ١١َ}$ ≃ ٤,٧ سم

١٧



∵ $(أب)^{٢}$

= $(٨)^{٢} + (١٠)^{٢} - ٢ \times ٨ \times ١٠$ جتا ٥٠°

∴ أ ب ≃ ٨ سم

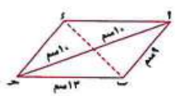
في المثلث أ م ء :

∵ ق(∠أ م ء) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠°

∴ $(أء)^{٢} = (٨)^{٢} + (١٠)^{٢} - ٢ \times ٨ \times ١٠$ جتا ١٣٠°

∴ أء ≃ ١٦ سم

١٨



في Δ أ ب حـ :

∵ جتا ب

= $\frac{(٩)^{٢} + (١٣)^{٢} - (٢٠)^{٢}}{٢ (٩)(١٣)}$

∴ ق(∠ب) ≃ ١٢٩° ٥٢َ

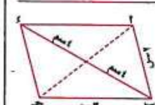
∴ ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° − ١٢٩° ٥٢َ ≃ ٥٠° ٨َ

في Δ أ ب ء :

$(ب ء)^{٢} = (٩)^{٢} + (١٣)^{٢} - ٢ (٩)(١٣) \times$ جتا ٥٠° ٨َ

∴ ب ء ≃ ١٠ سم

١٩



نفرض أن أ ب = ٢ س

، ب حـ = ٣ س

، نصف محيط متوازي الأضلاع = ١٠ سم

∴ ٢ س + ٣ س = ١٠   ∴ س = ٢ سم

∴ أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٦ سم

في Δ أ ب ء : ∵ جتا أ = $\frac{(٤)^{٢} + (٦)^{٢} - (٨)^{٢}}{٢ (٤)(٦)}$

∴ ق(∠أ) ≃ ١٠٤° ٢٩َ

∴ ق(∠أ ب حـ) = ١٨٠° − ١٠٤° ٢٩َ = ٧٥° ٣١َ

∴ $(أحـ)^{٢} = (٤)^{٢} + (٦)^{٢} - ٢ (٤)(٦)$ جتا ٧٥° ٣١َ

∴ أحـ ≃ ٦,٣ سم

٢٠

نصف محيط متوازي الأضلاع = ٢٢ سم



بفرض أن : أ ب = س

∴ أء = ٢٢ − س

∴ في Δ أ ب ء :

∴ $(ب ء)^{٢} = (س)^{٢} + (٢٢ - س)^{٢}$

− ٢ س (٢٢ − س) جتا ٦٠°

∴ ١٩٦ = ٣ س² − ٦٦ س + ٤٨٤

∴ ٣ س² − ٦٦ س + ٢٨٨ = ٠

∴ س² − ٢٢ س + ٩٦ = ٠

∴ (س − ٦)(س − ١٦) = ٠   ∴ س = ٦

∴ أ ب = ٦ سم ، أء = ١٦ سم

∴ $\frac{٦}{جا(∠أ ء ب)} = \frac{١٤}{جا ٦٠°}$

∴ جا(∠أ ء ب) = $\frac{٦ جا ٦٠°}{١٤}$

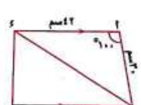
∴ ق(∠أ ء ب) ≃ ٢١° ٤٧َ

، مساحة متوازي الأضلاع أ ب حـ ء

= ٢ مساحة المثلث أ ب ء

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ١٦ جا ٦٠° ≃ ٨٣ سم²

٢١



في Δ أ ب ء :

$(ب ء)^{٢} = (٣٠)^{٢} + (٤٢)^{٢}$

− ٢ × ٣٠ × ٤٢ جتا ١٠٠°

∴ ب ء ≃ ٥٥,٧ سم

، جتا (د ء ب) = ((٥٥,٧)² + (٤٢)² − (٣٠)²) / (٢ × ٥٥,٧ × ٤٢)

≃ ٠,٨٤٨

، ∵ أء // بحـ

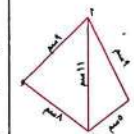
∴ ق (د ء ب حـ) = ق (د أ ء ب) (بالتبادل)

∴ جتا (د ء ب حـ) = ٠,٨٤٨

∴ (حـ ء)² = (٥٥,٧)² + (٤٨)² − ٢ × ٥٥,٧ × ٤٨ × ٠,٨٤٨

∴ حـ ء ≃ ٣٠ سم

٢٢



في Δ أ ب حـ :

جتا ب = ((٩)² + (٥)² − (١١)²) / (٢ × ٩ × ٥) = − ١/٦

، في Δ أ ء حـ :

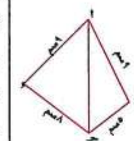
جتا ء = ((٩)² + (٨)² − (١١)²) / (٢ × ٩ × ٨) = ١/٦

∴ جتا ب + جتا ء = ٠

∴ ق (د ب) + ق (د ء) = ١٨٠°

∴ الشكل رباعي دائري.

٢٣



∵ أ ب حـ ء

شكل رباعي دائري

∴ جتا ب = − جتا ء

∴ ((٩)² + (٥)² − (أحـ)²) / (٢ × ٩ × ٥) = − ((٩)² + (٨)² − (أحـ)²) / (٢ × ٩ × ٨)

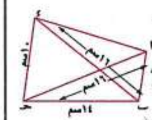
∴ (١٠٦ − (أحـ)²) / ٥ = (−١٤٥ + (أحـ)²) / ٨

∴ ٨٤٨ − ٨ (أحـ)² = −٧٢٥ + ٥ (أحـ)²

∴ ١٣ (أحـ)² = ١٥٧٣ ∴ (أحـ)² = ١٢١

∴ أحـ = ١١ سم

٢٤



في المثلث أ ب حـ :

جتا (د ب أ حـ)

= ((٦)² + (١٦)² − (١٤)²) / (٢ × ٦ × ١٦) = ١/٢

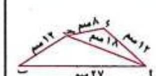
، في المثلث ب حـ ء :

جتا (د ب ء حـ) = ((١٠)² + (١٦)² − (١٤)²) / (٢ × ١٠ × ١٦) = ١/٢

∴ ق (د ب أ حـ) = ق (د ب ء حـ)

∴ الشكل رباعي دائري.

٢٥



في Δ أ ء حـ :

جتا (د ء أ حـ)

= ((١٢)² + (١٨)² − (٨)²) / (٢ × ١٢ × ١٨) = ١٠١/١٠٨

∴ ق (د ء أ حـ) ≃ ٢٠° ٤٥َ

، في Δ حـ أ ب :

جتا (د حـ أ ب) = ((٢٧)² + (١٨)² − (١٢)²) / (٢ (٢٧) (١٨)) = ١٠١/١٠٨

∴ ق (د ء أ حـ) = ق (د حـ أ ب)

أي أن : أحـ⟵ ينصف د ب أ ء

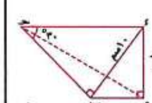
∴ مساحة الشكل أ ب حـ ء

= مساحة Δ أ ء حـ + مساحة Δ أ حـ ب

= ١/٢ × ١٢ × ١٨ جا ٢٠° ٤٥َ + ١/٢ × ١٨ × ٢٧ جا ٢٠° ٤٥َ

= ١٢٤ سم²

٢٦



في Δ أ ء ب :

أ ب = √((١٠)² − (٨)²)

= ٦ سم

، جتا ب = ٣/٥ ∴ ق (د ب) ≃ ٥٣° ٨َ

في Δ ء ب حـ : ء ب = ١/٢ ء حـ

∴ ء حـ = ٢٠ سم ، ب حـ = ١٠√٣ سم

في Δ أ ب حـ :

ق (د أ ب حـ) = ٩٠° + ٥٣° ٨َ = ١٤٣° ٨َ

∴ (أحـ)² = (٦)² + (١٠√٣)²

− ٢ (٦) (١٠√٣) جتا ١٤٣° ٨َ

∴ أحـ ≃ ٢٢ سم

٢٧

∵ حـ² = (٣ ب)² + ب² − ٢ × ٣ ب × ب جتا ٦٠°

= ٧ ب²

∴ حـ = √٧ ب

∴ جتا ب = (٧ ب² + ٩ ب² − ب²) / (٢ × √٧ ب × ٣ ب) = ١٥ / (٦√٧) = ٥ / (٢√٧)

∴ ق (د ب) ≃ ١٩° ٦َ

، ∵ ق (د أ) + ق (د ب) = ١٢٠°

∴ ق (د أ) ≃ ١٠٠° ٥٤َ

٢٨

∵ ١٠√٣ = ١/٢ × ٥ × حـ جا ١٢٠°

∴ حـ = ٨ سم

∴ ب² = (٥)² + (٨)² − ٢ × ٥ × ٨ جتا ١٢٠° = ١٢٩

∴ ب = √١٢٩ ≃ ١١,٣٦ سم

∴ جتا أ = (١٢٩ + (٨)² − (٥)²) / (٢ × √١٢٩ × ٨)

∴ ق (د أ) ≃ ٢٢° ٢٥َ

٢٩

∵ ب : حـ = ٣ : ٤

وبفرض أن : ب = ٣ ل ، حـ = ٤ ل

، ∵ مساحة Δ أ ب حـ = ٦٤

∴ ١/٢ × ٣ ل × ٤ ل × جا ٣٠° = ٦٤

∴ ل = ٨/√٣

∴ ب = ٢٤/√٣ سم ، حـ = ٣٢/√٣

∴ أ² = (٣٢/√٣)² + (٢٤/√٣)²

− ٢ × ٣٢/√٣ × ٢٤/√٣ × جتا ٣٠°

∴ أ ≃ ٩,٥ سم

∴ محيط Δ أ ب حـ ≃ ٤١,٨ سم

٣٠

مساحة Δ أ ب حـ = ١/٢ أ ب جا حـ

∴ ٢٠ = ١/٢ × ٦ × ١٠ جا حـ

∴ جا حـ = ٢/٣

∴ ق (د حـ) ≃ ١٣٨° ١١َ (د حـ منفرجة)

∴ حـ² = (٦)² + (١٠)² − ٢ × ٦ × ١٠ جتا ١٣٨° ١١َ

∴ حـ ≃ ١٥ سم

٣١

∵ جا أ / ١ = جا ب / ١,٥ = جا حـ / ٢

∴ أ : ب : حـ = ١ : ١,٥ : ٢

∴ أ = ل ، ب = ١,٥ ل ، حـ = ٢ ل

، ∵ حـ − أ = ٤ سم ∴ ٢ ل − ل = ٤

∴ ل = ٤

∴ أ = ٤ سم ، ب = ٦ سم ، حـ = ٨ سم

∴ جتا أ = ((٦)² + (٨)² − (٤)²) / (٢ × ٦ × ٨) = ٧/٨

∴ ق (د أ) ≃ ٢٨° ٥٧َ ١٨ً

٣٢

∵ جا أ : جا ب : جا حـ = ٣ : ٥ : ٧

∴ أ : ب : حـ = ٣ : ٥ : ٧

ويفرض أن : أ = ٣ ك ، ب = ٥ ك ، حـ = ٧ ك

∴ جتا أ = $\frac{(\text{٥ك})^{٢} + (\text{٧ك})^{٢} - (\text{٣ك})^{٢}}{٢ \times \text{٥ك} \times \text{٧ك}} = \frac{١٣}{١٤}$

، جتا ب = $\frac{(\text{٣ك})^{٢} + (\text{٧ك})^{٢} - (\text{٥ك})^{٢}}{٢ \times \text{٣ك} \times \text{٧ك}} = \frac{١١}{١٤}$

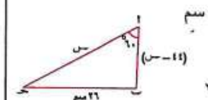
، جتا حـ = $\frac{(\text{٣ك})^{٢} + (\text{٥ك})^{٢} - (\text{٧ك})^{٢}}{٢ \times \text{٣ك} \times \text{٥ك}} = -\frac{١}{٢}$

∴ جتا أ : جتا ب : جتا حـ = $\frac{١٣}{١٤} : \frac{١١}{١٤} : \frac{-١}{٢}$ = ١٣ : ١١ : -٧

٣٣

∵ محيط Δ أ ب حـ = ٧٠ سم

، أ = ٢٦ سم



∴ ب + حـ = ٧٠ - ٢٦

= ٤٤ سم

، بفرض ب = س

∴ حـ = ٤٤ - س

∴ $(٢٦)^{٢} = \text{س}^{٢} + (٤٤ - \text{س})^{٢}$

- ٢ س (٤٤ - س) جتا ٦٠°

∴ $\text{س}^{٢}$ - ٤٤ س + ٤٢٠ = ٠

∴ (س - ٣٠) (س - ١٤) = ٠

∴ س = ٣٠ أو س = ١٤

ب حـ = ٣٠ × ١٤ = ٤٢٠

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ جا أ

= $\frac{١}{٢}$ × ٤٢٠ × جا ٦٠°

= ١٠٥ $\sqrt{٣}$ $\text{سم}^{٢}$

٣٤

∵ ٣٤ = ١٢ + (٦ + حـ) + حـ

∴ حـ = ٨ سم ، ب = ١٤ سم

، ∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع وهو حـ

، ∵ جتا حـ = $\frac{(١٢)^{٢} + (١٤)^{٢} - (٨)^{٢}}{٢ \times ١٢ \times ١٤} = \frac{٢٣}{٢٨}$

∴ ق(∠حـ) = ١٩ ٤٦ ٣٤°

، مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٤ جا ١٩ ٤٦ ٣٤°

≃ ٤٧,٩ $\text{سم}^{٢}$

٣٥

∵ س < ١٠

∴ أكبر الزوايا هى المقابلة للضلع الذى طوله ١٤ سم

∴ جتا ١٢٠° = $\frac{(١٠)^{٢} + \text{س}^{٢} - (١٤)^{٢}}{٢ \times ١٠ \times \text{س}}$

∴ $-\frac{١}{٢} = \frac{\text{س}^{٢} - ٩٦}{٢٠ \text{س}}$

∴ $-\text{س}^{٢}$ + ٩٦ = ١٠ س

∴ $\text{س}^{٢}$ + ١٠ س - ٩٦ = ٠

(س + ١٦) (س - ٦) = ٠

∴ س = ٦ أو س = -١٦ (مرفوض)

٣٦

∵ جتا حـ = $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{حـ}^{٢}}{٢ \text{أ} \text{ب}}$

∴ جتا ١٢٠° = $\frac{(\text{ب} - ٢)^{٢} + \text{ب}^{٢} - (\text{ب} + ٢)^{٢}}{٢ (\text{ب} - ٢) (\text{ب})}$

∴ $-\frac{١}{\cancel{٢}} = \frac{\text{ب}^{٢} - ٤\text{ب} + ٤ + \text{ب}^{٢} - \text{ب}^{٢} - ٤\text{ب} - ٤}{\cancel{٢} (\text{ب} - ٢) (\text{ب})}$

∴ -١ = $\frac{\text{ب}^{٢} - ٨\text{ب}}{\text{ب} (\text{ب} - ٢)}$ ∴ -١ = $\frac{\cancel{\text{ب}} (\text{ب} - ٨)}{\cancel{\text{ب}} (\text{ب} - ٢)}$

∴ ٢ - ب = ب - ٨ ∴ ٢ ب = ١٠

∴ ب = ٥ ∴ أ = ٣ ، حـ = ٧

٣٧

∵ (أ + ب + حـ) (أ + ب - حـ) = ٣ أ ب

∴ $(\text{أ} + \text{ب})^{٢} - \text{حـ}^{٢}$ = ٣ أ ب

∴ $\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$ + ٢ أ ب - $\text{حـ}^{٢}$ = ٣ أ ب

∴ $\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{حـ}^{٢}$ = أ ب وبقسمة الطرفين على ٢ أ ب

∴ $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{حـ}^{٢}}{٢ \text{أ} \text{ب}} = \frac{١}{٢}$

∴ جتا حـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق(∠حـ) = ٦٠°

٣٨

∵ (أ + ب + حـ) (أ + ب - حـ) = ك أ ب

∴ $(\text{أ} + \text{ب})^{٢} - \text{حـ}^{٢}$ = ك أ ب

∴ $\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$ + ٢ أ ب - $\text{حـ}^{٢}$ = ك أ ب

∴ $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{حـ}^{٢}}{٢ \text{أ} \text{ب}} = \frac{(\text{ك} - ٢) \text{أ} \text{ب}}{٢ \text{أ} \text{ب}}$

∴ جتا حـ = $\frac{\text{ك} - ٢}{٢}$

، ∵ صفر < ق(∠حـ) < ١٨٠°

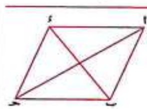
∴ -١ < جتا حـ < ١ ∴ -١ < $\frac{\text{ك} - ٢}{٢}$ < ١

∴ -٢ < ك - ٢ < ٢ ∴ صفر < ك < ٤

∴ ك ∈]٠ ، ٤[، عندما ك = ١

∴ جتا حـ = $\frac{-١}{٢}$ ∴ ق(∠حـ) = ١٢٠°

٣٩



من Δ أ ب حـ :

$(\text{أ حـ})^{٢} = (\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب حـ})^{٢}$

- ٢ (أ ب) × (ب حـ) جتا (∠أ ب حـ) (١)

، من Δ ب حـ ء :

$(\text{ب ء})^{٢} = (\text{ب حـ})^{٢} + (\text{ء حـ})^{٢}$ - ٢ (ب حـ)

× (ء حـ) جتا (∠ء حـ ب)

، ∵ ء حـ = أ ب ، جتا (∠ء حـ ب) = - جتا (∠أ ب حـ)

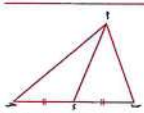
∴ $(\text{ب ء})^{٢} = (\text{ب حـ})^{٢} + (\text{أ ب})^{٢}$ + ٢ (أ ب)

× (ب حـ) جتا (∠أ ب حـ) (٢)

ويجمع (١) ، (٢) :

∴ $(\text{أ حـ})^{٢} + (\text{ب ء})^{٢} = ٢ (\text{أ ب})^{٢} + ٢ (\text{ب حـ})^{٢}$

٤٠



من Δ أ ب ء :

$(\text{أ ب})^{٢} = (\text{أ ء})^{٢} + (\text{ب ء})^{٢}$

- ٢ (أ ء) (ب ء) جتا (∠أ ء ب) (١)

من Δ أ ء حـ : $(\text{أ حـ})^{٢} = (\text{أ ء})^{٢} + (\text{حـ ء})^{٢}$

- ٢ (أ ء) (حـ ء) جتا (∠أ ء حـ) (٢)

، ∵ جتا (∠أ ء ب) = - جتا (∠أ ء حـ) ، حـ ء = ب ء

ويجمع (١) ، (٢) :

∴ $(\text{أ ب})^{٢} + (\text{أ حـ})^{٢} = ٢ (\text{أ ء})^{٢} + ٢ (\text{ب ء})^{٢}$

∴ $(٥)^{٢} + (٨)^{٢} = ٢ (\text{أ ء})^{٢} + ٢ (٦)^{٢}$

∴ أ ء = $\frac{\sqrt{٣٤}}{٢}$ سم

٤١

ظتا ب + ظتا حـ = $\frac{\text{جتا ب}}{\text{جا ب}} + \frac{\text{جتا حـ}}{\text{جا حـ}}$

= $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{حـ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}{٢ \text{أ} \text{حـ} \text{ جا ب}} + \frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{حـ}^{٢}}{٢ \text{أ} \text{ب} \text{ جا حـ}}$

= $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{حـ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}{٤ \Delta} + \frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{حـ}^{٢}}{٤ \Delta}$

= $\frac{٢ \text{أ}^{٢}}{٤ \Delta} = \frac{\text{أ}^{٢}}{٢ \Delta}$

٤٢

∵ $\text{ب}^{٢} = \text{حـ}^{٢}$ - ٢ حـ أ + $\text{أ}^{٢}$ + حـ أ

∴ $\text{ب}^{٢} = \text{حـ}^{٢} + \text{أ}^{٢}$ - حـ أ

، ∵ $\text{ب}^{٢} = \text{حـ}^{٢} + \text{أ}^{٢}$ - ٢ أ حـ جتا ب

∴ حـ أ = ٢ أ حـ جتا ب ∴ جتا ب = $\frac{١}{٢}$

∴ ق(∠ب) = ٦٠°

٤٣

في △ س ص ع :

∵ $س^2 = ص^2 + ع^2 - ٢$ ص ع جتا س

، ∵ $س^2 = ص^2 + ع^2 -$ ص ع ظا س

∴ ٢ جتا س = ظا س ∴ ٢ جتا س = $\frac{جا س}{جتا س}$

∴ ٢ جتا س جا س − جا س = ٠

∴ جا س (٢ جتا س − ١) = ٠

∴ إما جا س = ٠ ومنها س = ٩٠°

أ، جا س = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = ٣٠° أ، ١٥٠°

∴ ق(∠س) = ٩٠° أ، ٣٠° أ، ١٥٠°

٤٤

∵ جتا ب = $\frac{أ^2 + ح^2 - ب^2}{٢ أ ح}$

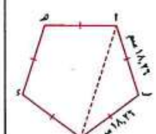
∴ $\frac{ح}{٢أ} = \frac{أ^2 + ح^2 - ب^2}{٢ أ ح}$

∴ $ح^2 = أ^2 + ح^2 - ب^2$

∴ $أ^2 = ب^2$ ∴ أ = ب

∴ △ أ ب ح متساوي الساقين.

٤٥



∵ أ ب ح ء هـ خماسي منتظم

∴ ق(∠ب) = ١٠٨°

∴ $(أ ح)^2$

$= (١٨,٢٦)^2 + (١٨,٢٦)^2$

$- ٢ (١٨,٢٦)(١٨,٢٦) \times$ جتا ١٠٨°

∴ أ ح ≈ ٢٩,٥ سم

٤٦

حل زياد خطأ لأن قانون الجيب يجعل جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائمًا موجبًا رغم أن الزاوية هنا منفرجة ويؤكد ذلك استخدام قاعدة جيب التمام في حل كريم.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (ب)	(٢) (د)	(٣) (ب)	(٤) (ب)
(٥) (ب)	(٦) (أ)	(٧) (ج)	(٨) (د)
(٩) (ب)	(١٠) (ب)	(١١) (أ)	

إرشادات لحل رقم ١

(١) ∵ أ ب = $\sqrt{(-٣ - ٠)^2 + (٤ - ١)^2} = ٣\sqrt{٢}$

، ب ح = $\sqrt{(١ - ٣)^2 + (٣ - ٤)^2} = \sqrt{٥}$

، أ ح = $\sqrt{(١ - ٠)^2 + (٣ - ١)^2} = \sqrt{٥}$

∴ جتا (∠أ ح ب)

$= \frac{(\sqrt{٥})^2 + (\sqrt{٥})^2 - (٣\sqrt{٢})^2}{٢ \times \sqrt{٥} \times \sqrt{٥}}$

$= \frac{-٤}{٥}$

(٢) * إذا علم طول $\overline{أ ب}$ تعين ق(∠أ ح ب) وبالتالي ق(∠ء ح هـ) ، طول $\overline{ء هـ}$

* إذا علم مساحة △ أ ب ح تعين ق(∠أ ح ب) وبالتالي ق(∠ء ح هـ) ، طول $\overline{ء هـ}$

* إذا علم محيط △ أ ب ح عُلم طول $\overline{أ ب}$ وبالتالي نعين ق(∠أ ح ب) ، ق(∠ء ح هـ) ، طول $\overline{ء هـ}$

∴ معرفة أي مما سبق يصلح لإيجاد طول $\overline{ء هـ}$

(٣) ∵ $(أ ب)^2 = (٥)^2 + (٦)^2 - ٢ \times ٥ \times ٦$ جتا θ (١)

، $(أ ح)^2 = (٥)^2 + (٤)^2$

$- ٢ \times ٥ \times ٤$ جتا (١٨٠° − θ) (٢)

، ∵ أ ب = أ ح

ومن (١)، (٢) :

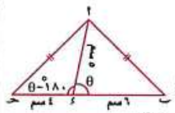
∴ ٢٥ + ٣٦ − ٦٠ جتا θ

= ٢٥ + ١٦ + ٤٠ جتا θ

∴ ١٠٠ جتا θ = ٢٠ ∴ جتا θ = $\frac{١}{٥}$

∴ $(أ ب)^2 = ٢٥ + ٣٦ - ٦٠ \times \frac{١}{٥} = ٤٩$

∴ أ ب = ٧ سم



(٤) ∵ الشكل أ ب ح ء رباعي دائري.

∴ جتا أ = − جتا ح

∴ في △ أ ب ء :

$(ب ء)^2 = (٣)^2 + (٢)^2 - ٢ \times ٣ \times ٢$ جتا أ (١)

، في △ ح ب ء :

$(ب ء)^2 = (٣)^2 + (٤)^2 - ٢ \times ٣ \times ٤$ جتا ح (٢)

من (١)، (٢) :

∴ ٩ + ٤ − ١٢ جتا أ = ٩ + ١٦ + ٢٤ جتا أ

∴ ٣٦ جتا أ = −١٢ ∴ جتا أ = $-\frac{١}{٣}$

(٥) ∵ $\overline{أ ح}$ ، $\overline{ء ب}$ وتران متقاطعان في الدائرة في النقطة هـ

∴ أ هـ × هـ ح = ء هـ × هـ ب

∴ ٣ × ٤ = ٢ × هـ ب ∴ هـ ب = ٦ سم

∴ جتا (∠ب أ هـ) = $\frac{(٣)^2 + (٨)^2 - (٦)^2}{٢ \times ٣ \times ٨} = \frac{٣٧}{٤٨}$

∴ ق(∠ب أ هـ) ≈ ٣٩° ٣٤′

(٦) في △ أ ب ح :

∵ $(أ ب)^2 = (٦)^2 + (١٢)^2 - ٢ \times ٦ \times ١٢ \times$ جتا $(٠,٤)^ء$

∴ أ ب ≈ ٦,٩ سم

، ∵ $هـ^ء = \frac{ل}{نق}$

∴ طول $\overset{\frown}{ب ء}$ = ٠,٤ × ٦ = ٢,٤ سم

∴ محيط الجزء المظلل = ٦,٩ + ٢,٤ + ٦ = ١٥,٣

(٧) ∵ جتا أ = $\frac{ب^2 + ح^2 - أ^2}{٢ ب ح}$

∴ $ب^2 + ح^2 - أ^2 = ٢$ ب ح جتا أ

∴ $(ب^2 + ح^2 - أ^2)$ ظا أ

$= ٢$ ب ح جتا أ × $\frac{جا أ}{جتا أ}$ = ٢ ب ح جا أ

= ٤ × ($\frac{١}{٢}$ ب ح جا أ) = ٤ × ١٢ = ٤٨

(٨) $\left(١ + \frac{أ}{ح} + \frac{ب}{ح}\right)\left(١ + \frac{ح}{ب} - \frac{أ}{ب}\right)$

$= \left(\frac{ح + أ + ب}{ح}\right)\left(\frac{ب + ح - أ}{ب}\right)$

$= \frac{(ب + ح)^2 - أ^2}{ب ح} = \frac{ب^2 + ح^2 - أ^2 + ٢ ب ح}{ب ح}$

$= \frac{ب^2 + ح^2 - أ^2}{ب ح} + ٢$

= ٢ جتا أ + ٢ = ٢ ($\frac{١}{٢}$) + ٢ = ٣

(٩) ∵ $\frac{أ^3 + ب^3 + ح^3}{أ + ب + ح} = أ^2$

∴ $أ^3 + ب^3 + ح^3 = أ^3 + أ^2 ب + أ^2 ح$

∴ $ب^3 + ح^3 = أ^2 ب + أ^2 ح$

∴ $(ب + ح)(ب^2 - ب ح + ح^2) = أ^2 (ب + ح)$

∴ $أ^2 = ب^2 - ب ح + ح^2$

∴ $ب^2 + ح^2 - أ^2 = ب ح$

∴ $\frac{ب^2 + ح^2 - أ^2}{٢ ب ح} = \frac{١}{٢}$ ∴ جتا أ = $\frac{١}{٢}$

∴ ق(∠أ) = ٦٠°

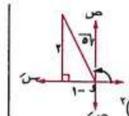
(١٠) بفرض طول ضلع المربع الصغير = ل سم

∴ طول ضلع المربع الأكبر = ٣ ل سم

∴ س هـ = $\sqrt{ل^2 + ل^2} = \sqrt{٢}$ ل سم

، ب س = $\sqrt{ل^2 + (٣ ل)^2} = \sqrt{١٠}$ ل سم

، ب هـ = ٤ ل سم



∴ جتا (∠ب س هـ)

= ((√٢ ل)^2 + (√١٠ ل)^2 − (٤ ل)^2) / (٢ × √٢ ل × √١٠ ل)

= (−٤ ل^2) / (٤ √٥ ل^2) = −١ / √٥   ∴ جا (∠ب س هـ) = ٢ / √٥

(١١) ∵ ب جـ = √((٦٠)^2 + (٨٠)^2) = ١٠٠ سم

، ∵ محيط Δ أ جـ ء = محيط Δ أ ب ء

∴ أ جـ + جـ ء = أ ب + ب ء (لأن $\overline{\text{أء}}$ مشترك)

∴ ٨٠ + جـ ء = ٦٠ + (١٠٠ − جـ ء)

∴ ٢ جـ ء = ٨٠

∴ جـ ء = ٤٠ سم ، ب ء = ٦٠ سم

فى Δ أ ب ء :

∴ (أ ء)^2 = (٦٠)^2 + (٦٠)^2 − ٢ (٦٠) (٦٠) جتا ب

∵ جتا ب = ٦٠ / ١٠٠ = ٠,٦

∴ (أ ء)^2 = ٣٦٠٠ + ٣٦٠٠ − ٢ × ٣٦٠٠ × ٠,٦

∴ أ ء = ٢٤ √٥ سم

٢

∵ (أ^2 + جـ^2 − ب^2) / (٢ أ^2 جـ) = (ب^2 + جـ^2 − أ^2) / (٢ ب^2 جـ)

∴ أ^2 ب^2 + ب^2 جـ^2 − ب^4 = أ^2 ب^2 + أ^2 جـ^2 − أ^4

∴ (أ^2 − ب^2) جـ^2 − (أ^2 − ب^2) (أ^2 + ب^2) = ٠

∴ (أ^2 − ب^2) (جـ^2 − أ^2 − ب^2) = ٠

∴ أ^2 = ب^2 أ، جـ^2 = أ^2 + ب^2

∴ أ = ب أى المثلث أ ب جـ متساوى الساقين

أ، المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى جـ

٣

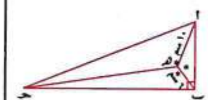
∵ ق (∠أ هـ ب) = ق (∠أ هـ جـ)

= ق (∠ب هـ جـ) = ٣٦٠° / ٣ = ١٢٠°

فى Δ أ ب هـ :

(أ ب)^2 = ٣٦ + ١٠٠ − ٢ × ٦ × ١٠ × جتا ١٢٠°

∴ أ ب = ١٤ سم



وبفرض هـ جـ = س

∴ فى Δ أ هـ جـ :

(أ جـ)^2 = ١٠٠ + س^2 − ٢ × ١٠ × س جتا ١٢٠°

∴ (أ جـ)^2 = ١٠٠ + س^2 + ١٠ س

فى Δ ب هـ جـ :

(ب جـ)^2 = ٣٦ + س^2 − ٢ × ٦ × س جتا ١٢٠°

∴ (ب جـ)^2 = ٣٦ + س^2 + ٦ س

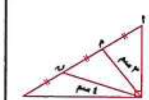
، من Δ أ ب جـ : (أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2

∴ ١٠٠ + س^2 + ١٠ س = ١٩٦ + ٣٦ + س^2 + ٦ س

∴ ٤ س = ١٣٢   ∴ س = ٣٣ سم

∴ هـ جـ = ٣٣ سم

٤



بفرض أن :

، أ م = م ن = ن جـ = س

، أ ب = ص

من Δ أ ب م :

جتا أ = (ص^2 + س^2 − ٩) / (٢ س ص)

∴ ص / (٣ س) = (ص^2 + س^2 − ٩) / (٢ س ص)

∴ ٢ ص^2 = ٣ ص^2 + ٣ س^2 − ٢٧

∴ ص^2 + ٣ س^2 = ٢٧   (١)

من Δ أ ب ن :

جتا أ = (ص^2 + ٤ س^2 − ١٦) / (٢ × ص × ٢ س)

∴ ص / (٣ س) = (ص^2 + ٤ س^2 − ١٦) / (٤ س ص)

∴ ٤ ص^2 = ٣ ص^2 + ١٢ س^2 − ٤٨

∴ − ص^2 + ١٢ س^2 = ٤٨   (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ١٥ س^2 = ٧٥   ∴ س^2 = ٥   ∴ س = √٥ سم

وبالتعويض فى (١) :

∴ ص^2 + ١٥ = ٢٧   ∴ ص^2 = ١٢

∴ ص = ٢ √٣ سم

∴ ب جـ = √((٣√٥)^2 − ١٢) = √٣٣

∴ محيط Δ أ ب جـ = أ ب + ب جـ + أ جـ

= ٢ √٣ + √٣٣ + ٣ √٥ = ١٦ سم

٥

(١) ∵ جتا أ / أ = (ب^2 + جـ^2 − أ^2) / (٢ ب جـ × أ)

، جتا ب / ب = (أ^2 + جـ^2 − ب^2) / (٢ أ جـ × ب) ، جتا جـ / جـ = (أ^2 + ب^2 − جـ^2) / (٢ أ ب × جـ)

∴ جتا أ / أ + جتا ب / ب + جتا جـ / جـ

= (ب^2 + جـ^2 − أ^2 + أ^2 + جـ^2 − ب^2 + أ^2 + ب^2 − جـ^2) / (٢ أ ب جـ)

= (أ^2 + ب^2 + جـ^2) / (٢ أ ب جـ)

(٢) ∵ أ^2 + ب^2 + جـ^2 = ب^2 + جـ^2 − ٢ ب جـ جتا أ

+ أ^2 + جـ^2 − ٢ أ جـ جتا ب + أ^2 + ب^2 − ٢ أ ب جتا جـ

∴ أ^2 + ب^2 + جـ^2

= ٢ أ^2 + ٢ ب^2 + ٢ جـ^2 − ٢ ب جـ جتا أ − ٢ أ جـ جتا ب

− ٢ أ ب جتا جـ

∴ أ^2 + ب^2 + جـ^2

= ٢ (ب جـ جتا أ + أ جـ جتا ب + أ ب جتا جـ)

(٣) ظا أ / ظا جـ = جا أ / جتا أ ÷ جا جـ / جتا جـ = جا أ / جا جـ × جتا جـ / جتا أ

= أ / جـ × (أ^2 + ب^2 − جـ^2) / (٢ أ ب) × (٢ ب جـ) / (ب^2 + جـ^2 − أ^2)

= (أ^2 + ب^2 − جـ^2) / (ب^2 + جـ^2 − أ^2)

21 إجابات تمارين

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د)   (٢) (جـ)

(٣) (جـ)   (٤) أولًا : (أ) ثانيًا : (د)

(٥) (أ)   (٦) (ب)   (٧) (أ)   (٨) (أ)

(٩) (أ)   (١٠) (ب)   (١١) (د)   (١٢) (جـ)

(١٣) (د)   (١٤) (د)   (١٥) (جـ)   (١٦) (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

مسائل على الحالة الأولى لحل المثلث (طول ضلع وقياسا زاويتين)

١

ق (∠م) = ١٨٠° − (١٦° ٣٣َ + ١٩° ٤٤َ) = ٢٥° ١٠٢°

∴ لَ / جا ١٦° ٣٣َ = ١٧ / جا ٢٥° ١٠٢° = نَ / جا ١٩° ٤٤َ

∴ لَ = ٩,٥ سم ، نَ ≃ ١٢,٢ سم

٢

ق (∠أ) = ٨٠° ، ق (∠ب) = ٤٠°

∴ ق (∠جـ) = ١٨٠° − (٨٠° + ٤٠°) = ٦٠°

∴ ب جـ / جا ٨٠° = أ جـ / جا ٤٠° = ٩ / جا ٦٠°

∴ ب جـ ≃ ١٠,٢ سم ، أ جـ ≃ ٦,٧ سم

، مساحة المثلث = ½ × ب جـ × أ جـ × جا جـ

= ½ × ١٠,٢ × ٦,٧ × جا ٦٠°

≃ ٣٠ سم^2

③

ق(∠ع) = ١٨٠° − (٧٥° ١٢َ + ٤٨° ١٥َ) = ٥٦° ٣٣َ

∴ $\frac{\text{ص ع}}{\text{جا } ٧٥° ١٢'} = \frac{\text{س ع}}{\text{جا } ٤٨° ١٥'} = \frac{٤٠}{\text{جا } ٥٦° ٣٣'}$

∴ ص ع ≃ ٤٦,٤ سم ، س ع ≃ ٣٥,٨ سم

، الارتفاع المطلوب = ص ع × جا ص

= ٤٦,٤ جا ٤٩° ١٥َ ≃ ٣٤,٦ سم

مسائل على الحالة الثانية لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة)

④

أ² = (٦)² + (٦)² − ٢ × ٦ × ٦ × جتا ١٥٣° ١٢َ

∴ أ ≃ ١١,٦٧ سم

، ق(∠ب) = ق(∠حـ) = $\frac{١٨٠° - ١٥٣° ١٢'}{٢}$ = ١٣° ٢٤َ

⑤

ق(∠م) = ١,٢ء ≃ ٦٨° ٤٥َ

∴ م² = (١٢,٥)² + (٧,٢٥)² − ٢ × ١٢,٥ × ٧,٢٥ × جتا ٦٨° ٤٥َ

∴ م ≃ ١١,٦٩ سم

∴ جتا ل = $\frac{(١١,٩٦)^٢ + (٧,٢٥)^٢ - (١٢,٥)^٢}{٢ × ١١,٩٦ × ٧,٢٥}$

∴ ق(∠ل) ≃ ٧٦° ٥٣َ

∴ ق(∠ن) = ١٨٠° − (٦٨° ٤٥َ + ٧٦° ٥٣َ)

= ٣٤° ٢٢َ

⑥

(ل ن)² = (٤٨,٥)² + (٤٦)² − ٢ × ٤٨,٥ × ٤٦ × (−٠,٦)

∴ ل ن ≃ ٨٤,٥٣ سم

، جتا ل = $\frac{(٤٨,٥)^٢ + (٨٤,٥٣)^٢ - (٤٦)^٢}{٢ × ٤٨,٥ × ٨٤,٥٣}$

∴ ق(∠ل) ≃ ٢٥° ٤٨َ ، ق(∠م) ≃ ١٢٦° ٥٢َ

∴ ق(∠ن) = ٢٧° ٢٠َ

مسائل على الحالة الثالثة لحل المثلث (أطوال ثلاثة أضلاع)

⑦

① جتا أ = $\frac{(٢٧)^٢ + (٢٤)^٢ - (١٥)^٢}{٢ × ٢٧ × ٢٤}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٣٣° ٣٣َ

، جتا ب = $\frac{(١٥)^٢ + (٢٧)^٢ - (٢٤)^٢}{٢ × ١٥ × ٢٧}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٦٢° ١١َ

، ق(∠حـ) ≃ ١٨٠° − (٣٣° ٣٣َ + ٦٢° ١١َ) ≃ ٨٤° ١٦َ

② جتا أ = $\frac{(٣٥)^٢ + (١٧)^٢ - (٢٨)^٢}{٢ × ٣٥ × ١٧}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٥٢° ١٠َ

، جتا ب = $\frac{(٢٨)^٢ + (١٧)^٢ - (٣٥)^٢}{٢ × ٢٨ × ١٧}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٩٩° ١١َ ، ق(∠حـ) ≃ ٢٨° ٣٩َ

⑧

جتا أ = $\frac{(١٤)^٢ + (١٥)^٢ - (١٣)^٢}{٢ × ١٤ × ١٥}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٥٣° ٨َ

، جتا ب = $\frac{(١٥)^٢ + (١٣)^٢ - (١٤)^٢}{٢ × ١٥ × ١٣}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٥٩° ٢٩َ

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٥٣° ٨َ + ٥٩° ٢٩َ) = ٦٧° ٢٣َ

⑨

جتا أ = $\frac{(٨)^٢ + (٤)^٢ - (٥)^٢}{٢ (٨) (٤)}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٣٠° ٤٥َ

، جتا ب = $\frac{(٥)^٢ + (٤)^٢ - (٨)^٢}{٢ (٥) (٤)}$

∴ ق(∠ب) ≃ ١٢٥° ٦َ

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٣٠° ٤٥َ + ١٢٥° ٦َ) = ٢٤° ٩َ

مسائل على الحالة الرابعة لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية مقابلة لأحدهما)

⑩

$\frac{١٠}{\text{جا أ}} = \frac{٩}{\text{جا } ٥٧°} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا حـ}}$ ∴ جا أ = $\frac{١٠ \text{ جا } ٥٧°}{٩}$

∴ ق(∠أ) = ٦٨° ٤٤َ أو ق(∠أ) = ١١١° ١٦َ

ومنها ق(∠حـ) = ٥٤° ١٦َ أو ق(∠حـ) = ١١° ٤٤َ

، ∵ $\frac{٩}{\text{جا } ٥٧°} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا حـ}}$

∴ حَ = ٨,٧ سم أو حَ = ٢,٢ سم

⑪

$\frac{٤}{\text{جا } ٥٠°} = \frac{٣}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا حـ}}$ ∴ جا ب = $\frac{٣ \text{ جا } ٥٠°}{٤}$

∴ ق(∠ب) = ٣٥° ٤َ

أو ق(∠ب) = ١٤٤° ٥٦َ (مرفوض)

∴ ق(∠حـ) = ٩٤° ٥٦َ

∴ $\frac{\text{حَ}}{\text{جا } ٩٤° ٥٦'} = \frac{٤}{\text{جا } ٥٠°}$ ∴ حَ ≃ ٥,٢ سم

⑫

$\frac{١٢}{\text{جا } ١١٦°} = \frac{١٠}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}}$ ∴ جا أ = $\frac{١٠ \text{ جا } ١١٦°}{١٢}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٤٨° ٣٠َ

أو ق(∠أ) ≃ ١٣١° ٣٠َ (مرفوض)

، ق(∠ب) ≃ ١٨٠° − (٤٨° ٣٠َ + ١١٦°) ≃ ١٥° ٣٠َ

∴ $\frac{\text{بَ}}{\text{جا } ١٥° ٣٠'} = \frac{١٢}{\text{جا } ١١٦°}$ ∴ بَ ≃ ٣,٦ سم

⑬

① ∵ ∠أ منفرجة ، أَ > بَ ∴ يوجد حل وحيد.

∴ $\frac{١٥}{\text{جا } ١٢٠°} = \frac{١٠}{\text{جا ب}}$ ∴ جا ب = $\frac{١٠ \text{ جا } ١٢٠°}{١٥}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٣٥°

، ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٣٥° + ١٢٠°) = ٢٥°

∴ $\frac{\text{حَ}}{\text{جا } ٢٥°} = \frac{١٥}{\text{جا } ١٢٠°}$ ∴ حَ ≃ ٧,٢ سم

② ∵ ∠حـ منفرجة ، حَ > أَ ∴ يوجد حل وحيد

∴ $\frac{١٦}{\text{جا } ١١٥°} = \frac{٤}{\text{جا أ}}$ ∴ جا أ = $\frac{٤ \text{ جا } ١١٥°}{١٦}$

∴ ق(∠أ) ≃ ١٣°

، ق(∠ب) = ١٨٠° − (١١٥° + ١٣°) = ٥٢°

، $\frac{١٦}{\text{جا } ١١٥°} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا } ٥٢°}$ ∴ بَ ≃ ١٣,٩ سم

③ ∵ ∠أ منفرجة ، أَ < بَ

∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق

④ ∵ ∠أ حادة ، ع = ٢٨ جا ٤٢° ≃ ١٨,٧ سم

، ١٨,٧ < ٢٠ < ٢٨ ∴ يوجد للمثلث حلان.

∴ $\frac{٢٠}{\text{جا } ٤٢°} = \frac{٢٨}{\text{جا ب}}$

∴ ق(∠ب) = ٧٠° أو ق(∠ب) = ١١٠°

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٧٠° + ٤٢°) = ٦٨°

أو ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١١٠° + ٤٢°) = ٢٨°

، ∵ $\frac{٢٠}{\text{جا } ٤٢°} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا حـ}}$

∴ حَ ≃ ٢٧,٧ سم أو حَ ≃ ١٤ سم

⑤ ∵ ∠أ حادة ، ع = ٧ جا ٦٠° ≃ ٦,١ سم

∴ أ < ع

∴ الشروط لاتحقق وجود أى مثلث على الإطلاق.

⑥ ∵ ∠أ حادة ، أَ > حَ ∴ يوجد حل وحيد.

∴ $\frac{١٢}{\text{جا } ٢٧°} = \frac{٧}{\text{جا حـ}}$ ∴ ق(∠حـ) ≃ ١٥°

∴ ق(∠ب) = ١٨٠° − (١٥° + ٢٧°) = ١٣٨°

∴ $\frac{\text{بَ}}{\text{جا } ١٣٨°} = \frac{١٢}{\text{جا } ٢٧°}$ ∴ بَ ≃ ١٧,٧ سم

⑦ ∵ ∠ب حادة ، ع = ٤√٣ جا ٦٠° = ٦ سم

∵ ع = ب

∴ يوجد مثلث وحيد قائم الزاوية.

∴ ٦ / جا ٦٠° = ٤√٣ / جا أ   ∴ ق(∠أ) = ٩٠°

∴ ق(∠ح) = ١٨٠° − (٩٠° + ٦٠°) = ٣٠°

∴ ح / جا ٣٠° = ٦ / جا ٦٠°   ∴ ح ≈ ٣,٥ سم

⑧ ∵ ∠أ حادة ، ع = ٨ جا ٤٧° ≈ ٥,٩ سم

∴ ع < أ < ب   ∴ يوجد للمثلث حلان.

∴ ٦ / جا ٤٧° = ٨ / جا ب

∴ ق(∠ب) = ٧٧° أ ، ق(∠ب) = ١٠٣°

∴ ق(∠ح) = ١٨٠° − (٤٧° + ٧٧°) = ٥٦°

أ ، ق(∠ح) = ١٨٠° − (٤٧° + ١٠٣°) = ٣٠°

∵ ح / جا ح = ٦ / جا ٤٧°   ∴ ح ≈ ٦,٨ سم

أ ، ح ≈ ٤,١ سم

١٤

∵ ∠ب حادة ، ع = ٤٢ جا ٥٨° ≈ ٣٥,٦٢ سم

∴ لا يكون للمثلث حل إذا كان : ب < ٣٥,٦٢ سم

مسائل متنوعة

١٥

∵ Δ أ ب ح متساوى الساقين ، ق(∠أ) = ١١٠°

∴ ق(∠ب) = ق(∠ح) = (١٨٠° − ١١٠°) / ٢ = ٣٥°

∴ ٨ / جا ١١٠° = ب / جا ٣٥° = ح / جا ٣٥°

∴ ب = ح ≈ ٤,٩ سم

١٦

∵ جتا ب = ٣/٥ (موجبة)

∴ ∠ب حادة

∴ ق(∠ب) = ٥٣° ٨′ ، ق(∠ح) = ٢٢° ٣٧′

∴ ق(∠أ) = ١٠٤° ١٥′

∴ ٢١ / جا ١٠٤° ١٥′ = ب / جا ٥٣° ٨′ = ح / جا ٢٢° ٣٧′

∴ ب ≈ ١٧,٣ سم ، ح ≈ ٨,٣ سم

١٧

∵ مساحة المثلث أ ب ح = ١/٢ أ ح جا ب

∴ ١٠√٣ = ١/٢ × ٥ × ح جا ١٢٠°

∴ ح = ٨ سم

∴ ب² = (٥)² + (٨)² − ٢ × ٥ × ٨ جتا ١٢٠°

∴ ب = ١١,٣٦ سم

∴ جتا أ = ((١١,٣٦)² + (٨)² − (٥)²) / (٢ × ١١,٣٦ × ٨)

∴ ق(∠أ) = ٢٢° ٢٤′   ∴ ق(∠ح) = ٣٧° ٣٦′

١٨

ق(∠أ) = ٤/١٥ × ١٨٠° = ٤٨°

، ق(∠ب) = ٥/١٥ × ١٨٠° = ٦٠°

، ق(∠ح) = ٦/١٥ × ١٨٠° = ٧٢°

، ∵ أ / جا أ = ب / جا ب = ح / جا ح = (أ + ب + ح) / (جا أ + جا ب + جا ح)

∴ أ / جا ٤٨° = ب / جا ٦٠° = ح / جا ٧٢° = ٥٠ / ٢,٥٦

∴ أ ≈ ١٤,٥ سم ، ب ≈ ١٦,٩ سم ، ح ≈ ١٨,٦ سم

١٩

بفرض أن :

جا أ = ٣ ك ، جا ب = ٤ ك ، جا ح = ٦ ك

∴ أ / ٣ك = ب / ٤ك = ح / ٦ك = (أ + ب + ح) / ١٣ك

∴ أ/٣ = ب/٤ = ح/٦ = ٥٢/١٣

∴ أ = ١٢ سم ، ب = ١٦ سم ، ح = ٢٤ سم

∴ جتا أ = ((١٦)² + (٢٤)² − (١٢)²) / (٢ × ١٦ × ٢٤)

∴ ق(∠أ) ≈ ٢٦° ٢٣′

، جتا ب = ((١٢)² + (٢٤)² − (١٦)²) / (٢ × ١٢ × ٢٤)

∴ ق(∠ب) ≈ ٣٦° ٢٠′   ∴ ق(∠ح) = ١١٧° ١٧′

٢٠

٢١ / جا أ = ٢٥ / جا ب = ح / جا ح = ٢٨

∴ ق(∠أ) ≈ ٤٨° ٣٥′ ، ق(∠ب) ≈ ٦٣° ١٤′

∴ ق(∠ح) = ٦٨° ١١′

∴ ح = ٢٨ جا ٦٨° ١١′ ≈ ٢٦ سم

٢١

أ / جا ٨٢° = ب / جا ب = ٥ / جا ح = ١٦   ∴ أ ≈ ١٥,٨ سم

، ∵ أ > ح   ∴ ∠ح حادة.

، ∵ جا ح = ٥/١٦   ∴ ق(∠ح) ≈ ١٨° ١٣′

∴ ق(∠ب) = ١٨٠° − (٨٢° + ١٨° ١٣′) = ٧٩° ٤٧′

∴ ب = ١٦ جا ٧٩° ٤٧′ ≈ ١٥,٧ سم

٢٢

∵ ٢ × ٢٢/٧ × نق = ٤٤   ∴ ٢ نق = ١٤

∴ ٧ / جا أ = ب / جا ٤٠° = ح / جا ح = ١٤

∴ ب = ١٤ جا ٤٠° ≈ ٩ سم

، ∵ ب > أ   ∴ ∠أ حادة.

، ∵ جا أ = ٧/١٤   ∴ ق(∠أ) = ٣٠°

∴ ق(∠ح) = ١٨٠° − (٤٠° + ٣٠°) = ١١٠°

∴ ح = ١٤ جا ١١٠° ≈ ١٣ سم

٢٣

ق(∠ص) = ١٨٠° − (٨٢° + ٥٦°) = ٤٢°

∴ س / جا ٨٢° = ص / جا ٤٢° = ع / جا ٥٦° = ك

∴ س = ك جا ٨٢° ، ص = ك جا ٤٢°

∴ ٩٠٠ = ١/٢ (ك جا ٨٢°) (ك جا ٤٢°) جا ٥٦°

∴ ك ≈ ٥٧ ويرفض الحل السالب.

∴ س ≈ ٥٦ سم ، ص ≈ ٣٨ سم ، ع ≈ ٤٧ سم

٢٤

ق(∠ح) = ١٨٠° − (٣٥° + ٧٥°) = ٧٠°

∴ أ / جا ٣٥° = ب / جا ٧٥° = ح / جا ٧٠° = (أ + ٢ح) / (جا ٣٥° + ٢ جا ٧٠°)

= ٢٥ / (جا ٣٥° + ٢ جا ٧٠°)

∴ أ ≈ ٤,٢ سم ، ب ≈ ٧,١ سم ، ح ≈ ٦,٩ سم

٢٥

∵ أ / جا أ = ٢ نق   ∴ ١٣ / جا أ = ١٦

∴ ق(∠أ) ≈ ٥٤° ٢٠′ ، أ ١٢٥° ٤٠′

عندما ق(∠أ) = ٥٤° ٢٠′

∴ ق(∠ح) = ٨٣° ٤٠′

∴ ١٣ / جا ٥٤° ٢٠′ = ب / جا ٤٢° = ح / جا ٨٣° ٤٠′

∴ ب ≈ ١٠,٧ سم ، ح ≈ ١٥,٩ سم

عندما ق(∠أ) = ١٢٥° ٤٠′

∴ ق(∠ح) = ١٢° ٢٠′

∴ ١٣ / جا ١٢٥° ٤٠′ = ب / جا ٤٢° = ح / جا ١٢° ٢٠′

∴ ب ≈ ١٠,٧ سم ، ح ≈ ٣,٤ سم

٢٦

① حتا أ = $\frac{(٧,٦٣)^{٢} + (٦,٤)^{٢} - (٣,٢)^{٢}}{٢ \times ٧,٦٣ \times ٦,٤}$

∴ ق(∠أ) = ٢٤ ٢٤°

، حتا ب = $\frac{(٣,٢)^{٢} + (٦,٤)^{٢} - (٧,٦٣)^{٢}}{٢ \times ٣,٢ \times ٦,٤}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٥٢ ٩٩°

∴ ق(∠حـ) = ٤٤ ٥٥°

② حَ^{٢} = (١٢)^{٢} + (٢١)^{٢} − ٢ × ١٢ × ٢١ حتا ٩٥°

∴ حَ ≃ ٢٥,٠٧٨ سم

، ∵ $\frac{٢٥,٠٧٨}{\text{حا } ٩٥°} = \frac{١٢}{\text{حا أ}} = \frac{٢١}{\text{حا ب}}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٢٨ ٢٨° ، ق(∠ب) ≃ ٣٢ ٥٦°

③ لا يمكن تكوين المثلث لأن أ + حَ = بَ

④ ع = ١٠ حا ٤٢° ≃ ٦,٦٩ سم

∴ ع < أ < بَ

∴ يوجد حلان للمثلث.

∴ $\frac{٧}{\text{حا } ٤٢°} = \frac{١٠}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٥٥ ٧٢°

ومنها ق(∠حـ) ≃ ٥ ٦٥°

، حَ ≃ ٩,٥ سم

أ، ق(∠ب) = ٥ ١٠٧°

منها ق(∠حـ) ≃ ٥٥ ٣٠°

، حَ ≃ ٤,٥ سم

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (أ) ② (حـ) ③ (أ)

إرشادات الحل :

① ∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}}$ ∴ $\frac{٣}{\frac{٥}{١٣}} = \frac{٨}{\text{حا ب}}$

∴ حا ب = $\frac{٤٠}{٣٩}$ (مرفوض)

∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق

∴ عدد المثلثات = صفر

② ∵ ٨ حا ٤٠° = بَ حا أ ∴ بَ حا أ < أ < بَ

∴ يمكننا رسم مثلثين

③ ∵ ٨ حا ٤٠° = بَ حا أ ∴ أ < بَ حا أ

∴ لا يمكن رسم المثلث.

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الرابعة

١

∵ ق(∠ب) = ١٨٠° − (١٠٨° + ٥٢°) = ٢٠°

∴ $\frac{\text{أحـ}}{\text{حا } ٢٠°} = \frac{١٦٠}{\text{حا } ٥٢°} = \frac{\text{بحـ}}{\text{حا } ١٠٨°}$

∴ أحـ ≃ ٦٩ كم ، بحـ ≃ ١٩٣ كم

أى أن : المسافة بين أ ، حـ ≃ ٦٩ كم

، المسافة بين ب ، حـ ≃ ١٩٣ كم

٢

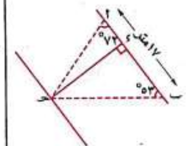
فى Δ أ ب حـ :

① ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٥٣° + ٧٢°) = ٥٥°

∴ $\frac{١٧}{\text{حا } ٥٥°} = \frac{\text{أحـ}}{\text{حا } ٥٣°}$ ∴ أحـ ≃ ١٦,٥٧ م

∴ المسافة بين العلامتين ≃ ١٧ م

② نسقط عمود من حـ على $\overline{\text{أب}}$ وليكن $\overline{\text{حـء}}$



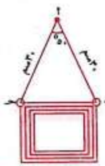
∴ فى Δ أ حـ ء :

$\frac{\text{حـء}}{\text{حا } ٧٢°} = \frac{١٦,٥٧}{\text{حا } ٩٠°}$

∴ حـ ء ≃ ١٥,٧٦ م

∴ المسافة بين حافتى الجدول ≃ ١٥,٧٦ م

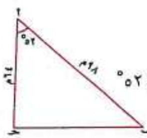
٣



(ب حـ)^{٢} = (٣٠)^{٢} + (٣٠)^{٢} − ٢ (٣٠) (٣٠) حتا ٥٠°

∴ ب حـ ≃ ٢٥ سم

٤

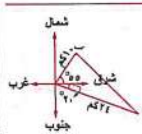


(ب حـ)^{٢} = (٩٨)^{٢} + (٦٤)^{٢} − ٢ (٩٨) (٦٤) حتا ٥٢°

∴ ب حـ ≃ ٧٧,٣ م

∴ طول السياج = ٩٨ + ٦٤ + ٧٧,٣ ≃ ٢٣٩ م

٥



(أب)^{٢} = (٢٤)^{٢} + (١٠)^{٢} − ٢ (٢٤) (١٠) حتا ٧٥°

∴ أب ≃ ٢٣,٥ كم

٦

(أحـ)^{٢} = (٩)^{٢} + (١٥)^{٢} − ٢ (٩) (١٥) حتا ١٢٠°

أحـ = ٢١ كم

، ∵ الزمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

، $ن_{١}$ = $\frac{١٥}{٣٦}$ × ٦٠ = ٢٥ دقيقة.

$ن_{٢}$ = $\frac{٩}{٣٦}$ × ٦٠ = ١٥ دقيقة.

$ن_{٣}$ = $\frac{٢١}{٤٢}$ × ٦٠ = ٣٠ دقيقة.

∴ الزمن الكلى = ٢٥ + ١٥ + ٣٠ = ٧٠ دقيقة.

٧

∵ المثمن منتظم

∴ قياس كل زاوية من زواياه = ١٣٥°

، ق(∠ب ع حـ) = ق(∠حـ ع ء) = $\frac{١٣٥°}{٦}$ = ٢٢,٥°

∴ (ع ب)^{٢} = (٦)^{٢} + (٦)^{٢} − ٢ (٦) (٦) حتا ١٣٥°

∴ ع ب ≃ ١١,١ متر

، (ع حـ)^{٢} = (١١,١)^{٢} + (٦)^{٢} − ٢ (١١,١) (٦) حتا ١١٢,٥°

∴ ع حـ ≃ ١٤,٥ متر

، (ع ء)^{٢} = (١٤,٥)^{٢} + (٦)^{٢} − ٢ (١٤,٥) (٦) حتا ٩٠°

∴ ع ء ≃ ١٥,٧ متر